

Г.В. Оппоков

**Численное интегрирование основных
уравнений внешней баллистики**

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 355/359
ББК 68
Г11

Г11 **Г.В. Оппоков**
Численное интегрирование основных уравнений внешней баллистики / Г.В. Оппоков – М.: Книга по Требованию, 2021. – 109 с.

ISBN 978-5-458-61213-5

ISBN 978-5-458-61213-5

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2021
© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2021

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Вопросы, связанные как с проектированием новой артиллерийской системы, так и с вопросами стрельбы, часто требуют знания всех элементов траектории в любой ее точке: скорости снаряда в этой точке, наклона касательной к горизонту, времени полета, горизонтальной дальности, высоты полета. Перечисленные элементы являются функцией следующих основных исходных данных, которыми можно заранее задаться: начальной скорости, угла бросания, веса снаряда, его калибра и формы.

До последнего времени эта важнейшая задача решалась помощью особых приближенных методов, основанных на различных частных допущениях, необходимых для алгебраического решения соответствующих дифференциальных уравнений движения снаряда; эти методы требовали применения особых таблиц, которыми можно было пользоваться лишь в некоторых частных случаях.

Изложенный в настоящей работе метод расчета элементов траектории, являясь последним достижением в этой области, имеет огромные преимущества перед прежними как в отношении универсальности его использования, так и по его точности.

Этот метод изложен в данном труде Г. В. Оппоковым настолько просто и систематично, что изучить его практическое применение не представит затруднений.

Предлагаемая книга несомненно будет интересна не только специалисту-артиллеристу, но и каждому, кто захотел бы заняться решением основных вопросов внешней баллистики.

Физико-математическая Комиссия Научно-Исследовательской Секции ЦС Осоавиахима СССР.

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА.

Метод численного интегрирования дифференциальных уравнений, с успехом используемый уже давно в прикладных науках, начал применяться во внешней баллистике сравнительно недавно. Именно, академик А. Н. Крылов первым предложил этот метод для решения основных уравнений движений центра тяжести снаряда, взявши за независимую переменную угол наклона касательной к траектории (см. А. Н. Крылов „О приближенном численном интегрировании обыкновенных дифференциальных уравнений“, 1918 и 1924 г.).

Дальнейшему внедрению этого метода во внешнюю баллистику много способствовал известный русский артиллерист В. М. Трофимов, вычисливший траекторию сверхдальнобойного орудия при другой независимой переменной—длине s дуги (см. В. М. Трофимов „Расчет траектории снаряда, брошенного с большой начальной скоростью и под большим углом возвышения“, 1919 г.).

Затем проф. В. В. Мечников показал, что формулы этого метода можно получить при посредстве теории конечных разностей, и, взяв за независимую переменную время полета снаряда, вывел формулы для численного решения дифференциального уравнения второго порядка, в котором имеются производные первого и второго порядка (см. В. В. Мечников: Лекции, читанные в ВТА в 1923—24 г.).

В настоящее время благодаря работе подсобных учреждений Научно-Технического Комитета Артиллерийского Управления этот метод получил довольно широкое распространение как в области внешней баллистики, так и в области внутренней баллистики.

Настоящий труд, предлагаемый читателю, не претендует на оригинальность содержания и на широкий охват вопроса в целом, позволяющий изложить все возможные усовершенствования метода и его многочисленные практические модификации и упрощения; он имеет более узкую, но зато более конкретную цель: дать возможность лицам, мало работавшим в области внешней баллистики, вычислить траекторию центра тяжести снаряда при любых наперед заданных начальных условиях.

В силу этих обстоятельств здесь содержатся лишь самые элементарные сведения как о сущности метода числен-

ного интегрирования дифференциальных уравнений, так и об особенностях применения этого метода во внешней баллистике.

В заключение необходимо указать, что траектория, элементы которой даны в § 4, вычислена Г. П. Тагуновым, таблица приложения первого—В. В. Мечниковым, а таблица приложения второго—А. А. Тюриным. Составитель приносит этим лицам свою глубокую благодарность за предоставление в его распоряжение только что упомянутых вычислений.

Пр.-доц. *Г. В. Оппоков.*

Москва, 15 июня 1929 г.

§ 1. СОВРЕМЕННЫЕ ВОЗЗРЕНИЯ НА ЗАКОН СОПРОТИВЛЕНИЯ ВОЗДУХА.

Сила R (в кг) сопротивления воздуха при движении снаряда, являясь геометрической суммой отдельных элементарных сил сопротивления воздуха, действующих на элементы поверхности снаряда, по существу вопроса зависит от:

- 1) площади S (в м^2) поперечного сечения цилиндрической части снаряда,
- 2) плотности Π (в кг/м^3) воздуха,
- 3) скорости v (в м/с) снаряда,
- 4) угла бросания φ_0 ,
- 5) других неизвестных причин.

Предполагают, что все эти факторы действуют независимо друг от друга, вследствие чего можно написать:

$$R = A \cdot F(S) \cdot f(\Pi) \cdot \Phi_1(v) \cdot \lambda(\varphi_0) \cdot \dots \cdot (1),$$

где A —некоторый постоянный коэффициент, $F(S)$ зависит только от площади поперечного сечения цилиндрической части снаряда, $f(\Pi)$ является функцией только плотности воздуха, $\Phi_1(v)$ зависит только от скорости снаряда и $\lambda(\varphi_0)$ не зависит от S , Π и v .

В первом приближении к действительности считают, что сила R прямо пропорциональна площади поперечного сечения снаряда $S = \frac{\pi}{4} (2r)^2$, где $2r$ —калибр снаряда в м , и плотности воздуха Π в данной точке пространства, а потому:

$$F(S) = \frac{\pi}{4} (2r)^2,$$

$$f(\Pi) = \frac{\Pi}{\Pi_0},$$

если силу R относить к нормальным атмосферным условиям (давление—750 мм; температура—15° Ц, ветер отсутствует), когда на поверхности земли воздух имеет плотность Π_0 .

Таким образом:

$$R = \frac{(2r)^2}{g} \cdot \frac{\Pi}{\Pi_0} \cdot \Phi(v) \cdot \lambda(\varphi_0) \cdot \dots \cdot (2),$$

где g —ускорение силы тяжести и $\Phi(v) = A \cdot \frac{\pi g}{4} \Phi_1(v)$.

Так как плотность воздуха меняется в зависимости от высоты точки над поверхностью земли, то отношение $\frac{\Pi}{\Pi_0}$ является некоторой функцией высоты, чем и объясняется обычное обозначение:

$$\frac{\Pi}{\Pi_0} = H(y) \dots \dots \dots (3),$$

которое употребляют, между прочим, и при вычислении нормальных троекторий, соответствующих нормальным атмосферным условиям.

Опыты, которые производились (по линии метеорологии) для определения функции $H(y)$, привели к многочисленным результатам, наиболее характерные из которых даются ниже.

Dufrenoy („Les méthodes actuelles de la ballistique extérieure“, G. W., 1921, p. 109) указал закон для $H(y)$, выражаемый формулой:

$$H(y) = e^{-0,0001 y} \dots \dots \dots (4),$$

при чем заметил, что численное значение коэффициента при показателе степени выбрано, как среднее значение, полученное из наблюдений температуры на разных высотах. Более детальные указания относительно только что указанной формулы можно найти стр. 137—145 перевода „новейших методов внешней баллистики“ Дюфренуа, Риссе и Рузье (Ленинград, ВТА, 1927 г.).

De Sparre пользовался для вычисления траектории снаряда в случае сверхдальной стрельбы (см. „Sur le calcul des g andes trajecto.res des projectiles“, p. p. 6—8) для $y \leq 11$ км формулой Rateau

$$H(y) = 10^{-\frac{y}{B}} \dots \dots \dots (5),$$

где

$$B = 23,4 - 0,295 y \dots \dots \dots (6),$$

а для $y > 11$ км другой формулой Rateau:

$$H(y) = 10^{-\frac{y}{14,76} + 0,1974} \dots \dots \dots (7)$$

Американцы рекомендуют („Physical bases of ballistik“, table computations by the ordnance departement, Wachington 1920, p. 7) формулу

$$H(y) = 10^{-0,000045 y} \dots \dots \dots (8)$$

В. М. Трофимов применил для вычисления траектории снаряда при сверхдальной стрельбе таблицу, указанную

Бьеркнессом (Bjerkness. *Dynamische Météorologie*, 1912, Statik, S. 51), которая для $y < 10$ км удовлетворяет формуле

$$H(y) = (1 - 0,000018 y)^6 \dots (9),$$

а для $y \geq 10$ км—другой формуле:

$$H(y) = 0,3 e^{-\frac{y - 10000}{6390}} \dots (10)$$

В „Приложении аэрологии к балистике“ (Петроград, Косартон, 1920 г. стр. 18) тот же В. М. Трофимов дал для $y \leq 10$ км выражение:

$$H(y) = \left(1 - \frac{y}{47550}\right)^5 \dots (11),$$

а для $y > 10$ км—другое выражение

$$H(y) = 0,308 e^{-\frac{y - 10000}{6390}} \dots (12)$$

Проф. Мечников (см. „Внешняя балистика“, выпуск I, Ленинград, ВТА, 1929 г.) пользуется (стр. 39) формулой Эберлинга:

$$H(y) = 10^{-0,000046y} \dots (13)$$

Если сравнить цифры для $H(y)$, даваемые различными из вышеуказанных формул, то оказывается, что на небольших высотах (примерно до 10 км) все формулы для $H(y)$ дают приблизительно одинаковые численные значения этой функции. Поэтому очень часто на практике совершенно безразлично, какую из данных выше формул для $H(y)$ применять. При этом следует заметить, что высота y в формулах 4—13 выражена в м.

Для определения $\Phi(v)$ были произведены (по линии внешней балистики) многочисленные опыты, при чем оказалось, что эта функция при всех прочих равных условиях зависит, кроме скорости снаряда, и от его формы, так что

$$\Phi(v) = i f(v) \dots (14),$$

где $f(v)$, являясь функцией только скорости, относится к снаряду определенного очертания, принятому за эталон, а i —коэффициент, выражающий влияние формы данного снаряда, для которого определяется сила R .

Из последних соображений вытекает, что, в сущности говоря, каждый снаряд в зависимости от его типа имеет свой индивидуальный закон сопротивления воздуха, выражаемый конкретно видом функции $\Phi(v)$. При этом для удобства применения закона сопротивления воздуха выбирают снаряд

определенного типа за эталон, пользуются его функцией $f(v)$, как основной, а для перехода от закона сопротивления воздуха для этого основного снаряда к закону сопротивления для данного снаряда (уже другого типа) вводят в рассмотрение коэффициент i .

Одно из наиболее употребительных решений вопроса о функции $f(v)$ дал итальянский артиллерист Сиаччи, а именно:

$$f(v) = 896 f_c(v) \dots (15),$$

$$f_c(v) = 0,2002 v - 48,05 - \sqrt{(0,1648 v - 47,95)^2 - 9,6 - \frac{0,0442 v (v - 300)}{371 + \left(\frac{v}{200}\right)^{10}}} \dots (16)$$

Практически нет надобности в каждом отдельном случае применять формулу (16) непосредственно, так как имеются таблицы для рассматриваемой $f_c(v)$ (см. например, „Kranz Lehrbuch der Ballistik vierter Band, Teubner, Tabelle Nr 7).

Следует заметить, что формула (16) Сиаччи годна только для $v \leq 1200$ м/с, при чем $i = 1$ для снаряда с обыкновенной (не обточенной) запоясковой частью и с оживалом радиуса в два калибра. Что же касается случаев, когда $v > 1200$ м/с, то в данное время, имея в виду отсутствие опытных данных, можно брать ориентировочно:

$$f_c(v) = 0,362 v - 93,2 \dots (17)$$

подобно тому, как поступил de Sparre для вычисления траектории снаряда при сверхдальной стрельбе (см. цитированную выше статью).

Во Франции пользуются для $f(v)$ так называемым Гаврским законом (loi de Gâvre). Соответствующая этому закону таблица приведена на стр. 260—287 упомянутого выше перевода „Новейших методов внешней баллистики“ Дюфренуа, Риссе и Рузье (см. графу для $F(v)$, так как в данной статье изменены обозначения).

Из других решений вопроса о $f(v)$ выделим особо решение проф. Забудского, данное им на стр. 176 „Внешней баллистики“, где на основании опытов завода Круппа приведена таблица значений функции $f(v)$ (в нашем обозначении) для различных диапазонов скоростей, а именно:

$f(v) = 5,499v^{1.55}$	для v между 1100 м/с и 800 м/с;
$f(v) = 2,017v^{1.7}$	„ „ „ 800 м/с и 550 м/с;
$f(v) = 0,3039v^2$	„ „ „ 550 м/с и 419 м/с;
$f(v) = 0,000725v^3$	„ „ „ 419 м/с и 375 м/с;

$$\begin{aligned} f(v) &= 0,00000000517v^3 \text{ для } v \text{ между } 375 \text{ м/с и } 295 \text{ м/с;} \\ f(v) &= 0,00045v^3 \quad \quad \quad \text{ } 295 \text{ м/с и } 240 \text{ м/с;} \\ f(v) &= 0,108 v^2 \quad \quad \quad \text{ от } 240 \text{ м/с до малых.} \end{aligned}$$

Этой таблицей пользуется и проф. Мечников (см. стр. 40 „Внешней баллистики“, выпуск I).

Из той же таблицы видно, между прочим, что опытов для $v > 1100$ м/с до времени составления таблицы не производилось; в случае, если $v > 1100$ м/с можно предположить, что

$$f(v) = 0,3v^2 \dots \dots \dots (18),$$

как это сделано впервые инж. В. М. Трофимовым для вычисления траектории снаряда при сверхдальной стрельбе (см. „Вычисление траектории снаряда, брошенного с большой начальной скоростью и под большим углом возвышения“ 1919 г., Косартон).

Что же касается коэффициента формы i , то позднейшие изыскания, например, Эбергардта и В. М. Трофимова, показали, что этот коэффициент, вообще говоря, является величиной переменной, если исходить из выражений для $f(v)$, данных выше. Этим подтверждается высказанная ранее мысль о том, что снаряд каждого данного типа имеет свой индивидуальный закон сопротивления воздуха. Опыты, произведенные в этом направлении, убеждают в том, что коэффициент i вообще говоря, как-то зависит от скорости, вследствие чего иногда вместо i пишут $i(v)$.

Для шрапнели нашей 3" пушки В. М. Трофимов нашел, что

$$i = 1 - 0,035 \sqrt[6]{v - 263} \dots \dots \dots (19),$$

если $v \geq 263$ м/с и

$$i = 1 \dots \dots \dots (20),$$

если $v < 263$ м/с при условии, что для вычисления траектории применяется закон сопротивления Сиацци или Круппа (см. формулы 15 и 16 и таблицу для $f(v)$ по опытам завода Круппа).

Для стальной фуг. бомбы длиной в 4 кал. и стальной шрапнели длиной в 3,2 кал. при стрельбе из 6-дм. гаубицы обр. 1909 г.

$$i = 0,8,$$

если пользоваться функцией Сиацци по равенству (16). В этих случаях, следовательно, снаряды имеют закон сопротивления воздуха, аналогичный закону сопротивления Круппа.

В каждом отдельном случае для вычисления траектории центра тяжести нужно: либо иметь таблицу численных зна-

чений коэффициента i , либо знать для него формулу, какие могут быть получены из результатов соответствующих опытов (стрельбой у дула по рамам-мишеням при различных начальных скоростях снаряда). При неимении опытов остается допустить, что i —величина постоянная, меньшая единицы; так поступили de Sparre и В. М. Трофимов при вычислении траектории снаряда при сверхдальной стрельбе; само собою разумеется, что такое допущение может на практике и не дать близкого к действительности решения вопроса.

Коэффициент $\lambda(\varphi_0)$ учитывает влияние на силу R не только угла возвышения φ_0 , но и других неизвестных причин, которые необходимо принять во внимание для лучшего согласования результатов опыта с результатами вычислений различных элементов траектории по начальным данным:

- а) весу q снаряда в кг;
- б) его калибру $2r$ в м;
- в) начальной скорости v_0 в м/с;
- г) углу бросания φ_0 .

Условимся при этом снабжать символ $\lambda(\varphi_0)$ значком, указывающим элемент траектории, для вычисления которого коэффициент $\lambda(\varphi_0)$ берется. Например, символ $\lambda_x(75^\circ)$ обозначает коэффициент λ для траектории с углом бросания в 75° и для вычисления горизонтальной дальности x точки траектории.

Само собою разумеется, что здесь имеется в виду только метод численного интегрирования дифференциальных уравнений движения центра тяжести снаряда.

При обработке результатов одного из позднейших отстрелов траекторий автор в случае 3" шрапнели и восходящей ветви траектории получил

$$\lambda_x(74^\circ 30')=1,144$$

$$\lambda_y(74^\circ 30')=1,045,$$

необходимые для вычисления элементов x и y траектории ц. т. снаряда по методу числ. интегр. диф. уравнений с t —независимой переменной при пользовании законом сопротивления Сиацци (16) и функциями $H(y)$ и i по Трофимову.

Резюмируя вышеизложенное, мы видим, что при вычислении элемента j траектории

$$R_j = \frac{(2r)^2}{g} H(y) \cdot i(v) \cdot \lambda_j(\varphi_0) \dots \dots \dots (21),$$

при чем $\lambda_j(\varphi_0)$ имеет, вообще говоря, различные значения для разных углов бросания φ_0 и при вычислении различных элементов j траектории.