

А.И. Лурье

**Операционное исчисление в
приложениях к задачам
механики**

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 51
ББК 22.1
А11

A11 **А.И. Лурье**
Операционное исчисление в приложениях к задачам механики / А.И. Лурье –
М.: Книга по Требованию, 2015. – 225 с.

ISBN 978-5-458-56930-9

ISBN 978-5-458-56930-9

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2015

© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2015

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.



Серия Книжный Ренессанс

www.samizday.ru/reprint

ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ПРАВИЛА ОПЕРАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

1.1. Определение изображения и оригинала

Непрерывная однозначная функция $f(t)$ определена при положительных значениях аргумента t и принимается равной нулю при $t < 0$. Предположим еще, что могут быть указаны такие независимые от t числа s_0 и M , что

$$|f(t)| < Me^{s_0 t}. \quad (1.1,1)$$

Пусть далее $p = s + i\sigma$ обозначает комплексное число; при указанных условиях интеграл

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt \quad (1.1,2)$$

представляет аналитическую функцию¹ переменного p во всех точках области $\text{Rep} = s \geq s_1 > s_0$.

Обозначим этот интеграл через $\frac{1}{p} F(p)$ (значение множителя $\frac{1}{p}$ будет выяснено ниже)

$$\frac{1}{p} F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt. \quad (1.1,3)$$

Таким образом, мы по определенному правилу сопоставляем заданной функции $f(t)$ — оригиналу — функцию переменного p , обозначенную соответствующей большой буквой $F(p)$ — изображение нашего оригинала. Ниже будет показано, как обратно при известных условиях по заданному изображению $F(p)$ может быть определен оригинал $f(t)$. При этом можно показать, что сопоставление изображения и оригинала однооднозначно, т. е. если по заданному изображению (оригиналу) может быть определен

¹ Доказательство этого положения см. Унттекер и Ватсон, Курс современного анализа, стр. 124, ГТТИ, 1933 (в дальнейшем мы будем ссылаться только на фамилии авторов); через Rep и $\text{Im}p$ мы будем обозначать соответственно вещественную и мнимую часть числа p .

оригинал (изображение), то это может быть сделано единственным образом.¹

Для обозначения операций сопоставления изображения оригиналу мы будем употреблять символ

$$F(p) \rightarrow f(t) \text{ или } f(t) \leftarrow F(p). \quad (1.1,4)$$

Преобразование (1.1,3) носит название преобразования Лапласа; $\frac{1}{p} F(p)$ представляет Лапласово изображение $f(t)$; $F(p)$ можно назвать изображением $f(t)$ по Хевисайду и Карсону.

1.11. Мы ограничили данное выше определение случаем непрерывной функции, в последующем изложении мы будем делать еще предположения о наличии у $f(t)$ непрерывных производных до того порядка, какой будет нужен нам в нашем исследовании; наконец, некоторые предположения могут быть формулированы лишь в предположении аналитичности функции $f(t)$. Отметим, однако, что многие из этих ограничений несущественны; можно дать более общие определения (1),² пользуясь определением интеграла по Стильтьесу. Имея в виду прикладную цель этой книги и не желая затруднять изложение, мы, однако, не будем ставить своей целью установление подобных обобщений. Отметим только, что для последующих приложений имеет значение случай кусочно-непрерывной функции $f(t)$. Так называется функция, имеющая в любом конечном интервале лишь конечное число разрывов непрерывности 1-го рода в точках $t_1, t_2, \dots$. Это значит, что в каждом из интервалов (t_{i-1}, t_i) $f(t)$ — непрерывная функция, стремящаяся к конечному пределу при приближении изнутри интервала к его границе.

Почти все свойства преобразования (1.1,3), устанавливаемые ниже, сохраняются и в случае кусочно-непрерывной функции.

1.2. Основные свойства преобразования Карсона-Хевисайда

1.21. Перейдем к установлению основных свойств преобразования Хевисайда-Карсона (2—7).

Пусть $\alpha > 0$ и $f(t) \leftarrow F(p)$, тогда

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} f(\alpha t) dt = \frac{1}{\alpha} \int_0^{\infty} e^{-\frac{p}{\alpha} t \alpha} f(\alpha t) d(\alpha t) = \frac{1}{\alpha} \frac{\alpha}{p} F\left(\frac{p}{\alpha}\right) = \frac{1}{p} F\left(\frac{p}{\alpha}\right).$$

и, следовательно,

$$F\left(\frac{p}{\alpha}\right) \rightarrow f(\alpha t).$$

¹ Lerch, Sur un point de la théorie des fonctions génératrices d'Abel. Acta Math., 27, 1903, стр. 339. При этом две функции, совпадающие друг с другом повсюду, кроме точек множества меры нуль, не считаются различными.

² Цифры в тексте относятся к перечню литературы в конце книги.

1.22. Пусть $F_i(p) \rightarrow f_i(t)$ ($i=1, 2, \dots, n$), тогда при постоянных A_i

$$F(p) = \sum_{i=1}^n A_i F_i(p) \rightarrow \sum_{i=1}^n A_i f_i(t) = f(t).$$

1.23. Предположим, что $f(0)=0$ и рассмотрим

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} f'(t) dt = e^{-pt} f(t) \Big|_0^{\infty} + p \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt.$$

В силу предположений, сделанных относительно $f(t)$ (см 1.1) первый член здесь пропадает и мы находим

$$pF(p) \rightarrow f'(t). \quad (1.23,1)$$

Пусть далее $f(0)=f'(0)=\dots=f^{(n-1)}(0)=0$, причем $f'(t), f''(t) \dots f^{(n-1)}(t)$ имеют те же свойства, что и $f(t)$ (см. 1.1). Тогда

$$p^n F(p) \rightarrow f^{(n)}(t). \quad (1.23,2)$$

Пусть теперь $f(t)$ и ее производные не обращаются в нуль при $t=0$. Полагая

$$f_1(t) = f(t) - f(0) - f'(0) \frac{t}{1!} - f''(0) \frac{t^2}{2!} - \dots - f^{(n-1)}(0) \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$$

и имея в виду, что (см. ниже 1.31)

$$\frac{t^s}{s!} \leftarrow \frac{1}{p^s} \quad (s=0, 1, 2, \dots),$$

воспользовавшись 1.22 и (1.23,2), найдем

$$F_1(p) = F(p) - f(0) - \frac{1}{p} f'(0) - \frac{1}{p^2} f''(0) - \dots - \frac{1}{p^{n-1}} f^{(n-1)}(0)$$

и, следовательно, поскольку $f_1^{(n)}(t) \leftarrow F_1(p) p^n$,

$$f^{(n)}(t) \leftarrow p^n \left[F(p) - f(0) - \frac{f'(0)}{p} - \dots - \frac{f^{(n-1)}(0)}{p^{n-1}} \right]. \quad (1.23,3)$$

1.24. Найдем изображение функции

$$\int_0^t f(\tau) d\tau.$$

Имеем

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} dt \int_0^t f(\tau) d\tau = -\frac{1}{p} e^{-pt} \int_0^t f(\tau) d\tau \Big|_0^{\infty} + \frac{1}{p} \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-p\tau} d\tau = \frac{1}{p} \frac{F(p)}{p},$$

так как в силу условий 1.1 $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-pt} \int_0^t f(\tau) d\tau = 0$. Получаем

$$\frac{1}{p} F(p) \rightarrow \int_0^t f(\tau) d\tau.$$

Свойства 1.23 и 1.24 имеют основное значение в операционном исчислении; точнее говоря, они делают построение этого исчисления возможным и плодотворным. Число p приобретает характер оператора, — умножение изображения на p соответствует дифференцированию, деление — интегрированию оригинала.

1.25. Так как $\frac{F(p)}{p}$ при условиях 1.1 является аналитической функцией p , то ее можно дифференцировать произвольное число раз. Находим:

$$\left(\frac{F(p)}{p}\right)' = - \int_0^{\infty} e^{-pt} t f(t) dt, \quad \left(\frac{F(p)}{p}\right)'' = \int_0^{\infty} e^{-pt} t^2 f(t) dt$$

и вообще

$$p \left(\frac{F(p)}{p}\right)^{(n)} \rightarrow (-1)^n t^n f(t) \quad (n = 1, 2, 3 \dots)$$

1.26. Теорема смещения. Пусть $F(p) \rightarrow f(t)$; найдем оригинал $g(t)$ для $F(p + \lambda)$, где λ — положительный вещественный параметр. Имеем

$$\frac{F(p + \lambda)}{p} = \int_0^{\infty} g(t) e^{-pt} dt, \quad \frac{F(p + \lambda)}{p + \lambda} = \int_0^{\infty} f(t) e^{-(p + \lambda)t} dt.$$

Написав первое уравнение в виде (см. 1.24)

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{\lambda}{p}\right) \frac{F(p + \lambda)}{p + \lambda} &= \int_0^{\infty} g(t) e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} f(t) e^{-\lambda t} e^{-pt} dt + \\ &+ \int_0^{\infty} e^{-pt} \left[\int_0^t \lambda e^{-\lambda \tau} f(\tau) d\tau \right] dt, \end{aligned}$$

найдем теперь

$$F(p + \lambda) \rightarrow e^{-\lambda t} f(t) + \lambda \int_0^t e^{-\lambda \tau} f(\tau) d\tau. \quad (1.26,1)$$

Как следствие этой теоремы заметим, что поскольку

$$\lambda \int_0^t e^{-\lambda \tau} f(\tau) d\tau \leftarrow \lambda \frac{F(p + \lambda)}{p + \lambda},$$

то

$$\frac{p}{p + \lambda} F(p + \lambda) = F(p + \lambda) - \frac{\lambda}{p + \lambda} F(p + \lambda) \rightarrow e^{-\lambda t} f(t). \quad (1.26,2)$$

1.27. Теорема Бореля. Одним из важнейших орудий операционного исчисления является теорема Бореля, дающая возможность построить оригинал, соответствующий произведению двух изображений, оригиналы коих известны. Итак, пусть

$$F_1(p) \rightarrow f_1(t), \quad F_2(p) \rightarrow f_2(t).$$

Найдем изображение функции

$$\int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau.$$

Имеем

$$\frac{F(p)}{p} = \int_0^\infty e^{-pt} dt \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau = \int_0^\infty dt \int_0^t e^{-pt} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau.$$

Напомним теперь формулу перемены порядка интегрирования в двойном интеграле:

$$\int_0^a dx \int_0^x f(x, y) dy = \int_0^a dy \int_y^a f(x, y) dx,$$

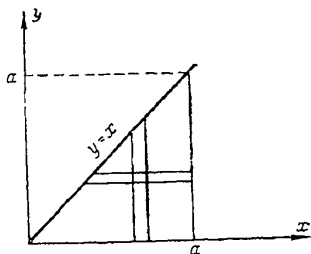


Рис. 1.

непосредственно следующую из рис. 1; интегрирование распространено по площади равнобедренного прямоугольного треугольника, причем в одном случае (интеграл в левой части равенства) интегрирование сначала производится по полоскам, параллельным оси y , а потом по всем подобным площадкам; во втором случае (справа) треугольник сначала разбивается на полоски, параллельные оси x .

Применяя это преобразование к интересующему нас случаю, получим

$$\begin{aligned} \frac{F(p)}{p} &= \\ &= \int_0^\infty d\tau \int_\tau^\infty e^{-pt} f_1(\tau) f_2(t-\tau) dt = \int_0^\infty f_1(\tau) e^{-p\tau} d\tau \int_\tau^\infty e^{-p(t-\tau)} f_2(t-\tau) dt = \\ &= \int_0^\infty e^{-p\tau} f_1(\tau) d\tau \int_0^\infty e^{-p\tau_1} f_2(\tau_1) d\tau_1 = \frac{F_1(p)}{p} \cdot \frac{F_2(p)}{p}. \end{aligned}$$

Итак

$$\frac{1}{p} F_1(p) F_2(p) \rightarrow \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau = \int_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau) d\tau. \quad (1.27,1)$$

Как следствие этого отметим, что

$$F_1(p) \cdot F_2(p) \rightarrow \frac{d}{dt} \int_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau) d\tau. \quad (1.27,2)$$

Ниже будет дано другое доказательство теоремы Бореля.

1.28. Теорема запаздывания. Найдем изображение, соответствующее оригиналу $e^{-p\tau}F(p)$, где τ — вещественный положительный параметр. Мы имеем

$$\frac{e^{-p\tau}}{p} = \int_{\tau}^{\infty} e^{-pt} dt,$$

откуда следует, что оригинал, соответствующий $e^{-p\tau}$, представляет функцию, равную нулю при $t < \tau$ и равную единице при $t > \tau$. Имеющую весьма важное значение в операционном исчислении функцию, равную единице при положительном значении и нулю при отрицательном значении аргумента t , обозначим через $\sigma_0(t)$ — это „единичная функция“ Хевисайда (рис. 2):

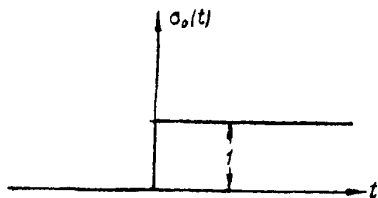


Рис. 2.

$$\sigma_0(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0 \\ 1 & \text{„ } t > 0 \end{cases} \quad (1.28,1)$$

Итак

$$e^{-p\tau} \div \sigma_0(t - \tau). \quad (1.28,2)$$

Основываясь на теореме Бореля, получаем при $t > \tau$

$$\frac{1}{p} e^{-p\tau} F(p) \div \int_0^t \sigma_0(\tau_1 - \tau) f(t - \tau_1) d\tau_1 = \int_{\tau}^t f(t - \tau_1) d\tau_1$$

и в силу (1.23)

$$\begin{aligned} e^{-p\tau} F(p) &\div \frac{d}{dt} \int_{\tau}^t f(t - \tau_1) d\tau_1 = f(0) + \int_{\tau}^t f'(t - \tau_1) d\tau_1 = \\ &= f(0) - f(t - \tau_1) \Big|_{\tau_1=\tau}^{\tau_1=t} = f(t - \tau). \end{aligned}$$

Если же $t < \tau$, то $\sigma_0(\tau_1 - \tau) = 0$ и, следовательно,

$$\frac{1}{p} e^{-p\tau} F(p) \div 0.$$

Итак

$$e^{-p\tau} F(p) \div \begin{cases} 0 & \text{при } t < \tau \\ f(t - \tau) & \text{„ } t > \tau \end{cases} \quad (1.28,3)$$

Вспоминая, что рассматриваемые функции $f(t)$ таковы, что при $t < 0$ $f(t) = 0$, заключаем отсюда, что умножение изображения на $e^{-p\tau}$ сдвигает график оригинала вправо на τ (рис. 3).

Нетрудно дать другой вывод полученного результата, не основывающийся на теореме Бореля. Действительно, найдем изо-

бражение $F_{\tau}(p)$ функции $f_{\tau}(t)$, равной нулю при $t < \tau$ и равной $f(t-\tau)$ при $t > \tau$. Имеем

$$\begin{aligned} \frac{F_{\tau}(p)}{p} &= \int_0^{\infty} f_{\tau}(t) e^{-pt} dt = \int_{\tau}^{\infty} f(t-\tau) e^{-pt} dt = \\ &= e^{-p\tau} \int_{\tau}^{\infty} e^{-p(t-\tau)} f(t-\tau) d\tau = e^{-p\tau} \int_0^{\infty} e^{-pt_1} f(t_1) dt_1 = e^{-p\tau} \frac{F(p)}{p}, \end{aligned}$$

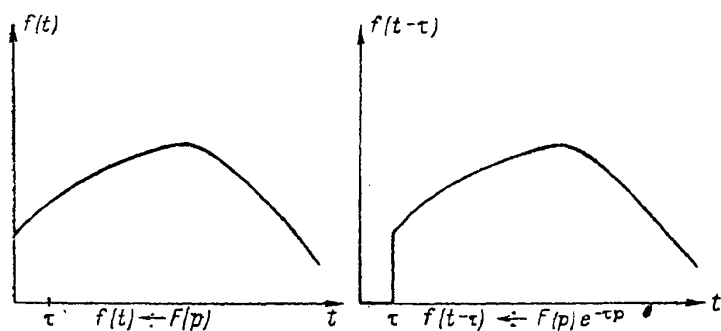


Рис. 3.

откуда и следует (1.28,3). Обратно, основываясь на этой формуле, мы очень просто можем доказать теорему Бореля:

$$\frac{1}{p} F_1(p) F_2(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f_1(t) F_2(p) dt = \int_0^{\infty} e^{-p\tau} F_2(\tau) f_1(\tau) d\tau,$$

но

$$e^{-p\tau} F_2(p) \rightarrow \begin{cases} 0 & \text{при } t < \tau \\ f_2(t-\tau) & \text{„ } t > \tau \end{cases}$$

и, следовательно,

$$\frac{1}{p} F_1(p) F_2(p) \rightarrow \int_0^t f_2(t-\tau) f_1(\tau) d\tau.$$

1.29. При введенных в пункте 1.1 предположениях интеграл

$$\int_0^{\infty} e^{-st} |f(t)| dt \quad (1.29,1)$$

сходится при $s > s_0$. Это значит, что

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt = \frac{F(p)}{p}$$

сходится абсолютно при $\operatorname{Re} p > s_0$ ($p = s + is$). Но нетрудно доказать, что интеграл (1.29,1) при $s \rightarrow \infty$ стремится к нулю. Поэтому и

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{F(p)}{p} = 0. \quad (1.29,2)$$

Допустим теперь, что и интеграл

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} f^{(n)}(t) dt$$

также абсолютно сходится при любом n . Тогда в силу (1.29,2) и (1.23,3) при любом n

$$\lim_{p \rightarrow \infty} p^{n-1} \left[F(p) - f(0) - \frac{f'(0)}{p} - \frac{f''(0)}{p^2} - \dots - \frac{f^{(n-1)}(0)}{p^{n-1}} \right] = 0. \quad (1.29,3)$$

По данному Пуанкаре определению ряд

$$a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \dots + \frac{a_n}{x^n} + \dots$$

представляет асимптотическое разложение функции $\varphi(x)$, если при любом n

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^n \left[\varphi(x) - a_0 - \frac{a_1}{x} - \frac{a_2}{x^2} - \dots - \frac{a_n}{x^n} \right] = 0.$$

Это записывается так:

$$\varphi(x) \sim a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \dots$$

Итак, в нашем случае

$$\frac{F(p)}{p} \sim \frac{f(0)}{p} + \frac{f'(0)}{p^2} + \frac{f''(0)}{p^3} + \dots \quad (1.29,4)$$

причем ряд в правой части может и сходиться.

В частном случае, беря в (1.29,3) $n=1$, получим формулу

$$\lim_{p \rightarrow \infty} F(p) = f(0), \quad (1.29,5)$$

которая таким образом доказана в предположении, что

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} f'(t) dt$$

сходится абсолютно.

1.210. Рассмотрим интеграл

$$\int_{p_1}^{p_2} \frac{F(p) dp}{p} = \int_{p_1}^{p_2} dp \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt.$$

Пусть числа p_1 и p_2 таковы, что $\int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt$ сходится при $Rep_1 < Rep < Rep_2$; порядок интегрирования в таком случае может быть изменен¹.

Получим

$$\int_{p_1}^{p_2} \frac{F(p)}{p} dp = \int_0^{\infty} f(t) dt \int_{p_1}^{p_2} e^{-pt} dp = \int_0^{\infty} \frac{e^{-p_1 t} - e^{-p_2 t}}{t} f(t) dt.$$

Положим в этом равенстве $p_2 = \infty$, $p_1 = p$. Предполагая, что интеграл

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} \frac{f(t)}{t} dt$$

сходится, получим

$$\int_p^{\infty} \frac{F(p)}{p} dp = \int_0^{\infty} \frac{e^{-pt}}{t} f(t) dt, \quad (1.210,1)$$

откуда в силу (1.1,3) и 1.24 находим

$$\int_p^{\infty} \frac{F(p)}{p} dp \rightarrow \int_0^t \frac{f(t)}{t} dt. \quad (1.210,2)$$

Предположим, что (1.210,1) сохраняет смысл при $p=0$, т. е. что интегралы

$$\int_0^{\infty} \frac{F(p)}{p} dp \quad \text{и} \quad \int_0^{\infty} \frac{f(t)}{t} dt$$

сходятся. Тогда

$$\int_0^{\infty} \frac{F(p)}{p} dp = \int_0^{\infty} \frac{f(t)}{t} dt, \quad (1.210,3)$$

но если оригинал есть постоянное число (при $t > 0$), то ему соответствующее изображение равно тому же постоянному числу (см. ниже 1.31). В силу 1.22 и (1.210,3) получаем поэтому

$$\int_0^{\infty} \frac{F(p)}{p} dp - \int_p^{\infty} \frac{F(p)}{p} dp \rightarrow \int_0^{\infty} \frac{f(t)}{t} dt - \int_0^t \frac{f(t)}{t} dt$$

или

$$\int_0^p \frac{F(p)}{p} dp \rightarrow \int_t^{\infty} \frac{f(t)}{t} dt. \quad (1.210,4)$$

¹ Уиттекер и Ватсон, I, стр. 100.

1.3. Изображения часто встречающихся функций

В этом разделе будет рассмотрен вопрос о построении изображений некоторых функций, наиболее часто встречающихся в приложениях. Напомним, что при $t < 0$ мы всегда считаем оригинал $f(t)$ равным нулю. Поэтому формулы, выражающие соответствие изображения и оригинала, следовало бы писать в виде $F(p) \rightarrow f(t) \circ_0(t)$ [см. (1.28,1)]. Мы будем для простоты придерживаться однако прежнего обозначения, постоянно помня, что $f(t) = 0$ при $t < 0$.

1.31. Изображение степени t^m . Интеграл

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} t^m dt$$

сходится при $m > -1$ и может быть легко выражен через функцию Γ Эйлера¹. По определению $\Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{s-1} dx$ (при $\text{Res} > 0$). Полагая $x = pt$, получим

$$\frac{\Gamma(s)}{p^s} = \int_0^{\infty} e^{-pt} t^{s-1} dt,$$

заменяя здесь s на $m+1$, придем к соотношению:

$$\frac{t^m}{\Gamma(m+1)} \leftarrow \frac{1}{p^m} \quad (m > -1). \quad (1.31,1)$$

В частности при целом m , как мы уже указали в 1.23,

$$\frac{t^m}{m!} \leftarrow \frac{1}{p^m}, \quad (1.31,2)$$

при $m=0$ находим $1 \rightarrow 1$. Этим объясняется, почему в определении изображения по Хевисайду и Карсону введен множитель $\frac{1}{p}$ (см. 1.1). Напомним все же, что вместо $1 \rightarrow 1$ следовало бы писать $1 \rightarrow \circ_0(t)$, т. е. изображение, равное единице, соответствует единичной функции Хевисайда.

1.32. Найдем изображение функции $e^{\alpha t}$, где $\alpha < 0$. Полагая в (1.26,2) $f(t) = 1$, получим сразу

$$\frac{p}{p-\alpha} \rightarrow e^{\alpha t}. \quad (1.32,1)$$

¹ За всеми вопросами теории Γ функций и функций Бесселя отсылаем читателя к книге Уиттекера и Ватсона, II или к книге Кузьмина, Бесселевы функции, ГТИИ, 1935.