И.Ф. Шарыгин, С.В. Конякин, Г.А. Тоноян

Зарубежные математические олимпиады

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 51
ББК 22.1
И11

И.Ф. Шарыгин
И11 Зарубежные математические олимпиады / И.Ф. Шарыгин, С.В. Конякин, Г.А. Тоноян – М.: Книга по Требованию, 2021. – 416 с.

ISBN 978-5-458-36749-3

Библиотечка математического кружка. Выпуск 17. Книгу можно рассматривать как продолжение серии "Задачи и олимпиады", начатой издательством "Мир" в 1975 г.В сборнике представлены наиболее интересные задачи национальных олимпиад 19 стран и ряда международных соревнований. Они разбиты на 7 глав по тематическому признаку. Все задачи (а их более 500) снабжены решениями.Для учащихся старших классов, учителей, проводящих различные математические конкурсы, а также для всех любителей математики. Под редакцией И.Н. Сергеева.Коллектив авторов: С.В. Конягин, Г.А. Тоноян, И.Ф. Шарыгин, И.А. Копылов, М.Б. Севрюк, М.Л. Ситников, О.А. Байбородин, В.П. Буриченко, Г.В. Головин, Д.О. Орлов, Л.Б. Парновский, Т.А. Сокова, И. В. Стеценко, В.В. Титенко, С.А. Филиппов.

ISBN 978-5-458-36749-3

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2021
© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2021

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

Серия Книжный Ренессанс
www.samizday.ru/reprint

ПРЕДИСЛОВИЕ

В целях популяризации математики среди учащихся средних учебных заведений во многих странах регулярно проводятся математические олимпиады школьников. Олимпиады в целом доказали свою эффективность в пропаганде математических знаний среди молодежи. Кроме того, проведение международных олимпиад является одной из форм сотрудничества ученых разных стран. Поэтому олимпиадное движение в настоящее время получило очень большое развитие во всем мире.

С каждым годом растет число стран, которые проводят национальные олимпиады, а с 1959 г. проводятся и международные математические олимпиады. Количество участвующих в них стран увеличилось с 5—7 на первых олимпиадах до 30 и более в настоящее время. За последнее десятилетие получили распространение различные региональные международные математические соревнования школьников. Математические олимпиады проводятся и различными учебными заведениями, а также некоторыми математическими журналами.

В нашей стране сложились богатые традиции как в проведении школьных олимпиад разного уровня, так и в обеспечении их соответствующей литературой. Представители СССР, как правило, успешно выступают на международных математических олимпиадах.

В связи с быстрым накоплением опыта проведения национальных олимпиад и постоянным ростом числа стран, участвующих в международных олимпиадах, все более актуальной становится задача широкого ознакомления интересующихся математикой советских школьников с лучшими достижениями олимпиадного движения за рубежом. В 1976 г. был выпущен сборник венгерских математических олимпиад [1][1]), в 1978 г.— польских математических олимпиад [2]. Задачи некоторых национальных олимпиад

[1]) Здесь и далее указаны ссылки на литературу из приложения Д.

(10 стран) и небольшая часть материалов жюри международных математических олимпиад опубликованы в 1976 г. в сборнике международных математических олимпиад [3].

Зарубежным математическим соревнованиям школьников посвящена и настоящая книга, в которую вошли наиболее интересные (по мнению авторов) или наиболее типичные задачи различных олимпиад. Книга отличается большим числом представленных задач. В ней использованы задачи национальных олимпиад 19 стран, а также материалы жюри международных математических олимпиад 1976—1977, 1979, 1981—1983 гг., задачи международных соревнований в Люксембурге и Финляндии, олимпиады стран Балканского полуострова (так называемой Балканиады) 1984 г., традиционных олимпиад «Австрия—Польша». Очень широко представлены материалы олимпиад Болгарии, Великобритании, Румынии, США, ЧССР и Югославии. Включены задачи венгерских и польских олимпиад последних лет, не вошедшие в сборники [1] и [2]. Большинство представленных в книге задач относится к последним турам соответствующих национальных олимпиад. Некоторые из задач сначала предлагались на олимпиадах нашей страны и только после этого были использованы в зарубежных математических соревнованиях.

Сборник адресован прежде всего интересующимся математикой старшеклассникам, и его основной целью является повышение математической культуры школьников. Большинство задач в книге не слишком сложны, но в совокупности они представляют почти все основные идеи, встречавшиеся в олимпиадной практике. Поэтому авторы надеются, что школьник, не имеющий достаточного опыта участия в олимпиадах, ознакомится со сборником с большой пользой для себя. Более подготовленный читатель испытает значительное удовольствие при решении более сложных задач (нескольких последних задач каждого параграфа, отмеченных звездочками), а также получит довольно полное представление об олимпиадном движении за рубежом. Особый интерес могут вызвать задачи из тех разделов математики, которые недостаточно полно представлены или вовсе отсутствуют в программе общеобразовательных школ нашей страны.

Материал книги может быть использован для занятий математических кружков или специализированных физико-математических школ.

Все задачи снабжены решениями; некоторые из них представляют собой перевод на русский язык решений, опубликованных организаторами соответствующих олимпиад, а другие (особенно решения геометрических задач) написаны авторами заново. Однако, книга рассчитана прежде всего на активного читателя. Лучший способ глубоко разобраться в той или иной математической идее — это решить задачу, в которой используется эта идея, или по крайней мере прочесть ее решение только после достаточно настойчивых попыток справиться с задачей самостоятельно. При этом читателю придется восстанавливать недостающие детали в тех решениях, которые написаны недостаточно подробно.

Внутри каждого параграфа авторы старались по мере возможности располагать задачи так, чтобы близкие по своей тематике задачи находились рядом. Поэтому при решении какой-либо задачи желательно обращать внимание и на ее окружение, где часто в несколько иной ситуации представлена та же идея.

При отборе задач авторы стремились в значительно большей степени помочь читателю овладеть часто встречающимися приемами решения нестандартных задач и выработать у него необходимую дисциплину мышления, нежели сообщить новые математические факты. Тем не менее в ряде задач используются сведения, несколько выходящие за рамки школьной программы. Эти сведения собраны в приложении Г.

Для работы над настоящим сборником весной 1984 г. на механико-математическом факультете Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова был создан специальный студенческий научный отряд «Олимпия» в составе 13 человек. Командиром этого отряда был ассистент механико-математического факультета МГУ С. В. Конягин, комиссаром — аспирант И. А. Копылов. В отряд входили аспиранты механико-математического факультета М. Б. Севрюк и М. Л. Ситников, студенты О. А. Байбородин, В. П. Буриченко, Г. В. Головин, Д. О. Орлов, Л. Б. Парновский, Т. А. Сокова, И. В. Стеценко и В. В. Титенко. Летом 1984 г. в отряде работал также десятиклассник из школы № 14 г. Белорецка (Башкирская АССР) С. А. Филиппов. Кроме бойцов отряда «Олимпия», авторами сборника являются заведующий кафедрой Ереванского государственного университета Г. А. Тоноян и старший научный сотрудник НИИ СиМО[1]) АПН СССР И. Ф. Шарыгин.

[1]) Содержания и методов обучения.

Почетным бойцом отряда «Олимпия» состоял выдающийся советский математик академик А. Н. Колмогоров, уделяющий большое внимание работе со школьниками.

Летом 1984 г. отряд «Олимпия» работал в здании ФМШ № 18 при МГУ, и авторы искренне признательны И. Т. Тропину, который в то время являлся директором этого интерната. Авторы выражают сердечную благодарность старшему научному сотруднику механико-математического факультета МГУ, заместителю главного редактора журнала «Квант» Ю. П. Соловьеву за большое участие в организации отряда и постоянный интерес к работе над книгой.

Тексты задач национальных и других зарубежных олимпиад (на языках соответствующих стран) авторам предоставили старший научный сотрудник НИИ СиМО А. М. Абрамов, член редколлегии журнала «Квант» Н. Б. Васильев, доцент механико-математического факультета МГУ Е. А. Морозова, член редколлегии журнала «Математика в школе» И. С. Петраков, младший научный сотрудник ВНИИ геофизики В. В. Прасолов, югославский математик Д. Реповш, доцент МФТИ, член редколлегии журнала «Квант» А. П. Савин, старший научный сотрудник Института математики АН НРБ И. Табов, доцент МГПИ А. А. Фомин. Аспирант механико-математического факультета МГУ И. В. Мустяца оказал помощь «Олимпии» в переводе задач с румынского языка, а студенты Н. Н. Осипов и Т. Фиммель (ГДР) — с французского и немецкого.

Ценные замечания, способствовавшие улучшению рукописи, были внесены редактором книги А. Ф. Лапко и рецензентами А. М. Абрамовым и доцентом механико-математического факультета МГУ Ю. В. Нестеренко. Всем названным товарищам авторы выражают большую признательность.

Авторы глубоко благодарны титульному редактору сборника ассистенту механико-математического факультета МГУ И. Н. Сергееву за огромную работу по совершенствованию рукописи.

СТРУКТУРА КНИГИ

Сборник состоит из трех частей.

В первой части приведены условия задач. Она состоит из семи глав, а каждая глава—из нескольких параграфов. Разбиение на главы и параграфы проводилось по тематическому принципу. Оно достаточно условно, поскольку некоторые задачи с равным успехом могли быть помещены в несколько параграфов книги.

В начале каждого параграфа даются ссылки на те из сведений (помещенных в приложении Г), которые использованы в условиях и решениях задач данного параграфа.

После номера каждой задачи указано, в каких известных авторам зарубежных олимпиадах она предлагалась. Номера более трудных задач отмечены звездочками. Большинство задач книги предлагались на национальных олимпиадах, ссылки на которые состоят из названия страны, проводившей олимпиаду, и года ее проведения. «Пекин» означает ссылку на Пекинскую олимпиаду, а «Нью-Йорк»—на издававшийся в Нью-Йорке журнал для учащихся двухлетних колледжей. Задачи международных соревнований обозначаются следующим образом: «Австрия—ПНР»—совместные соревнования школьников Австрии и Польши, «Балканиада»—соревнования учащихся Балканских стран, «ММС»—международные математические соревнования 1980 г. Наконец, ссылка на материалы жюри международных математических олимпиад начинается словом «Жюри», далее указана страна, предложившая задачу, и год ее обсуждения. К сожалению, авторам неизвестно, какие страны предлагали задачи на международную олимпиаду 1981 г.

Во второй части приводятся решения задач первой части книги. Третья часть содержит различные приложения.

Условия некоторых помещенных в книге задач отличаются от оригинальных. Эти изменения, за которые авторы несут полную ответственность, отражены в приложении А.

В приложении Б даны краткие сведения о зарубежных математических соревнованиях школьников, а также условия задач тех олимпиад 1985—1986 г., которые оказались в распоряжении авторов. Решения этих задач не приводятся, читателям предлагается решить их самостоятельно. В приложении В указаны основные книги и журналы, использованные авторами при составлении настоящего сборника. В приложении Г перечислены основные понятия и факты, необходимые для правильного восприятия материала первой и второй частей.

Для более серьезного изучения соответствующих разделов математики читателю предложена литература, приведенная в приложении Д. Наконец, приложение Е содержит список используемых в книге обозначений.

ЗАДАЧИ

Глава 1

АРИФМЕТИКА

§ 1. Делимость. Простые и составные числа

(см. Приложение Г: определения 11—16, 19; теоремы 1, 4, 9—12, 14, 18, 19, 21, 23, 25)

1.1. (Англия, 68). Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_7$ — целые числа, а $b_1, b_2, \ldots, b_7$ — те же самые числа, взятые в другом порядке. Доказать, что число

$$(a_1-b_1)(a_2-b_2)\ldots(a_7-b_7)$$

является четным.

1.2. (Нью-Йорк, 76). Пусть $a, a_0, a_1, \ldots, a_n$ — произвольные целые числа. Верно ли, что целое число

$$\sum_{k=0}^{n}(a^2+1)^{3k}a_k$$

делится на a^2+a+1 (или на a^2-a+1) тогда и только тогда, когда число

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k$$

делится на a^2+a+1 (или соответственно на a^2-a+1)?

1.3. (ЧССР, 52; Англия, 65). В бесконечной «треугольной» таблице

$$\begin{array}{c}
a_{1,0}\\
a_{2,-1}\ a_{2,0}\ a_{2,1}\\
a_{3,-2}\ a_{3,-1}\ a_{3,0}\ a_{3,1}\ a_{3,2}\\
a_{4,-3}\ a_{4,-2}\ a_{4,-1}\ a_{4,0}\ a_{4,1}\ a_{4,2}\ a_{4,3}\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}$$

$a_{1,0}=1$, а каждое число $a_{n,k}$, стоящее в n-й строке ($n\in\mathbf{N}$, $n>1$) на k-м месте ($k\in\mathbf{Z}$, $|k|<n$), равно сумме

$a_{n-1,\,k-1}+a_{n-1,\,k}+a_{n-1,\,k+1}$ трех чисел предыдущей строки (если какое-либо из этих чисел отсутствует в таблице, то в сумме оно заменяется нулем). Доказать, что в каждой строке, начиная с третьей, содержится хотя бы одно четное число.

1.4. (ЧССР, 71). Доказать, что для любого простого числа $p>2$ числитель m дроби

$$\frac{m}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{p-1} \qquad (m,\, n\in \mathbf{N})$$

делится на p.

1.5. (Нью-Йорк, 75). Доказать, что для каждого целого значения $n>1$ число n^n-n^2+n-1 делится на $(n-1)^2$.

1.6. (НРБ, 65). Доказать, что только одна тройка натуральных чисел, больших единицы, обладает тем свойством, что произведение любых двух из этих чисел, увеличенное на 1, делится на третье.

1.7. (Англия, 76). Доказать, что при любом значении $n\in \mathbf{Z}^+$ число $19\cdot 8^n+17$ является составным.

1.8. (Канада, 83). Доказать, что для любого простого числа p существует бесконечно много чисел вида 2^n-n (где $n\in \mathbf{N}$), делящихся на p.

1.9. (ЧССР, 73). Доказать, что существует бесконечно много значений $n\in \mathbf{N}$, для которых любое число вида m^4+n $(m\in \mathbf{N})$ является составным.

1.10. (ЧССР, 79). Найти все натуральные числа $n>2$, не превосходящие числа 10 000 000 и обладающие следующим свойством: любое число m, взаимно простое с n и удовлетворяющее неравенствам $1<m<n$, является простым.

1.11. (ФРГ, 77). Пусть $a>1$ — натуральное число. Найти все числа, являющиеся делителями хотя бы одного из чисел

$$a_n=\sum_{k=0}^{n} a^k, \qquad n\in \mathbf{N}.$$

1.12. (Нью-Йорк, 74). Для заданной пары натуральных чисел $m<n$ определить, любое ли множество из n последовательных целых чисел содержит два различных числа, произведение которых делится на mn.

1.13. (Нью-Йорк, 76). Пусть $f(n)\in \mathbf{N}$ — наименьшее число, для которого сумма $\sum\limits_{k=1}^{f(n)} k$ делится на n. Доказать, что равенство $f(n)=2n-1$ справедливо для чисел вида $n=2^m$ $(m\in \mathbf{Z}^+)$ и только для них.

1.14. (Жюри, ФРГ, 79; НРБ, 81). Доказать, что если число $1+2^n+4^n$ при некотором значении $n \in \mathbf{N}$ является простым, то $n=3^k$, где $k \in \mathbf{Z}^+$.

1.15. (СРР, 78). Пусть числа m, $n \in \mathbf{N}$ таковы, что для любого значения $k \in \mathbf{N}$ наибольшие общие делители пары чисел $11k-1$, m и пары чисел $11k-1$, n совпадают. Доказать, что для некоторого значения $l \in \mathbf{Z}$ справедливо равенство $m=11^l n$.

1.16. (Нью-Йорк, 75). Пусть наибольший общий делитель чисел a, b, c, $d \in \mathbf{Z}$ равен 1. Верно ли, что любой простой делитель числа $ad-bc$ является делителем чисел a и c тогда и только тогда, когда при каждом значении $n \in \mathbf{Z}$ числа $an+b$ и $cn+d$ взаимно просты?

1.17*. (США, 82). Доказать, что существует такое число $k \in \mathbf{N}$, что при любом значении $n \in \mathbf{N}$ число $k \cdot 2^n+1$ является составным.

1.18*. (СРР, 78). Доказать, что для любого значения $a \in \mathbf{N}$, большего 2, существует бесконечно много чисел $n \in \mathbf{N}$ таких, что число a^n-1 делится на n. Верно ли аналогичное утверждение для $a=2$?

1.19. (Жюри, Бельгия, 83). Доказать, что существует бесконечно много чисел $n \in \mathbf{N}$, удовлетворяющих для всех значений $k=1, 2, \ldots, n-1$ неравенствам

$$\frac{\sigma(n)}{n} > \frac{\sigma(k)}{k},$$

где через $\sigma(n)$ обозначена сумма всех делителей числа n.

1.20*. (ВНР, 82). Для заданного натурального числа $k>1$ через $Q(n)$, $n \in \mathbf{N}$, обозначено наименьшее общее кратное чисел $n, n+1, \ldots, n+k$. Доказать, что существует бесконечно много значений $n \in \mathbf{N}$, удовлетворяющих неравенству $Q(n) > Q(n+1)$.

1.21*. (Австрия, 73). Доказать, что для любого значения $n \in \mathbf{N}$ справедливы неравенства

$$0 < \sum_{k=1}^{n} \frac{g(k)}{k} - \frac{2n}{3} < \frac{2}{3},$$

где через $g(k)$ обозначен наибольший нечетный делитель числа k.

1.22*. (Жюри, СФРЮ, 79). Пусть через $h(n)$ обозначен наибольший простой делитель числа $n \in \mathbf{N}$ ($n \geqslant 2$). Является ли бесконечным множество значений n, удовлетворяющих условию

$$h(n) < h(n+1) < h(n+2)?$$

1.23*. (Жюри, СФРЮ, 79). Пусть через $w(n)$ обозначено количество простых делителей натурального числа $n>1$. Доказать, что для бесконечного множества значений n выполняются неравенства

$$w(n)<w(n+1)<w(n+2).$$

§ 2. Уравнения в целых и рациональных числах

(см. Приложение Г: определения 11, 12, 14—16; теоремы 2, 4, 5, 8, 10, 12, 16, 18, 21—23, 25, 60, 61)

2.1. (Нью-Йорк, 77). Решить уравнение $2^x+1=y^2$ в натуральных числах.

2.2. (Англия, 72). Доказать, что для любых значений a, b, c, $d\in\mathbf{Z}$, $a\neq b$, уравнение

$$(x+ay+c)(x+by+d)=2$$

в целых числах имеет не более четырех решений. Определить, при каких значениях a, b, c, d имеется ровно четыре различных решения.

2.3. (ГДР, 73). Решить уравнение

$$x(x+1)(x+7)(x+8)=y^2$$

в целых числах.

2.4. (СРР, 81). Решить уравнение

$$x^6+3x^3+1=y^4$$

в целых числах.

2.5. (СФРЮ, 74). Решить уравнение

$$x^2+xy+y^2=x^2y^2$$

в целых числах.

2.6. (ГДР, 74). Решить уравнение

$$(x+2)^4-x^4=y^3$$

в целых числах.

2.7. (США, 79). Решить уравнение

$$x_1^4+x_2^4+\ldots+x_{14}^4=1599$$

в целых числах.

2.8. (ГДР, 70; СРР, 80). Доказать, что для любых нечетных значений a, b, $c\in\mathbf{Z}$ уравнение $ax^2+bx+c=0$ в рациональных числах не имеет решений.

2.9. (Англия, 70). Решить уравнение

$$\sqrt{2\sqrt{3}-3}=\sqrt{x\sqrt{3}}-\sqrt{y\sqrt{3}}$$

в рациональных числах.