

**М. Ф. Берг, М. А. Знаменский, Г. Н.  
Попов**

# **Рабочая книга по математике**

**Для 6-го года обучения в  
городской школе**

**Москва  
«Книга по Требованию»**

УДК 51  
ББК 22.1  
М11

**М. Ф. Берг**  
М11 Рабочая книга по математике: Для 6-го года обучения в городской школе / М. Ф. Берг, М. А. Знаменский, Г. Н. Попов – М.: Книга по Требованию, 2016. – 212 с.

**ISBN 978-5-458-41288-9**

Рабочая книга по математике. Для 6-го года обучения в городской школе. 9-е издание. Составлена в соответствии с программами Гуса 1927 года. Под редакцией А. М. Воронца.

**ISBN 978-5-458-41288-9**

© Издание на русском языке, оформление  
«YOYO Media», 2016

© Издание на русском языке, оцифровка,  
«Книга по Требованию», 2016

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первоизданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.



Серия Книжный Ренессанс

[www.samizday.ru/reprint](http://www.samizday.ru/reprint)



Практические удобства такого различения чисел по их знаку и привели к тому, что в алгебре всякое число со знаком плюс называют *положительным*, а всякое число со знаком минус называют *отрицательным*. Те и другие числа вместе принято называть *относительными числами*, и отсчет как тех, так и других производится от нуля в ту и другую сторону как угодно далеко.

Если не обращать внимания на знак, а только на величину какого-нибудь числа, то ее называют *абсолютной величиной* этого числа. Например, у положительного числа  $(+4)$  абсолютная величина есть 4; у отрицательного числа  $(-5)$  абсолютная величина есть 5 и т. д.

**Упражнения.** 1. Деревня Антоновка отстоит (считая по прямой линии) вправо от села Кривичи на 13 километров, а деревня Златополье находится влево в 11 километрах от того же села. Как вы запишете эти расстояния, пользуясь относительными числами? Ответ.  $(+13)$  км;  $(-11)$  км.

2. Знаменитый греческий математик Архимед умер за 212 лет до начала нашего летосчисления, а другой греческий ученый Прокл умер в 485 году до начала нашего летосчисления. Как это записать?

3. Известно, что высота географических пунктов отсчитывается от уровня моря. Вершина горы на 2255 м выше уровня моря, а наинизшая точка долины лежит на 18 м ниже уровня моря. Как это записать?

4. В совхозе продали рожь с прибылью в 18 рублей, а на картофеле понесли убыток в размере 7 рублей. Произведите запись.

5. В Красной армии нормой роста считается 1,6 м. При осмотре призываемых измерение роста четырех граждан записано так:

- 1) больше нормы на 4,5 см;
- 2) больше нормы на 3,0 см;
- 3) меньше нормы на 0,8 см;
- 4) рост нормальный.

Как произвести запись, пользуясь для нормального роста отметкой 0?

6. В одном предприятии наличный товар и имущество оцениваются в 18 342 руб., в другом — имущество и товар продали в покрытие долгов с аукциона, а осталось еще долга 3562 руб. Произведите запись имущественного состояния обоих предприятий.

7. Какой бы смысл имело утверждение, что одно событие произошло раньше другого на  $(-5)$  лет? Позже на  $(-7)$  лет?

8. Проведите прямую линию. Возьмите посередине точку отсчета (нулевую точку) и, пользуясь для единиц масштабом в 1 см, нанесите на вашу прямую точки, расстояния которых от точки отсчета выражаются соответственно числами:  $(+0,5)$ ,  $(+2)$ ,  $(-1,5)$ ,  $(-3)$ ,  $(+3,5)$ ,  $(-4)$ . Такая прямая называется *числовой осью*. Она неограниченно простирается от точки отсчета в обе стороны и служит для графического изображения относительных чисел.

9. При нормальных условиях вода в паровом котле (черт. 2) стоит на высоте двух третей, а одну треть занимает пар. Избыток пара соответствует понижению уровня воды; наоборот, о недостатке пара свидетельствует повышение уровня воды. Уровень воды на 2 см выше нормы; на 3 см ниже нормы. Как это записать?



Черт. 2.

10. В одной военной школе нормальный комплект курсантов 200 человек. В 1922 г. было принято сверх комплекта

14 человек, в 1923 г. нехватало до нормы 8 человек, в 1924 не хватило 10 человек, в 1925 г. сверх комплекта было 7 человек. Произведите запись.

11. Нормально допускаемый процент влажности зерновой ржи  $13\frac{1}{2}\%$ . В одной партии ржи избыток влажности  $1\%$ , в другой — недостаток  $1\frac{1}{2}\%$ . Произведите запись.

12. Нормальный объем груди равен половине роста. Произведите измерение вашей груди и ваших товарищей. Как вы запишете избытки и недостатки против нормы? Составьте табличку.

13. Географическая долгота отсчитывается от меридиана, принимаемого за первый, к востоку и западу от  $0^\circ$  до  $180^\circ$ . Восточную долготу принято обозначать знаком  $+$ , западную знаком  $-$ . За первые меридианы считают соответствующие положению Ферро, Гринвича, Парижа и Пулкова. Для перевода меридианов вычислена табличка:

|                   | Ферро       | Гринвич     | Париж       | Пулково     |
|-------------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| Ферро . . . . .   | —           | + 17°39'46" | + 20°       | + 47°59'25" |
| Гринвич . . . . . | — 17°39'46" | —           | + 2°20'14"  | + 30°19'39" |
| Париж . . . . .   | — 20°       | — 2°20'14"  | —           | + 27°59'25" |
| Пулково . . . . . | — 47°59'25" | — 3°19'39"  | — 27°59'25" | —           |

Взгляните в эту табличку. Почему относительно Пулкова долготы других меридианов со знаком  $-$ ? Относительно Ферро — со знаком  $+$ ?

Долготы по Гринвичу:

- для Москвы + 37° 34'
- „ Берлина + 13° 23'
- „ Нью-Йорка — 73° 58'
- „ Лиссабона — 9° 11'.

Объясните, что показывают знаки этих долгот?

Используйте табличку в дальнейшем при упражнениях на сложение и вычитание относительных чисел.

## § 2. Действия с относительными числами. Сложение.

Над относительными числами можно производить все действия точно так же, как мы это делаем в арифметике в отношении абсолютных чисел.

*Сложить два или несколько относительных чисел значит соединить их знаком плюс.* Например:

$$\begin{aligned} & (+5) + (-3); \\ & (+4) + (-2) + (+3) + (-1). \end{aligned}$$

Полученные суммы отличаются от обычной арифметической тем, что в них некоторые слагаемые положительны, а некоторые — отрицательны.

Решим такую задачу. В полдень термометр показывал  $8^\circ$  тепла. В течение двух часов ртуть поднялась еще на 3 градусных деления. Какова температура в два часа дня? Очевидно, решение сводится к простому сложению:

$$(+8^\circ) + (+3^\circ) = (+11^\circ).$$

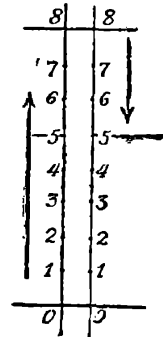
Оба слагаемых положительны (отсчет того и другого идет вверх от нуля, т. е. по одному и тому же направлению), сумма будет также положительна и дает следующий ответ на вопрос задачи: искомая температура  $11^\circ$  тепла. Допустим теперь, что в течение двух часов ртуть не поднялась, а упала на 3 деления. Как велика окончательная температура? Первое показание термометра соответствует тому, что к полудню ртутный столбик двигался в направлении снизу вверх (черт. 3) от нуля до 8-го деления ( $+8^\circ$ ); в течение двух часов он опустился на 3 деления, т. е. двигался в обратном направлении (сверху вниз); следовательно, этому отсчету надо приписать знак минус ( $-3^\circ$ ). Сумма отсчетов:

$$(+8^\circ) + (-3^\circ)$$

и выразит искомую температуру; столбик ртути понизится на три деления и, следовательно, остановится на уровне пятого деления, т. е.:

$$(+8^\circ) + (-3^\circ) = (+5^\circ).$$

Мы получили для суммы положительный результат. Но легко видеть, что, когда одно слагаемое положительно, а другое отрицательно, и сумма может оказаться отрицательной. Пусть, например, термометр (черт. 4) показывал в полдень ( $+2^\circ$ ), а к 8 часам



Черт. 3.

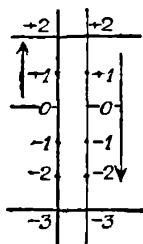
вечера температура понизилась на  $5^\circ$ . Какова будет температура? Второй отсчет, как и в предыдущем случае, надо взять со знаком минус:  $(-5^\circ)$ , и сумма будет;

$$(+2^\circ) + (-5^\circ).$$

Столбик ртути упадет на пять делений и остановится, следовательно, на уровне третьего деления ниже нуля, т. е.:

$$(+2^\circ) + (-5^\circ) = (-3^\circ).$$

Итак, в 8 часов вечера термометр покажет  $3^\circ$  мороза. Сравнив этот пример с предыдущим, нетрудно видеть, что знак суммы зависит от абсолютной величины слагаемых.



Действительно:

- 1)  $(+8^\circ) + (-3^\circ) = (+5^\circ)$ ;
- 2)  $(+2^\circ) + (-5^\circ) = (-3^\circ)$ .

В первом случае абсолютная величина больше у положительного слагаемого, во втором — у отрицательного; следовательно, при сложении двух относительных чисел с разными знаками у суммы их будет знак того слагаемого, абсолютная величина которого больше.

Рассмотрим еще пример.

Буксирный пароход от пристани  $A$  прошел влево от нее на 15 км к пристани  $B$ , откуда, взяв на буксир баржу, привел ее к пристани  $C$ , находящейся правее  $B$  на 25 км. Насколько пароход удалился от пристани  $A$ ?



Черт. 5.

Расстояние  $AB$ , как отсчитываемое влево от точки  $A$ , отрицательно ( $-15$ ); расстояние  $BC$ , отсчитываемое вправо от точки  $B$ , положительно ( $+25$ ); следовательно, искомое расстояние  $AC$  есть сумма:

$$(-15) + (+25).$$

Но пройдя от  $B$  и  $A$  обратно 15 км, пароход в том же направлении продвигается по условию еще на 10 км, т. е.

$$(-15) + (+25) = +10.$$

Знак  $+$  у результата  $(+10)$  и показывает, что пристань  $C$  расположена правее  $A$  на 10 км.

Разберем теперь такой случай: тот же пароход, захватив баржу у пристани  $B$ , привел ее к пристани  $D$ , находящейся левее  $B$  на 5 км. На сколько пароход удалился от пристани  $A$ ?

Здесь оба отсчета пройденных расстояний сделаны *влево* от  $A$ , т. е. оба отрицательны  $(-15)$  и  $(-5)$ ; следовательно, и сумма их будет также отрицательна:

$$(-15) + (-5) = -20.$$

Полученный результат показывает, что пароход теперь удален *влево* от пристани  $A$  на 20 км.

Первый и последний из разобранных нами примеров показывают, что *при сложении относительных чисел с одинаковыми знаками сумма сохраняет их знак*. Нетрудно видеть, что, когда первый отсчет начинается с нуля условно выраженной шкалы, то его можно и не писать, как например для температур:

$$0^\circ + (+3^\circ) = (+3^\circ);$$

$$0^\circ + (-3^\circ) = (-3^\circ).$$

Вообще:

$$0 + (+a) = +a;$$

$$0 + (-a) = -a.$$

**Упражнения. 14.** Путешественник находится на горе на высоте 1980 м над уровнем моря; он поднимается еще на 240 м, отдыхает и потом спускается на 670 м и опять отдыхает. Найти высоты, на которых отдыхал путешественник.

15. Известно, что нормальное барометрическое давление определяется столбиком ртути высотой в 760 мм. Барометр в понедельник показывал нормальное давление, во вторник упал на 4 мм, в среду поднялся на 3 мм, в четверг поднялся на 5 мм, в пятницу упал на 2 мм, в субботу упал на 3 мм и в воскресенье поднялся на 6 мм. Составьте табличку давлений за эту неделю.

16. Производят некоторый физический опыт и вначале измеряют температуру  $t^\circ$ . По окончании опыта опять измеряют температуру и находят, что она изменилась на  $T^\circ$ . Найдите ответ для следующих данных:

$$t = +10^\circ \mid +12^\circ \mid +15^\circ \mid -8^\circ \mid -8^\circ \mid -1^\circ \mid$$

$$T = +2^\circ \mid -3^\circ \mid +15^\circ \mid +4^\circ \mid -3^\circ \mid +1^\circ \mid$$

17. Пароход прошел от пристани вниз по течению 18 км, потом вверх по течению 12 км. В каком расстоянии он находится от пристани?

18. Аэроплан, находившийся на высоте 4230 м над поверхностью земли, сначала снизился на 250 м, а потом поднялся на 890 м. На какой высоте находится аэроплан?

19. Вода в реке поднялась на  $a$  м, потом упала на  $b$  м. На сколько в конечном итоге поднялась вода? Объясните результат при следующих данных:

- 1)  $a = 0,4$  м    2)  $a = 0,5$  м    3)  $a = -0,3$  м    4)  $a = -0,4$  м  
 $b = 0,2$  м     $b = 0,6$  м     $b = 0,2$  м     $b = -0,1$  м.

20. С пристани при помощи грузоподъемного крана поднят груз на высоту 5 м над поверхностью воды, а потом спущен в трюм на глубину в 7 м. На какой высоте над уровнем моря находится груз? Как надо изменить вопрос, чтобы ему удовлетворял полученный ответ?

21. Поезд отошел от станции вправо на 16 км, а потом прошел (— 19) км. Где находится поезд?

22. Камень лежал на дне реки на глубине 3 м. С помощью грузоподъемного крана его подняли на высоту 5 м над поверхностью дна. На какую высоту над уровнем реки поднят камень?

### § 3. Вычитание относительных чисел.

Обозначим при вычитании уменьшаемое буквой  $a$  и вычитаемое буквой  $b$ , так что разность будет:

$$a - b.$$

В арифметике действие вычитания считается возможным, когда  $a > b$ , например, при  $a = 10$  и  $b = 7$ , найдем:

$$10 - 7 = 3.$$

Если уменьшаемое будет равно вычитаемому, т. е.  $a = b$ , получим в разности нуль:

$$a - b = 0.$$

Случай, когда вычитаемое больше уменьшаемого, т. е. когда  $a < b$ , с арифметической точки зрения не имеет смысла. Например, из 7 вычесть 10 нельзя.

Действительно: вычитание есть действие, в котором по сумме и одному из слагаемых ищется другое слагаемое. Но нет такого числа, которое, будучи прибавлено к 10, дало бы в сумме 7.

Введение относительных чисел позволяет обобщить действие вычитания и на этот случай.

Разберем такую задачу: термометр показывал в полдень  $a^\circ$ . Через некоторый промежуток времени он стал показывать  $b^\circ$ . На сколько понизилась температура? По смыслу задачи следует из  $a$  вычесть  $b$ , т. е. искать разность  $a - b$ . Но термометр мог сначала показать  $7^\circ$ , а позднее  $10^\circ$ ; следовательно, требуется узнать, чему равна разность:

$$7 - 10.$$

Фактически температура *повысилась* на  $3^{\circ}$ ; следовательно, отвечая на вопрос, поставленный в задаче, мы должны были бы сказать, что температура *понижилась* на  $-3^{\circ}$  или

$$7 - 10 = -3.$$

Этот результат находится в полном соответствии с определением вычитания, потому что в данном случае вычитаемое в сумме с разностью дает:

$$10 + (-3) = 10 - 3 = 7,$$

т. е. уменьшаемое.

Таким образом, *разность при вычитании большего числа из меньшего равна избытку большего числа над меньшим, взятому со знаком минус.*

Так как в разности  $a - b$  под  $a$  и  $b$  можно подразумевать относительные числа, то следует различать 4 случая:

- 1)  $(+a) - (+b)$ ;
- 2)  $(+a) - (-b)$ ;
- 3)  $(-a) - (+b)$ ;
- 4)  $(-a) - (-b)$ ;

Разберем их по порядку:

1. В 12 часов дня термометр показывал (черт. 6)  $9^{\circ}$  тепла, а в 6 часов вечера  $7^{\circ}$  тепла. На сколько понизилась температура? Ясно, что:

$$(+9^{\circ}) - (+7^{\circ}) = (+2^{\circ}).$$

Этот случай соответствует обычному арифметическому вычитанию абсолютных чисел:

$$9 - 7 = 2.$$

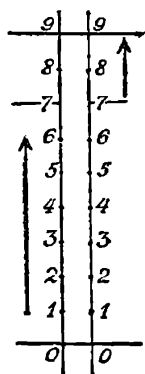
2. В двух коробках находилось по одинаковому количеству папирос. В первую положили еще 25 штук, а из второй вынули 15 штук. На сколько в первой коробке папирос больше, чем во второй?

Прибавку папирос в первой коробке отмечаем записью:  $(+25)$ . Недостаток папирос во второй коробке отмечаем записью:  $(-15)$ . По смыслу вопроса надо определить, чему равна разность:

$$(+25) - (-15).$$

Но в первой коробке папирос теперь больше, чем во второй, на

$$(+25) + (+15) = 25 + 15;$$

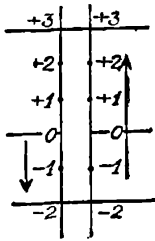


Черт. 6.

следовательно

$$\{+25\} - \{-15\} = 25 + 15.$$

3. В 7 часов утра термометр показывал  $2^\circ$  мороза (черт. 7), а в 2 часа дня  $3^\circ$  тепла. На сколько понизилась температура?



Черт. 7.

Разность показаний термометра:

$$(-2^\circ) - (+3^\circ).$$

В 7 часов утра столбик ртути стоял на уровне второго деления *ниже* нуля, а в 2 часа дня на уровне третьего деления *выше* нуля, т. е. температура *повысилась* на  $5^\circ$ , или, что то же, *понизилась* (как спрашивается в задаче) на  $-5^\circ$ ; следовательно,

$$(-2^\circ) - (+3^\circ) = -5^\circ.$$

Если бы спросили, на сколько повысилась температура, пришлось бы из второго показания термометра вычесть первое:

$$(+3^\circ) - (-2^\circ) = (+5^\circ),$$

что соответствовало бы предыдущему случаю, когда уменьшаемое положительно, а вычитаемое отрицательно.

4. Моторная лодка прошла  $p$  м вправо от пристани. Проплыв от этого места еще на некоторое расстояние  $x$  м, лодка стала в  $q$  м вправо от пристани. Сколько метров она прошла и в каком направлении?

Задача сводится к отысканию значения разности  $q - p$ , т. е.  $x = q - p$ , где  $q$  и  $p$  числа относительные. Поэтому, разберем случай, когда

$$p = -80 \text{ м; } q = -120 \text{ м.}$$

Эти значения показывают, что лодка фактически прошла *влево* от пристани  $O$  на 80 м до точки  $P$  (черт. 8), а затем оказалась *левее* пристани на 120 м в точке  $Q$ . Но чтобы попасть из точки  $P$



Черт. 8.

в точку  $Q$ , лодка должна пройти 40 м *влево*; следовательно,

$$x = -40.$$

Таким образом:

$$-120 - (-80) = -120 + 80 = -40.$$

В примере (2) мы имели:

$$(+25) - (-15) = +40$$

В примере (3):

$$(-2) - (+3) = -5,$$

т. е. при разных знаках членов разности эта последняя имеет всегда знак уменьшаемого.

При одинаковых знаках членов разности надо различать два случая: 1) члены разности положительны; в 1-м примере мы имели:  $(+9) - (+7) = +2$ ; 2) члены разности отрицательны; в 4-м примере мы нашли:  $(-120) - (-80) = -40$ .

В случаях, когда уменьшаемое и вычитаемое имеют одинаковые знаки, разность может иметь тот или другой знак в зависимости от абсолютного значения членов разности, именно: *разность положительна, когда или уменьшаемое (при положительных знаках) или вычитаемое (при отрицательных знаках) имеет наибольшее абсолютное значение.* Например:

$$\begin{aligned} (+7) - (-5) &= +2; \\ (-5) - (-7) &= +2. \end{aligned}$$

*Разность отрицательна, когда или вычитаемое (при положительных знаках) или уменьшаемое (при отрицательных знаках) имеет наибольшее абсолютное значение.* Например:

$$\begin{aligned} (+5) - (+7) &= -2; \\ (-7) - (-5) &= -2. \end{aligned}$$

Замечание о знаке неравенства.

Когда два числа неравны, то для обозначения неравенства пользуются знаком  $>$ , который обращен своим раствором в сторону большего числа, например:

$$5 > 3;$$

читается: „пять больше трех“.

Если бы надо было с помощью этого знака написать: „три меньше пяти“, пишут:

$$3 < 5.$$

Вообще, вместо „ $a$  больше  $b$ “ пишут:

$$a > b;$$

вместо „ $a$  меньше  $b$ “ пишут:

$$a < b.$$

Нуль как относительное число.

Всякое положительное число больше нуля:

$$(+a) > 0.$$

Всякое отрицательное число меньше нуля:

$$(-a) < 0.$$

Первое утверждение очевидно, второе же требует пояснения.

Дело в том, что положительное число, например  $(+3)$ , получается в результате *прямого* отсчета от нуля; отрицательное же число, например  $(-3)$ , получается при *обратном* отсчете; следовательно, чтобы получить нуль, надо к числу  $(-3)$  прибавить прямым отсчетом положительное число  $(+3)$ , т. е.

$$(-3) + (+3) = 0.^1$$

Иначе говоря, число  $(-3)$  меньше нуля на три единицы. Отсюда следует, что *из двух отрицательных чисел большим считается то, у которого абсолютная величина меньше*. Действительно, возьмем два отрицательных числа  $(-2)$  и  $(-4)$ . На основании только что сказанного:

$$(-2) + (+2) = 0$$

и

$$(-4) + (+4) = 0,$$

т. е. к числу  $(-4)$  надо присчитать прямым отсчетом четыре единицы, чтобы получить нуль, а к числу  $(-2)$  только две; поэтому:

$$(-2) > (-4)$$

и вообще, если  $a > b$ , то

$$(-a) < (-b).$$

Когда отсчет ведется от нуля, его можно и не писать, например:

$$0 - (+3) = (-3);$$

$$0 - (-3) = (+3).$$

**Упражнения. 23.** Пароход прошел от пристани по течению 18 км, а потом 24 км против течения. Во скольких километрах он находится от пристани, считая по течению и против течения?

**24.** Предприятие дало за первый год  $a$  руб. прибыли, за второй  $b$  руб. прибыли. На сколько рублей прибыль второго года превышает прибыль первого? Объяснить смысл вопроса при:

$$a = \left| \begin{array}{ccc|ccc} +400 & -200 & -100 & +500 & & \\ \hline +300 & +400 & -200 & -300 & & \end{array} \right|$$

<sup>1</sup> Например, если тело имеет температуру  $(-3^\circ)$ , его следует нагреть на  $(+3^\circ)$ , чтобы температура его достигла  $0^\circ$ .