

**Н.И. Лобачевский**

**Избранные труды по  
геометрии**

**Классики науки**

**Москва  
«Книга по Требованию»**

УДК 51  
ББК 22.1  
Н11

Н11 **Н.И. Лобачевский**  
Избранные труды по геометрии: Классики науки / Н.И. Лобачевский – М.:  
Книга по Требованию, 2013. – 596 с.

**ISBN 978-5-458-32890-6**

В феврале 1956 года исполнилось 100 лет со дня смерти великого русского математика Николая Ивановича Лобачевского и 130 лет существования созданной им геометрической системы. В настоящее, юбилейное издание, выпускаемое в связи с этой датой, включены три сочинения Н. И. Лобачевского: «Геометрические исследования по теории параллельных линий», «Новые начала геометрии с полной теорией параллельных линий» и «Воображаемая геометрия».

**ISBN 978-5-458-32890-6**

© Издание на русском языке, оформление

«YOYO Media», 2013

© Издание на русском языке, оцифровка,

«Книга по Требованию», 2013

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, кляксы, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.



---

## ОТ РЕДАКЦИИ

В феврале 1956 года исполнилось сто лет со дня смерти великого русского математика Николая Ивановича Лобачевского и сто тридцать лет существования созданной им геометрической системы.

В настоящее, юбилейное издание, выпускаемое в связи с этой датой, включены три сочинения Н. И. Лобачевского: «Геометрические исследования по теории параллельных линий», «Новые начала геометрии с полной теорией параллельных» и «Воображаемая геометрия». Эти работы были выбраны потому, что они в основном содержат все геометрические изыскания великого математика и, таким образом, позволяют составить полное представление о том, что было им создано в области геометрии. Вместе с тем каждая из этих трех работ имеет свои существенные особенности.

Первая из помещаемых работ («Геометрические исследования») была выпущена Н. И. Лобачевским в свет в 1840 г., после того как им были уже опубликованы наиболее крупные геометрические сочинения, в том числе «Новые начала» и «Воображаемая геометрия». Эти крупные сочинения замечательного геометра совершенно не были поняты математиками того времени. Тогда Н. И. Лобачевский пришел к мысли дать краткое, но доступное изложение основных начал созданной им «воображаемой» геометрии. Это и было осуществлено в сочинении «Геометрические исследования», написанном с удивительным искусством. Опубликованное в 1840 г. на немецком языке, оно затем было переведено на английский и французский языки и

неоднократно переиздавалось. «Геометрические исследования» — это такое введение в «воображаемую» геометрию, которое, по замыслу Н. И. Лобачевского, должно сделать доступным изучение остальных, труднее изложенных его сочинений. Именно с этой работы целесообразно начать изучение геометрических сочинений Лобачевского в подлиннике.

После изложения нескольких применяемых в дальнейшем теорем (предложения 1—15), доказываемых без помощи V постулата, Лобачевский излагает в «Геометрических исследованиях» свою теорию параллелей (предложения 16—25). На основе этой (неевклидовой) теории параллелей проводится изучение предельных линий и поверхностей (теоремы 28—34); в частности, доказывается замечательная теорема о том, что на предельной поверхности действует эвклидова геометрия. В заключительной части работы содержится неевклидова тригонометрия и основная формула, выражаяющая угол параллельности.

Сочинение «Новые начала» изложено значительно подробнее, чем другие сочинения Н. И. Лобачевского. Однако оно содержит много материала, чуждого «воображаемой» геометрии; печатание его растянулось на четыре года, и это не содействовало усвоению новой геометрии. Изложение «воображаемой» геометрии в этой работе сходно с тем, которое дано в «Геометрических исследованиях», отличаясь несколько большей подробностью. Кроме основ неевклидовой геометрии, «Новые начала» содержат (главы I—VI) оригинальное изложение основного начального геометрического материала, в корне отличающееся от изложения в «Началах» Эвклида.

Главы XII и XIII составляют, по существу, работу, не связанную с первыми главами, и не включены в настоящее издание; глава XII посвящена решению прямолинейных треугольников в эвклидовой геометрии, глава XIII — решению сферических прямоугольных треугольников. Основная задача, которую себе ставит Н. И. Лобачевский, заключается в том, чтобы установить степень точности логарифмических вычислений, которыми сопровождается «решение треугольников».

Следует отметить, что вопросы измерения площадей прямолинейных многоугольников и объемов простейших многогранников не рассматриваются Лобачевским в этой работе, хотя должны были войти в нее, что видно из ряда мест (см. последний раздел «Вступления», ст. 2, ст. 8, ст. 9 и др.). В связи с этим в настоящее издание включен отрывок из сочинения «О началах геометрии» (см. Приложение 1), восполняющий этот пробел.

Наконец, сочинение «Воображаемая геометрия» было написано Н. И. Лобачевским с целью применения созданной им геометрии к анализу и получения чисто аналитического доказательства непротиворечивости его системы. В начале работы Лобачевский заимствует из своих прежних работ три соотношения между сторонами и углами прямоугольного треугольника, но здесь не доказывает их, а принимает в виде исходных положений. Из них выводятся остальные семь соотношений между сторонами и углами для прямоугольного, а затем и все соотношения для произвольного прямолинейного треугольника.

После этого доказывается, что полученная система формул позволяет решить любой треугольник по тем же данным, что и в геометрии Эвклида, и с тем же ограничением, которое накладывается на три стороны треугольника: сумма двух сторон больше третьей.

Эти результаты Н. И. Лобачевский считает достаточными, чтобы утверждать, что построенная им тригонометрия не противоречит абсолютной геометрии (с современной точки зрения это доказательство непротиворечивости не является достаточным). Дальнейшая часть работы содержит вычисления, связанные с геометрическими фигурами на плоскости и в пространстве. Помимо вычисления площадей и объемов, Н. И. Лобачевский приводит различные приложения к анализу, получив, в общей сложности, несколько десятков интегральных формул. Среди этих формул имеются как оригинальные результаты, так и известные соотношения для Г-функций, эллиптических функций, а также интегралы Пуассона и др.

Основная идея этих приложений состоит в том, что интегралы истолковываются как выражающие площади или объемы в пространстве Лобачевского или распространяются на такие площади или объемы. После этого производится преобразование координат или разбиение области интегрирования на части и сравнение новых полученных при этом интегралов со старыми, что и приводит к различным интегральным соотношениям или окончательным выражениям для интегралов.

Помимо трех основных работ Н. И. Лобачевского, в настоящее издание, как сказано выше, включен отрывок из сочинения «О началах геометрии», посвященный вычислению площадей многоугольников (Приложение 1), и «Речь о важнейших предметах воспитания» (Приложение 2).

Так как сам Н. И. Лобачевский не мог (по самому состоянию геометрии в его время) дать строгое доказательство непротиворечивости своей геометрической системы, мы сочли целесообразным включить в настоящее издание такое доказательство непротиворечивости (Приложение 3). Оно написано Б. Н. Делоне и представляет собой отрывок из его книги «Краткое изложение доказательства непротиворечивости планиметрии Лобачевского». Кроме того включен краткий очерк жизни и деятельности Лобачевского, написанный академиком П. С. Александровым.

Текст работ Лобачевского взят (так же, как и большинство подстрочных примечаний и комментариев) из «Полного собрания сочинений Н. И. Лобачевского», выпущенного Гостехиздатом (1946—1956). Ряд примечаний написан заново В. Г. Болтянским. Отметим еще, что в текст Н. И. Лобачевского внесены некоторые несущественные изменения, исправляющие очевидные недосмотры автора. Так, внесены исправления в черт. 4 к сочинению «Геометрические исследования» и черт. 23, 25, 38, 41, 42, 46 к сочинению «Новые начала». Добавлено несколько чертежей, поясняющих текст Лобачевского (эти чертежи, помимо номера, имеют буквы «а», «б» ...). Исправлены опечатки и вычислительные ошибки в некоторых формулах

(как, например, в группе формул на стр. 386—387). Более существенные ошибки рассмотрены в примечаниях.

Знаки \*, ♦, △, ○, ⊕, ⊖ относятся к подстрочным примечаниям в тексте, цифры [¹], [²], [³]... — к более обширным примечаниям, помещенным в конце книги. Нумерация чертежей и формул проводится в каждом сочинении заново и совпадает с имеющейся в подлиннике.







ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ  
ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ТЕОРИИ  
ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ  
ЛИНИЙ



