П. Шмулевич

Сборник задач. Часть III. Геометрия

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 51
ББК 22.1
П11

П. Шмулевич
П11 Сборник задач. Часть III. Геометрия / П. Шмулевич – М.: Книга по Требованию, 2024. – 176 с.

ISBN 978-5-458-49961-3

ISBN 978-5-458-49961-3

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

Серия Книжный Ренессанс
www.samizday.ru/reprint

ВВЕДЕНІЕ.

О рѣшеніи геометрическихъ задачъ на построеніе.

Правильное, осмысленное рѣшеніе геометрическихъ задачъ на построеніе состоитъ изъ четырехъ частей: 1) *анализа,* 2) *построенія,* 3) *доказательства* (синтеза) и 4) *изслѣдованія.*

I. **АНАЛИЗЪ.** Раньше, чѣмъ рѣшать задачу, необходимо составить *планъ* рѣшенія. Для этого обыкновенно поступаютъ такъ: предполагаютъ задачу рѣшенной и дѣлаютъ отъ руки примѣрный чертежъ искомой фигуры, хотя бы и не подходящій размѣрами къ требуемой. По чертежу, отмѣтивъ на немъ тѣ линіи и углы, которые извѣстны изъ условія, замѣчаютъ, что рѣшеніе задачи сводится къ нахожденію какой-нибудь точки, или прямой, или къ опредѣленію какого-нибудь угла.

Послѣ этого стараются найти такую зависимость между данными и искомыми величинами, которая позволила бы найти положеніе искомой точки, или величину искомой прямой, или угла, на опредѣленіе которыхъ сведено рѣшеніе задачи.

При этомъ обыкновенно приходится проводить различныя вспомогательныя прямыя и окружности, нерѣдко даже наудачу, не зная заранѣе, принесетъ ли проведенная линія пользу, или нѣтъ. Бо́льшая или меньшая удача и простота рѣшенія зависитъ, главнымъ образомъ, отъ навыка, пріобрѣтаемаго исключительно долговременной практикой, хотя нѣкоторыя указанія даетъ знаніе *методовъ* рѣшенія.

Когда при помощи подобныхъ разсужденій и догадокъ зависимость между данными и искомыми величинами опредѣлена, переходятъ ко второй части рѣшенія—построенію.

II. **ПОСТРОЕНІЕ** есть механическое выполненіе тѣхъ пріемовъ, которые были выведены изъ плана рѣшенія задачи, т. е. изъ анализа.

III. **ДОКАЗАТЕЛЬСТВО**. Когда построеніе выполнено и искомая фигура начерчена, необходимо доказать, что она дѣйствительно удовлетворяетъ всѣмъ требованіямъ задачи. При этомъ ходъ разсужденія будетъ обратный тому, который былъ примѣненъ при анализѣ. Поэтому доказательство называютъ иногда *синтезомъ*.

IV. **ИЗСЛѢДОВАНІЕ** имѣетъ цѣлью выяснить, при всякихъ ли данныхъ величинахъ предложенная задача возможна, допускаетъ ли она одно рѣшеніе, или нѣсколько. Кромѣ того, строгое изслѣдованіе задачи требуетъ разсмотрѣнія всевозможныхъ частныхъ случаевъ, которые могутъ представиться, причемъ необходимо выяснить, измѣнится ли ходъ рѣшенія въ этихъ случаяхъ, и какъ именно. При этомъ иной разъ оказывается, что для нѣкоторыхъ частныхъ значеній заданныхъ величинъ общій способъ рѣшенія задачи не примѣнимъ и приходится начинать рѣшеніе снова съ анализа для этого частнаго случая.

Въ очень многихъ задачахъ на построеніе оказывается возможнымъ вести анализъ различными способами, въ зависимости отъ тѣхъ или иныхъ вспомогательныхъ построеній. При этомъ и способы построенія, и доказательства будутъ различны, но *результаты изслѣдованія всегда должны быть одинаковы, какимъ бы способомъ задача ни была рѣшена.*

Нѣкоторые методы рѣшенія геометрическихъ задачъ на построеніе.

I. Методъ геометрическихъ мѣстъ.

Геометрическимъ мѣстомъ точекъ называется такая линія, или совокупность линій, или поверхность, всѣ точки которой *обладаютъ нѣкоторымъ опредѣленнымъ свойствомъ*, **исключительно имъ принадлежащимъ**.

Такимъ образомъ, если требуется доказать, что какая-нибудь линія есть геометрическое мѣсто точекъ, удовлетворяющихъ какому-нибудь условію, то доказательство распадается на двѣ самостоятельныя части: во-первыхъ, надо показать, что *всякая точка, удовлетворяющая требуемому условію, лежитъ непремѣнно на этой линіи*, и во-вторыхъ, что *всякая точка этой линіи непремѣнно удовлетворяетъ требуемому условію.*

Примѣненіе геометрическихъ мѣстъ къ рѣшенію задачъ на построеніе заключается въ слѣдующемъ:

Если задача сводится на нахожденіе нѣкоторой точки, которая должна удовлетворять какимъ-нибудь опредѣленнымъ условіямъ, то отбросивъ одно изъ этихъ условій, увидимъ, что задача становится неопредѣленной, т. е. ей можетъ удовлетворять не одна, а цѣлый рядъ точекъ, обладающихъ всѣми требуемыми свойствами, кромѣ отброшеннаго. Эти точки составятъ нѣкоторое геометрическое мѣсто, фигура котораго обыкновенно бываетъ извѣстна, или легко опредѣляется. Послѣ этого, принявъ во вниманіе отброшенное условіе и откинувъ какое-нибудь другое, увидимъ, что искомая точка способна принять безчисленное множество новыхъ положеній, образующихъ въ своей совокупности новое геометрическое мѣсто. Опредѣлимъ видъ этого геометрическаго мѣста и построимъ его. Тогда искомая точка должна лежать и на первомъ, и на второмъ геометрическомъ мѣстѣ и слѣдовательно опредѣлится ихъ пересѣченіемъ.

Задача будетъ возможна или невозможна, смотря по тому пересѣкутся или нѣтъ найденныя геометрическія мѣста.

Пользоваться методомъ геометрическихъ мѣстъ приходится очень часто,—почти въ каждой задачѣ на построеніе,—поэтому очень важно знать и умѣть строить различныя геометрическія мѣста.

Изъ многихъ геометрическихъ мѣстъ перечислимъ только тѣ, знаніе которыхъ понадобится для рѣшенія нижеприведенныхъ задачъ на построеніе.

Г. М. I. *Геометрическое мѣсто точекъ, отстоящихъ на данномъ разстояніи a отъ данной точки C, есть окружность, описанная изъ центра C радіусомъ a.*

Г. М. II. *Геометрическое мѣсто точекъ, равноотстоящихъ отъ двухъ данныхъ точекъ A и B есть перпендикуляръ, возставленный къ прямой AB въ ея серединѣ* *).

Г. М. III. *Геометрическое мѣсто точекъ, равноотстоящихъ отъ двухъ данныхъ прямыхъ* **) *есть биссектрисса угла, образованнаго этими прямыми.*

Г. М. IV. *Геометрическое мѣсто точекъ, отстоящихъ на данное разстоянiе отъ данной прямой MN* ***), *составляютъ двѣ прямыя параллельныя MN.*

Г. М. V. *Геометрическое мѣсто центровъ окружностей, касающихся данной прямой AB въ данной на ней точкѣ M, есть перпендикуляръ къ AB въ точкѣ M.*

Г. М. VI. *Геометрическое мѣсто центровъ окружностей, касающихся данной окружности O въ данной на ней точкѣ M, есть прямая, соединяющая M съ центромъ даннаго круга.*

Г. М. VII. *Геометрическое мѣсто точекъ, изъ которыхъ данный отрѣзокъ прямой виденъ подъ даннымъ угломъ, составляютъ двѣ дуги, описанныя на этомъ отрѣзкѣ и вмѣщающiя данный уголъ.*

Г. М. VIII. *Геометрическое мѣсто серединъ равныхъ хордъ, проведенныхъ въ данной окружности O, есть концентрическая окружность, касательная къ одной изъ этихъ хордъ* ****).

Г. М. IX. *Геометрическое мѣсто точекъ, разстоянiя которыхъ до двухъ данныхъ точекъ A и B находятся въ постоянномъ отношенiи $m : n$, есть окружность, опредѣленнаго центра и радiуса, если только m не равно n* *****).

---

*) Изъ этого слѣдуетъ, что *геометрическое мѣсто центровъ окружностей, проходящихъ черезъ двѣ данныя точки есть перпендикуляръ, возставленный въ серединѣ прямой, соединяющей эти точки.*

**) А слѣд. и *мѣсто центровъ окружностей, касающихся двухъ данныхъ прямыхъ.*

***) А слѣд. и *мѣсто центровъ окружностей, касающихся данной прямой въ произвольной ея точкѣ.*

****) Если длина такихъ хордъ равна a, то радiусъ концентрической окружности равенъ $\sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}}$, гдѣ r — радiусъ данной окружности.

*****) Если $m = n$, то искомое геометр. мѣсто есть перпендикуляръ въ серединѣ прямой AB.

Выведемъ правило для построенія этого геометрическаго мѣста, извѣстнаго подъ именемъ *окружности Апполонія.*

Положимъ, мы имѣемъ двѣ точки A и B (черт. 1). Требуется опредѣлить геометрическое мѣсто точекъ, отношеніе разстояній которыхъ до A и B постоянно равно отношенію $m:n$.

При помощи извѣстнаго изъ Геометріи построенія (Кис. § 197) па безконечной прямой AB всегда можно найти двѣ точки, удовлетворяющія требуемому условію. Пусть это будутъ точки K и L, такъ что

$$AK:BK=m:n \tag{1}$$

$$AL:BL=m:n. \tag{2}$$

Допустимъ, что какимъ бы то ни было способомъ, намъ удалось найти еще одну точку, напр. C, удовлетворяющую требуемому условію, такъ что

$$AC:BC=m:n. \tag{3}$$

Сравнивая равенство (3) съ (1) и (2), имѣемъ:

$$AK:BK=AC:BC \tag{4}$$

$$AL:BL=AC:BC \tag{5}$$

Изъ равенствъ (4) и (5) па основаніи извѣстной изъ геометріи теоремы (Кис. § 199) слѣдуетъ, что CK есть биссектрисса внутренняго угла ACB въ тре-кѣ ABC, а CL—биссектрисса внѣшняго угла DCB того же тре-ка. Вслѣдствіе этого $\angle KCL$, состоя изъ двухъ половинъ смежныхъ угловъ, равенъ 90°. Отсюда ясно, что изъ всякой точки, принадлежащей искомому геометрическому мѣсту, отрѣзокъ KL виденъ подъ прямымъ угломъ, а потому на основаніи геом. мѣста VII заключаемъ, что искомая Аполлоніева окружность есть окружность, описанная на KL какъ на діаметрѣ.

Построеніе Аполлоніевой окружности. Проводимъ черезъ данныя точки A и B (черт. 2) двѣ произвольныя параллели и откладываемъ на нихъ отрѣзки $AM=m$, $BN=n$ и $BN_1=n$. Проводимъ прямыя MN_1, пересѣкающую AB въ точкѣ K и MN, пересѣкающую AB въ точкѣ L. Прямую KL въ точкѣ O дѣлимъ пополамъ и изъ O радіусомъ OK описываемъ окружность, которая и будетъ искомой Аполлоніевой окружностью.

Докажемъ теперь, что дѣйствительно *всѣ* точки полученной окружности удовлетворяютъ требуемому условію. Для этого возьмемъ на этой окружности произвольную точку C и докажемъ, что $AC:BC=m:n$?

Соединимъ точку C съ точками A, B, K, L и проведемъ черезъ B прямую, параллельную AC, пересѣкающую CL въ въ точкѣ E и продолженіе CK въ точкѣ D.

По построенію $\triangle ACK \backsim \triangle DBK$, откуда

1. . . . $AC:DB=AK:BK=m:n$ (по построенію).

Также $\triangle ACL \backsim \triangle BEL$, откуда

2. . . . $AC:BE=AL:BL=m:n$ (по построенію).

Изъ пропорцій (1) и (2) заключаемъ, что

$$DB=BE,$$

т. е. точка B есть середина прямой DE.

Въ тре-кѣ DCE уголъ DCE прямой (потому что вершина его C находится на окружности, а стороны его опираются на діаметръ KL). Поэтому прямая BC въ этомъ тре-кѣ есть медіана гипотенузы DE и слѣд. равна ея половинѣ, т. е. BD или BE *).

Подставивъ въ любое изъ равенствъ (1) или (2) BC вмѣсто BD или BE, получимъ

$$AC:BC=m:n,$$

т. е. всякая точка, взятая на Аполлоніевой окружности, удовлетворяетъ искомому геометрическому мѣсту, что и треб. доказать.

Г. М. X. *Геометрическое мѣсто точекъ, разстоянія которыхъ до двухъ данныхъ прямыхъ находятся въ постоянномъ отношеніи $m:n$, есть прямая, проходящая черезъ вершину угла, образованнаго этими прямыми, и одну изъ такихъ точекъ.*

Въ самомъ дѣлѣ, пусть прямыя AB и BC (черт. 3) пересѣкаются въ точкѣ B и пусть D есть одна изъ точекъ, удовлетворяющихъ требуемому условію, т. е.

$$DE:DF=m:n. \tag{1}$$

---

*) Теорема: «*во всякомъ прямоугольномъ тре-кѣ **медіана гипотенузы равна половинѣ гипотенузы***» доказывается очень просто.

Соединимъ D съ вершиной угла B, возьмемъ на прямой BD произвольную точку K и опустимъ перпендикуляры KH на BC и KG на AB.

Изъ подобія тре-ковъ BKH и BDE имѣемъ:

$$KH : DE = BK : BD. \tag{2}$$

Также изъ подобія тре-ковъ BKG и BDF:

$$KG : DF = BK : BD. \tag{3}$$

Изъ равенствъ (2) и (3) слѣдуетъ:

$$KH : DE = KG : DF,$$

или перемѣнивъ мѣста среднихъ членовъ:

$$KH : KG = DE : DF = m : n,$$

что и треб. доказать.

Итакъ, *построеніе* искомаго геометрическаго мѣста производится слѣдующимъ образомъ. Въ произвольной точкѣ прямой BA (черт. 4) напр. въ B, возставляемъ перпендикуляръ и отлагаемъ на немъ отрѣзокъ $BN = n$; въ произвольной точкѣ прямой BC, напр. хотя бы въ той же точкѣ B, возставляемъ перпендикуляръ и откладываемъ на немъ отрѣзокъ $BM = m$. Проводимъ черезъ N прямую, параллельную BA и черезъ M прямую, параллельную BC. Пусть точка пересѣченія этихъ параллелей будетъ D. Тогда прямая BD, соединяющая полученную точку D съ вершиной угла B, и будетъ искомымъ геометрическимъ мѣстомъ.

Г. М. XI. *Геометрическое мѣсто точекъ, изъ которыхъ два смежные отрѣзка AK и KB прямой AB видны подъ равными углами, есть Аполлоніева окружность, разстояніе точекъ которой до A и B равно отношенію $AK : BK$* *).

Въ самомъ дѣлѣ, если какая-нибудь точка C (черт. 1) принадлежитъ искомому геометрическому мѣсту, т. е.

$$\angle ACK = \angle BCK,$$

то въ тре-кѣ ABC прямая CK есть биссектрисса угла ACB, а потому (Кис. § 198) имѣемъ пропорцію:

$$AC : BC = AK : BK,$$

*) Эта окружность непремѣнно пройдетъ черезъ точку B.

т. е. всякая точка искомаго геометрическаго мѣста находится въ постоянномъ отношеніи $AK:BK$ отъ точекъ A и B, а потому это и есть Аполлоніева окружность.

Г. М. XII. *Геометрическое мѣсто вершинъ равновеликихъ треугольниковъ, имѣющихъ общее основаніе, составляютъ двѣ прямыя, параллельныя основанію.*

Это слѣдуетъ непосредственно изъ геом. мѣста IV.

Примѣры примѣненія метода геометрическихъ мѣстъ встрѣтятся почти въ каждой изъ ниже разсмотрѣнныхъ задачъ на построеніе.

II. Методъ подобія.

Во многихъ случаяхъ бываетъ удобно не строить непосредственно искомую фигуру, а начать съ построенія фигуры ей подобной, послѣ чего нетрудно перейти къ требуемой. Въ этомъ случаѣ данныя для построенія величины раздѣляются на два класса: однѣ даютъ возможность построить фигуру, подобную данной, а другія служатъ для того, чтобы отъ этой фигуры перейти къ требуемой.

Этотъ пріемъ особенно удобенъ въ тѣхъ случаяхъ, когда только одна изъ данныхъ величинъ опредѣляетъ какой нибудь линейный элементъ искомой фигуры, а всѣ другія представляютъ углы, или отношенія сторонъ.

Напр., если для построенія тре-ка даны два угла, или уголъ и отношеніе сторонъ его заключающихъ, или отношеніе трехъ сторонъ, и кромѣ того одинъ какой нибудь линейный элементъ (напр., сторона, высота, медіана, биссектрисса, радіусъ вписаннаго или описаннаго круга и т. д.), то сперва, не обращая вниманія на данный линейный элементъ, строятъ фигуру, подобную данной, а потомъ, вводя требуемую линію, переходятъ къ искомой фигурѣ.

Примѣры пользованія методомъ подобія можно найти при рѣшеніи задачъ №№ 15, 16, 22, 38 и друг.

Кромѣ того, методъ подобія часто примѣняется при вписываніи однѣхъ фигуръ въ другія. Таковы напр. задачи: вписать квадратъ въ данный секторъ (№ 36) или въ данный сегментъ (№ 37) и др.

III. Методъ спрямленія.

Этотъ методъ примѣняется особенно часто при построеніи треугольниковъ, а именно во всѣхъ тѣхъ случаяхъ, когда въ числѣ данныхъ элементовъ находится сумма или разность его сторонъ. Заключается этотъ методъ въ томъ, что поворачиваютъ одну изъ сторонъ, сумма или разность которыхъ дана, около точки ея пересѣченія съ другой изъ нихъ до тѣхъ поръ, пока обѣ стороны не составятъ одной прямой, при чемъ на чертежѣ получается данная сумма или разность.

Примѣры примѣненія этого метода можно найти въ задачахъ №№ 1, 2, 3, 4, 10, 13, 14, 16 и др.

Кромѣ этихъ методовъ, наиболѣе часто встрѣчающихся при рѣшеніи нижеприведенныхъ 50 задачъ на построеніе, полезно замѣтить еще:

IV. **Методъ построенія фигуры по частямъ**, примѣняемый въ тѣхъ случаяхъ, когда изъ данныхъ элементовъ тре-ка опредѣляется непосредственно нѣкоторая его часть.

Напр., если въ тре-кѣ даны медіана и высота, проведенныя изъ одного и того же угла то этими величинами опредѣляется нѣкоторый тре-къ, составляющій часть данняго и рѣшеніе задачи начинается съ построенія этого треугольника.

Примѣры примѣненія этого метода можно найти въ задачахъ №№ 4, 5, 8, 13, 17, 25 и друг.

V. **Методъ параллельнаго перенесенія** состоитъ въ томъ, что какая нибудь линія переносится параллельно самой себѣ въ какую нибудь опредѣленную точку; при этомъ обыкновенно образуется треугольникъ, который можно построить.

Примѣры примѣненія этого метода можно найти въ задачахъ №№ 6, 7, 8, 9, 19 и друг.

Принятыя сокращенія и обозначенія.

М. геом. м. —методъ геометрическихъ мѣстъ.
Г. М. № —геом. мѣсто подъ №.
М. под. —методъ подобія.
М. спр. —методъ спрямленія.
М. пос. ч. —методъ построенія по частямъ.
М. пар. пер.—методъ параллельнаго перенесенія.

Въ тре-кѣ ABC обозначены:

A, B, C —углы треугольника.
a, b, c —стороны, противолежащія угламъ A, B, C.
h_a, h_b, h_c —высоты на стороны a, b, c.
m_a, m_b, m_c —медіаны на тѣ же стороны.
β_A, β_B, β_C —биссектриссы угловъ A, B, C.
R —радіусъ описаннаго круга.
r —радіусъ вписаннаго круга.
$2p$ —периметръ треугольника.
S —площадь треугольника.
Знакъ $\sim$ означаетъ подобіе.
Знакъ $\equiv$ означаетъ равенство площадей (равновеликость).