

**А. Анго**

# **Математика для электро- и радиоинженеров**

**Москва  
«Книга по Требованию»**

А11 **А. Анго**  
Математика для электро- и радиоинженеров / А. Анго – М.: Книга по Требованию, 2023. – 780 с.

**ISBN 978-5-458-25468-7**

Книга Андре Анго, перевод которой предлагается вниманию читателей, содержит дополнительные главы к общему втузовскому курсу высшей математики. Автору удалось в четкой и компактной форме изложить широкий круг вопросов математики, знание которых в настоящее время необходимо всякому образованному электро- и радиоинженеру. Предисловие Луи де Бройля, введение автора и подробное оглавление позволяют читателю получить полное представление о содержании книги. Книга выдержала во Франции три издания (1949, 1952, 1957 гг.). Она написана живым языком, причем центр тяжести изложения перенесен со строгих доказательств на наглядность, физический смысл и практические приложения. Отдельные главы книги не очень тесно связаны между собой, так что их можно читать независимо друг от друга. Большое количество формул, таблиц и графиков делает книгу ценным справочным пособием. В книге рассматривается много интересных приложений, главным образом из области электро- и радиотехники. Все электротехнические формулы написаны в рационализированной системе единиц МКСА (в международной системе СИ). В этой же системе единиц выполняются численные расчеты. При изложении численных методов автор ограничился главным образом приемами, которые могут быть выполнены с помощью ручной счетной машины и набора таблиц. Он не рассматривает специальных приемов, связанных с применением электронных вычислительных машин, полагая, что это относится к компетенции специалистов-программистов. При переводе исправлены все замеченные ошибки или описки оригинала, сделаны некоторые сокращения и добавления. В тех случаях, где это представлялось удобным, редакторские вставки вынесены в подстрочные примечания. Однако большая часть этих дополнений, органически слитых с авторским текстом, нигде специально не отмечена. Списки литературы, приводимые в конце каждой главы, изменены. Опущены устаревшие, труднодоступные работы и добавлены издания, легкодоступные советскому читателю. Перевод книги с третьего французского издания выполнен Е. М. Шифриной. Редактировали перевод: гл. I, II, III, VI, VII А. Я. Перельман, К. С. Шифрин; гл. IV Ю. А. Седов, К. С. Шифрин; гл. V Л. Б. Комаров, К. С. Шифрин; гл. VIII И. А. Назаров; гл. IX Л. Б. Комаров; гл. X М. К. Гавурин. Общая редакция перевода выполнена К. С. Шифриным. Мы надеемся, что содержательная книга А. Анго будет интересна не только электро- и радиоинженерам, но и широкому кругу инженерно-технических и научных работников, имеющих дело с математикой и ее многочисленными приложениями, а также студентам и аспирантам втузов.

**ISBN 978-5-458-25468-7**

© Издание на русском языке, оформление  
«YOYO Media», 2023  
© Издание на русском языке, оцифровка,  
«Книга по Требованию», 2023

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первоизданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.



## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие к русскому изданию . . . . .	20
Предисловие Луи де Бройля . . . . .	21
Введение . . . . .	23
<b>Глава I. Функции комплексной переменной . . . . .</b>	<b>24</b>
1.1. Комплексные величины . . . . .	24
1.1.1. Определения . . . . .	24
1.1.2. Сложение . . . . .	25
1.1.3. Умножение . . . . .	25
1.1.4. Замена обозначений . . . . .	26
1.1.5. Сопряженные комплексные числа . . . . .	27
1.1.6. Степень комплексного числа . . . . .	27
1.1.7. Корни из комплексного числа . . . . .	28
1.1.8. Корни из единицы . . . . .	28
1.1.9. Ряды с комплексными членами . . . . .	29
1.1.10. Степенные ряды . . . . .	29
1.1.11. Экспоненциальная функция и логарифм . . . . .	30
1.1.12. Дифференцирование и интегрирование по аргументу . . . . .	31
1.1.13. Суммирование тригонометрических функций, аргументы которых составляют арифметическую прогрессию . . . . .	31
1.2. Применение комплексных величин при расчете электрических цепей в синусоидальном режиме . . . . .	31
1.2.1. Введение . . . . .	31
1.2.2. Графическое изображение синусоидальной функции . . . . .	32
1.2.3. Представление с помощью комплексных чисел . . . . .	33
1.2.4. Ограничения метода . . . . .	34
1.2.5. Понятие комплексного полного сопротивления . . . . .	35
1.2.6. Комплексное полное сопротивление при последовательном и па- раллельном соединении . . . . .	36
1.2.7. Законы Кирхгофа . . . . .	37
1.2.8. Обобщение понятия комплексного полного сопротивления . . . . .	38
1.2.9. Комплексный вектор . . . . .	41
1.3. Понятие о функции комплексной переменной . . . . .	42
1.3.1. Непрерывность . . . . .	42
1.3.2. Однозначные функции . . . . .	42
1.3.3. Аналитическая функция . . . . .	43
1.3.4. Голоморфная функция . . . . .	44
1.3.5. Криволинейный интеграл от функции комплексной переменной . . . . .	44
1.3.6. Теорема Коши . . . . .	45
1.3.7. Формула Коши . . . . .	46
1.3.8. Ряд Тейлора . . . . .	47
1.3.9. Особые точки . . . . .	48
1.3.10. Разложение в ряд Лорана . . . . .	48
Интегрирование по методу вычетов . . . . .	50
1.3.11. Теорема о вычетах . . . . .	50
1.3.12. Вычисление вычетов . . . . .	50

1.3.13. Вычисление вычетов относительно кратных полюсов с помощью производных . . . . .	52
1.3.14. Лемма Жордана . . . . .	53
1.3.15. Применение леммы Жордана к единичной функции . . . . .	54
1.3.16. Интегрирование при наличии точки разветвления . . . . .	55
1.3.17. Контур Бромвича . . . . .	56
1.3.18. Интеграл Бромвича — Вагнера . . . . .	57
1.3.19. Эквивалентный контур . . . . .	57
1.3.20. Теорема о числе полюсов и числе нулей . . . . .	60
Применение теоремы о вычетах к вычислению некоторых определенных интегралов . . . . .	61
1.3.21. Интегралы вида $\int_0^{2\pi} f(\cos \theta, \sin \theta) d\theta$ . . . . .	61
1.3.22. Интегралы вида $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ . . . . .	62
1.3.23. Интегралы вида $\int_0^{\infty} f(x) \cos mx dx, \int_0^{\infty} f(x) \sin mx dx$ . . . . .	63
1.3.24. Интегралы вида $\int_0^{\infty} x^z f(x) dx$ . . . . .	64
1.3.25. Применение теоремы о вычетах к суммированию некоторых рядов . . . . .	65
1.4. Конформные отображения . . . . .	66
1.4.1. Определение . . . . .	66
1.4.2. Несколько примеров конформных отображений . . . . .	71
1.4.3. Последовательные отображения . . . . .	76
1.4.4. Отображение Шварца . . . . .	77
1.4.5. Различные применения конформных отображений . . . . .	83
Литература к главе I . . . . .	84
<b>Глава II. Ряд Фурье. Интеграл Фурье . . . . .</b>	<b>85</b>
2.1. Ряд Фурье . . . . .	85
2.1.0. Введение . . . . .	85
2.1.1. Вычисление коэффициентов . . . . .	85
2.1.2. Разложение в ряд по ортогональным функциям . . . . .	86
2.1.3. Частные случаи . . . . .	87
2.1.4. Интегрирование и дифференцирование . . . . .	88
2.1.5. Случай, когда разложение в ряд Фурье ограничено первыми $n$ членами . . . . .	90
2.1.6. Изучение разложения в ряд Фурье вблизи точки разрыва. Явление Гиббса . . . . .	91
2.1.7. Случай произвольного промежутка . . . . .	93
2.1.8. Ряды с комплексными членами . . . . .	94
2.1.9. Графическое представление. Спектр . . . . .	94
2.1.10. Среднее значение произведения двух функций одного периода, разложимых в ряд Фурье . . . . .	96
2.1.11. Распространение ряда Фурье на почти периодические функции . . . . .	97
2.2. Интеграл Фурье . . . . .	98
2.2.1. Вещественная форма интеграла Фурье . . . . .	98
2.2.2. Комплексная форма интеграла Фурье . . . . .	100
2.2.3. Применение к электрическим цепям . . . . .	102
2.2.4. Случай незатухающей цепи . . . . .	104
2.2.5. Спектр частот . . . . .	105
2.2.6. Единичная функция Хевисайда . . . . .	109

2.2.7. Пары функций	109
2.2.8. Преобразование Фурье	110
2.2.9. Физическая реальность интеграла Фурье	113
2.2.10. Изучение диаграмм направленности	115
Литература к главе II	116
<b>Глава III. Векторное исчисление</b>	<b>117</b>
3.1. Скалярные величины. Векторные величины. Определения	117
Скалярные величины	117
3.1.1. Чистые скаляры	117
3.1.2. Псевдоскаляры	117
Векторные величины	117
3.1.3. Ось	117
3.1.4. Направление вращения	118
3.1.5. Прямые и обратные трехгранники	118
3.1.6. Векторы	118
3.1.7. Положительное направление трех векторов $a, b, c$	120
3.1.8. Угол между двумя векторами $a$ и $b$	120
Операции над векторами	120
3.1.9. Произведение вектора $a$ на скаляр $f$	120
3.1.10. Составляющие вектора	120
3.1.11. Сложение векторов	120
3.1.12. Скалярное произведение	121
3.1.13. Векторное произведение	122
3.1.14. Смешанное произведение трех векторов	123
3.1.15. Двойное векторное произведение трех векторов	124
3.2. Дифференциальные операции с векторами	124
Дифференцирование	124
3.2.1. Производная вектора. Производная точки	124
3.2.2. Производная вектора по другому вектору	125
3.2.3. Основные формулы дифференцирования	125
3.2.4. Интеграл от вектора	126
Функции точек	126
3.2.5. Градиент	127
3.2.6. Нормальная производная	127
3.2.7. Поверхности уровня	128
3.2.8. Смысл вектора $\text{grad } f$	128
3.2.9. Силовые линии	128
3.2.10. Градиент сложной скалярной функции	129
3.2.11. Дивергенция и вихрь	129
3.2.12. Оператор Лапласа	130
3.2.13. Символический вектор набла (оператор Гамильтона)	130
3.2.14. Наиболее употребительные формулы	132
3.2.15. Смысл вектора $\text{rot } a$	134
3.2.16. Скалярный потенциал	134
3.2.17. Частный случай: вектор проходит через фиксированную точку	136
3.2.18. Векторный потенциал	137
3.2.19. Общий случай векторного поля	139
3.3. Векторные интегралы	139
3.3.1. Циркуляция вектора	139
3.3.2. Поток вектора	140
Основные формулы	140
3.3.3. Теорема Остроградского	140
3.3.4. Смысл скаляра $\text{div } a$	142

## ОГЛАВЛЕНИЕ

3.3.5. Формула для градиента . . . . .	143
3.3.6. Формула для вихря . . . . .	143
3.3.7. Инвариантность градиента, дивергенции, вихря . . . . .	144
3.3.8. Формула Грина . . . . .	144
3.3.9. Формула Стокса . . . . .	145
Приложение векторного исчисления к теории электромагнитного поля	147
3.3.10. Электростатическое поле . . . . .	147
3.3.11. Магнитное поле постоянных токов . . . . .	149
3.3.12. Электромагнитное поле . . . . .	150
3.3.13. Закон Фарадея . . . . .	150
3.3.14. Закон Ампера . . . . .	150
3.3.15. Уравнения Максвелла . . . . .	151
3.3.16. Векторный потенциал магнитного поля, возбужденного током . . . . .	151
Системы ортогональных криволинейных координат . . . . .	153
3.4.1. Определение . . . . .	153
3.4.2. Дифференциальные операторы в ортогональных криволинейных координатах . . . . .	157
Важнейшие системы ортогональных криволинейных координат в пространстве . . . . .	158
3.4.3. Система цилиндрических координат . . . . .	158
3.4.4. Система сферических координат . . . . .	159
3.4.5. Система параболических цилиндрических координат . . . . .	160
3.4.6. Система параболических координат вращения (параболоидальные координаты) . . . . .	160
3.4.7. Система эллиптических цилиндрических координат . . . . .	161
3.4.8. Система вытянутых эллипсоидальных координат (вращения) . . . . .	162
3.4.9. Система сплюснутых эллипсоидальных координат (вращения) . . . . .	163
3.4.10. Система бицилиндрических координат . . . . .	164
3.4.11. Системы тороидальных и бисферических координат . . . . .	165
3.4.12. Система софокусных поверхностей второго порядка (система общих эллипсоидальных координат) . . . . .	167
3.4.13. Приложение к уравнениям Максвелла. Уравнения Максвелла в ортогональных криволинейных координатах . . . . .	168
Литература к главе III . . . . .	169
<b>V. Матричное исчисление . . . . .</b>	<b>170</b>
Алгебра матриц . . . . .	170
4.1.1. Плоское преобразование, понятие оператора . . . . .	170
4.1.2. Сумма двух операторов . . . . .	171
4.1.3. Произведение двух операторов . . . . .	171
4.1.4. Представление плоских преобразований с помощью матриц . . . . .	171
4.1.5. Произведение двух матриц . . . . .	172
4.1.6. Представление вектора посредством матрицы . . . . .	173
4.1.7. Обобщение на $n$ -мерное пространство . . . . .	173
4.1.8. Равенство двух матриц . . . . .	174
4.1.9. Сложение двух матриц . . . . .	174
4.1.10. Умножение матрицы на число . . . . .	174
4.1.11. Умножение матриц . . . . .	174
4.1.12. Симметричные матрицы . . . . .	176
4.1.13. Кососимметричные матрицы . . . . .	176
4.1.14. Диагональные матрицы . . . . .	177
4.1.15. Единичная матрица. Нулевая матрица . . . . .	177
4.1.16. Порядок, ранг матрицы . . . . .	177
4.1.17. Необходимые условия равенства нулю произведения двух матриц . . . . .	178
4.1.18. Транспонированная матрица . . . . .	179
4.1.19. Обратная матрица . . . . .	180
4.1.20. Применение матричного исчисления к решению системы линейных уравнений . . . . .	183
4.1.21. Преобразование системы координат . . . . .	185



4.1.22. Ортогональное преобразование . . . . .	186
4.1.23. Пример ортогональных преобразований. Поворот . . . . .	187
Обобщение на комплексное пространство . . . . .	187
4.1.24. Эрмитова матрица . . . . .	187
4.1.25. Эрмитово-сопряженная матрица . . . . .	187
4.1.26. Модуль и скалярное произведение в комплексном пространстве . . . . .	188
4.1.27. Ортогональное преобразование комплексного пространства (унитарное преобразование) . . . . .	189
4.1.28. Собственные значения, собственные векторы и характеристическое уравнение матрицы . . . . .	189
4.1.29. Свойства характеристического уравнения . . . . .	190
4.1.30. Матрица, отнесенная к собственным направлениям . . . . .	191
4.1.31. Условия коммутативности двух матриц . . . . .	192
4.1.32. Собственные значения и собственные направления эрмитовой матрицы . . . . .	192
Функции от матриц . . . . .	193
4.1.33. Степень матрицы . . . . .	193
4.1.34. Теорема Кели — Гамильтона . . . . .	194
4.1.35. Функции от матриц. Теорема Сильвестра . . . . .	194
4.1.36. Формула Бэкера . . . . .	196
4.1.37. Высокие степени матрицы . . . . .	198
4.1.38. Дробная степень матрицы . . . . .	198
4.1.39. Приближенное вычисление собственных значений матрицы . . . . .	199
4.1.40. Приближенное вычисление корней уравнения $n$ -й степени . . . . .	203
Дифференциальные операции над матрицами. Применение к решению дифференциальных уравнений . . . . .	205
4.1.41. Дифференцирование и интегрирование матрицы . . . . .	205
4.1.42. Решение системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка . . . . .	206
4.1.43. Система дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами . . . . .	207
4.1.44. Случай линейного дифференциального уравнения $n$ -го порядка . . . . .	209
4.2. Применение матричного исчисления. Изучение четырехполосников . . . . .	210
4.2.1. Определение . . . . .	210
4.2.2. Соединение четырехполосников по цепной схеме . . . . .	212
4.2.3. Параллельное соединение четырехполосников . . . . .	213
4.2.4. Последовательное соединение четырехполосников . . . . .	213
4.2.5. Последовательно-параллельное и параллельно-последовательное соединение четырехполосников . . . . .	214
4.2.6. Сопротивления холостого хода и короткого замыкания четырехполосника . . . . .	216
4.2.7. Пассивные четырехполосники . . . . .	216
4.2.8. Симметричные четырехполосники . . . . .	217
Примеры простых четырехполосников . . . . .	217
4.2.9. Четырехполосник с одним последовательным сопротивлением . . . . .	217
4.2.10. Четырехполосник с одним параллельным сопротивлением . . . . .	217
4.2.11. Г-образный четырехполосник . . . . .	218
4.2.12. Т-образный и П-образный четырехполосники . . . . .	218
4.2.13. Х-образный четырехполосник (решетчатый фильтр) . . . . .	219
4.2.14. Трансформатор . . . . .	220
4.2.15. Электронная лампа . . . . .	221
4.2.16. Повторное сопротивление четырехполосника . . . . .	224
4.2.17. Случай пассивного четырехполосника . . . . .	225
4.2.18. Цепные фильтры . . . . .	226
4.2.19. Полоса пропускания четырехполосника . . . . .	228
4.2.20. Расчет свободных колебаний цепи . . . . .	229
4.2.21. Контур с периодически меняющимися параметрами . . . . .	232
4.2.22. Матрицы в квантовой механике . . . . .	235
Литература к главе IV . . . . .	237

<b>Глава V. Тензорное исчисление. Приложения</b>	<b>238</b>
5.1. Тензорная алгебра	238
Аффинное векторное пространство. Метрическое пространство	238
5.1.1. Определения	238
5.1.2. Преобразование координат	239
5.1.3. Ковариантные и контравариантные векторы	240
5.1.4. Определение тензора	241
5.1.5. Матричная форма формул преобразования координат	242
5.1.6. Немой индекс	245
5.1.7. Симметрия и антисимметрия	245
5.1.8. Псевдоскаляры. Скалярная плотность и скалярная емкость	247
5.1.9. Тензорная плотность и тензорная емкость	248
5.1.10. Антисимметричный тензор второй валентности в трехмерном пространстве	249
Операции над тензорами	250
5.1.11. Сложение двух тензоров	250
5.1.12. Свертывание тензора	250
5.1.13. Умножение тензоров	251
5.1.14. Свертывание произведения	251
5.1.15. Установление типа тензора	251
5.2. Тензоры в криволинейной системе координат	252
5.2.1. Определение криволинейных координат. Криволинейные оси. Координатная поверхность	252
5.2.2. Фундаментальный метрический тензор	254
5.2.3. Преобразование определителя $g$ фундаментального метрического тензора при преобразовании координат	255
5.2.4. Выражение для элемента объема	255
5.2.5. Косоугольная система координат на плоскости	255
5.2.6. Ортогональные криволинейные координаты в трехмерном пространстве	256
5.2.7. Случай произвольных криволинейных координат	257
5.2.8. Контравариантные или ковариантные составляющие компоненты одного и того же вектора	257
5.2.9. Изменение валентности тензора	258
5.2.10. Смешанный фундаментальный метрический тензор	258
5.2.11. Случай прямолинейной прямоугольной системы координат	258
Геометрическое представление контравариантных и ковариантных компонент вектора	258
5.2.12. Случай прямоугольной косоугольной системы координат	258
5.2.13. Случай криволинейных координат	259
5.2.14. Частный случай ортогональных криволинейных координат	261
5.3. Дифференциальные операторы в криволинейных координатах	261
5.3.1. Градиент	261
5.3.2. Ротор (вихрь)	262
5.3.3. Дивергенция	262
5.3.4. Лапласиан (оператор Лапласа)	262
Частный случай ортогональных криволинейных координат	263
5.3.5. Градиент	263
5.3.6. Ротор	263
5.3.7. Дивергенция	263
5.3.8. Лапласиан	264
5.3.9. Тензорная форма уравнений Максвелла	264
5.4. Применение тензорного исчисления к исследованию электрических цепей	265
5.4.1. Элементы электрических цепей с сосредоточенными постоянными	265
5.4.2. Метод составления уравнений для цепи наиболее общего вида	268
5.4.3. Соединение цепей посредством проводников	277

5.4.4. Соединение цепей посредством магнитопроводов . . . . .	280
5.4.5. Анализ эквивалентных цепей . . . . .	282
5.4.6. Цепи с внешним питанием . . . . .	285
5.5. Применение тензорного исчисления к изучению анизотропных сред . . . . .	288
5.5.1. Введение . . . . .	288
5.5.2. Диэлектрические свойства кристалла . . . . .	288
5.5.3. Матрицы преобразования для некоторых часто встречающихся систем координат . . . . .	289
Механические свойства кристалла . . . . .	291
5.5.4. Напряжение . . . . .	291
5.5.5. Деформации . . . . .	292
5.5.6. Тепловое расширение . . . . .	293
5.5.7. Обобщенный закон Гука . . . . .	293
5.5.8. Применение шестимерного пространства . . . . .	295
5.5.9. Модуль Юнга . . . . .	298
Пьезоэлектричество . . . . .	298
5.5.10. Электрическая поляризация . . . . .	298
5.5.11. Закон Кюри . . . . .	301
5.5.12. Пьезоэлектрические свойства кварца . . . . .	301
5.5.13. Распространение упругих волн в кристаллах . . . . .	303
5.5.14. Плоские волны . . . . .	304
Литература к главе V . . . . .	305
Глава VI. Методы интегрирования дифференциальных уравнений . . . . .	306
6.1. Дифференциальные уравнения первого порядка . . . . .	306
6.1.1. Уравнение вида $f\left(x, \frac{dy}{dx}\right) = 0$ , $f\left(y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$ . . . . .	306
6.1.2. Уравнения с разделяющимися переменными . . . . .	307
6.1.3. Однородные уравнения . . . . .	308
6.1.4. Уравнение в полных дифференциалах . . . . .	309
6.1.5. Линейное уравнение . . . . .	310
6.1.6. Уравнение Бернулли . . . . .	311
6.1.7. Уравнение Рикати . . . . .	311
6.1.8. Уравнение Лагранжа . . . . .	311
6.1.9. Уравнение Клеро . . . . .	311
6.1.10. Общий случай $f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$ . . . . .	312
6.2. Дифференциальные уравнения порядка выше первого . . . . .	313
Случаи понижения порядка уравнения . . . . .	313
6.2.1. Уравнение не содержит явно функцию $y$ . . . . .	313
6.2.2. Уравнение не содержит явно независимой переменной $x$ . . . . .	313
6.2.3. Уравнение, однородное относительно $y, y', \dots, y^{(n)}$ . . . . .	313
6.2.4. Уравнение, однородное относительно $x$ и $dx$ . . . . .	314
6.2.5. Уравнение, однородное относительно $x, y, dx, dy, d^2y, \dots, d^ny$ . . . . .	314
6.2.6. Общий случай однородного уравнения . . . . .	314
Линейное дифференциальное уравнение $n$ -го порядка . . . . .	315
6.2.7. Введение . . . . .	315
6.2.8. Метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа) . . . . .	315
6.2.9. Уравнение Эйлера . . . . .	317
6.2.10. Интегрирование при помощи степенных рядов . . . . .	317
6.2.11. Некоторые теоремы о свойствах решений линейного дифференциального уравнения второго порядка . . . . .	322
Интегрирование линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами . . . . .	324
6.2.12. Интегрирование однородного дифференциального уравнения . . . . .	325

## ОГЛАВЛЕНИЕ

6.2.13. Случай кратного корня . . . . .	325
6.2.14. Частный интеграл неоднородного уравнения . . . . .	326
6.2.15. Случай резонанса . . . . .	328
6.2.16. Система линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами . . . . .	329
Уравнения с частными производными . . . . .	330
6.3.1. Линейное уравнение с постоянными коэффициентами, однородное относительно частных производных . . . . .	330
6.3.2. Уравнение с правой частью . . . . .	331
6.3.3. Уравнение колебаний струны . . . . .	331
6.3.4. Телеграфное уравнение . . . . .	333
6.3.5. Уравнение Лапласа . . . . .	333
6.3.6. Прямоугольная система координат . . . . .	335
6.3.7. Система цилиндрических координат . . . . .	335
6.3.8. Система сферических координат . . . . .	337
6.3.9. Система эллиптических и цилиндрических координат . . . . .	338
6.3.10. Система параболических цилиндрических координат . . . . .	339
6.3.11. Другие системы координат . . . . .	340
6.3.12. Уравнение Пуассона . . . . .	342
6.3.13. Решение уравнений Максвелла методом Бромвича . . . . .	343
6.3.14. Пример. Электромагнитные колебания в прямоугольной полости . . . . .	347
Литература к главе VI . . . . .	348
<b>II. Наиболее употребительные специальные функции . . . . .</b>	<b>349</b>
7.01. Асимптотическое разложение . . . . .	349
Гиперболические функции . . . . .	352
7.1.1. Определения . . . . .	352
7.1.2. Обратные гиперболические функции . . . . .	354
7.1.3. Приложение гиперболических функций к расчету длинных линий. Метод Броуна. Абаки Блонделя — Кеннелн . . . . .	354
7.1.4. Графики функций $\operatorname{sh} x$ , $\operatorname{ch} x$ , $\operatorname{th} x$ . . . . .	355
7.1.5. Таблицы показательной и гиперболической функций . . . . .	356
Интегральный синус и косинус . . . . .	356
7.2.1. Определение . . . . .	356
7.2.2. Разложение в степенной ряд . . . . .	357
7.2.3. Разложение в асимптотический ряд . . . . .	357
7.2.4. Графики функций $\operatorname{Si} x$ и $\operatorname{Ci} x$ . . . . .	358
7.2.5. Таблицы функций $\operatorname{Si} x$ и $\operatorname{Ci} x$ . . . . .	358
7.2.6. Положение экстремумов функций $\operatorname{Ci} x$ и $\operatorname{Si} x$ . . . . .	360
Функция вероятности ошибок . . . . .	360
7.3.1. Определение . . . . .	360
7.3.2. Разложение функции $\Phi(x)$ в степенной ряд . . . . .	361
7.3.3. Разложение в асимптотический ряд функции $1 - \Phi(x)$ . . . . .	361
7.3.4. Выражение функции $1 - \Phi\left(\frac{x}{2}\right)$ через интеграл Коши . . . . .	362
7.3.5. Таблица функции $\Phi(x)$ . . . . .	363
7.3.6. График функции $\Phi(x)$ . . . . .	364
7.3.7. Интегралы Френеля . . . . .	364
Гамма-функция . . . . .	365
7.4.1. Определение . . . . .	365
7.4.2. Свойства гамма-функции . . . . .	367
7.4.3. Некоторые значения функции $\Gamma(z)$ . . . . .	368
7.4.4. Логарифмическая производная гамма-функции . . . . .	368
7.4.5. Представление гамма-функции через интеграл Коши . . . . .	369
7.4.6. Связь между эйлеровыми интегралами первого и второго рода . . . . .	370

7.4.7. График функции $y = \Gamma(x + 1)$ . . . . .	371
7.4.8. Таблица функции $\Gamma(x + 1)$ . . . . .	371
7.5. Функции Бесселя . . . . .	372
Функции Бесселя первого и второго рода . . . . .	372
7.5.1. Определение функции первого рода . . . . .	372
7.5.2. Соотношение между $J_\nu(z)$ и $J_{-\nu}(z)$ . . . . .	373
7.5.3. Определение бесселевой функции второго рода . . . . .	374
7.5.4. Рекуррентные соотношения . . . . .	376
7.5.5. Применение рекуррентных соотношений к вычислению некоторых интегралов . . . . .	376
7.5.6. Интегралы Ломмеля . . . . .	378
7.5.7. Соотношение между двумя функциями, индексы которых отличаются на целое число . . . . .	379
7.5.8. Применение интегралов Ломмеля к разложению в ряд по бесселевым функциям . . . . .	380
7.5.9. Бесселевы функции первого и второго рода с полуцелым индексом . . . . .	381
7.5.10. Применение бесселевых функций к вычислению интегралов Френеля . . . . .	382
7.5.11. Случай, когда индекс равен целому числу $\nu = n$ . . . . .	383
7.5.12. Представление $J_\nu(z)$ через определенный интеграл . . . . .	385
7.5.13. Представление $J_\nu(z)$ с помощью интеграла Коши . . . . .	386
7.5.14. Теорема сложения . . . . .	386
7.5.15. Бесселевы функции третьего рода или функции Ханкеля. Определение . . . . .	387
7.5.16. Асимптотические разложения . . . . .	387
7.5.17. Нахождение численных значений бесселевых функций . . . . .	388
7.5.18. Асимптотические выражения для бесселевых функций при больших значениях аргумента . . . . .	388
7.5.19. Корни бесселевых функций . . . . .	389
7.5.20. Кривые $J_0(x)$ , $J_1(x)$ , $J_2(x)$ , ..., $J_5(x)$ . . . . .	390
7.5.21. Поверхность $z = f(x, \nu) = J_\nu(x)$ . . . . .	390
7.5.22. Кривые $J_{-\frac{1}{2}}(x)$ , $J_{-\frac{3}{2}}(x)$ , ..., $J_{-\frac{9}{2}}(x)$ . . . . .	393
7.5.23. Кривые $Y_0(x)$ , $Y_1(x)$ , $Y_2(x)$ , $Y_3(x)$ , $Y_4(x)$ . . . . .	393
7.5.24. Поверхность $z = f(x, \nu) = Y_\nu(x)$ . . . . .	393
Модифицированные бесселевы функции первого и второго рода . . . . .	393
7.5.25. Модифицированная бесселева функция первого рода . . . . .	393
7.5.26. Модифицированная бесселева функция второго рода . . . . .	396
7.5.27. Асимптотические разложения . . . . .	396
7.5.28. Рекуррентные формулы . . . . .	397
7.5.29. Кривые $I_0(x)$ , $I_1(x)$ , ..., $I_{11}(x)$ . . . . .	398
7.5.30. Кривые $K_0(x)$ и $K_1(x)$ . . . . .	398
Функции Кельвина . . . . .	398
7.5.31. Функции Кельвина нулевого порядка . . . . .	398
7.5.32. Функции Кельвина $\nu$ -го порядка . . . . .	401
7.5.33. Представление функций Кельвина через модуль и аргумент . . . . .	401
7.5.34. Производные функций Кельвина . . . . .	401
7.5.35. Графики функций $\text{ber}(z)$ , $\text{bei}(z)$ , $M_0(z)$ , $\theta_0(z)$ . . . . .	403
Дифференциальные уравнения, решение которых может быть выражено через решение дифференциального уравнения Бесселя . . . . .	403
7.5.36. Основные типы . . . . .	403
Некоторые примеры применения бесселевых функций . . . . .	405
7.5.37. Колебание однородной тяжелой нити, подвешенной за один конец . . . . .	405
7.5.38. Исследование решения волнового уравнения в цилиндрических координатах . . . . .	407
7.5.39. Колебания равномерно натянутой мембраны . . . . .	408
7.5.40. Случай круглой мембраны . . . . .	408

7.5.41. Собственные электромагнитные колебания резонатора, имеющего форму кругового цилиндра . . . . .	410
7.5.42. Распространение электромагнитной волны внутри бесконечного кругового цилиндра . . . . .	413
7.5.43. Случай коаксиального проводника . . . . .	415
7.5.44. Скин-эффект переменных токов, проходящих по цилиндрическому проводнику круглого сечения . . . . .	416
7.5.45. Спектр волны, модулированной по частоте . . . . .	418
Таблицы бесселевых функций . . . . .	422
7.5.46. Функции $J_0, J_1, Y_0, Y_1$ . . . . .	422
7.5.47. Бесселевы функции $J_2, J_3, \dots, J_9$ . . . . .	425
7.5.48. Бесселевы функции $J_{10}, J_{11}, \dots, J_{17}$ . . . . .	425
7.5.49. Таблицы первых корней функций $J_n(z), J'_n(z)$ . . . . .	426
7.5.50. Бесселевы функции $J_{\frac{1}{2}}, J_{\frac{3}{2}}, \dots, J_{\frac{13}{2}}$ . . . . .	427
7.5.51. Бесселевы функции $J_{-\frac{1}{2}}, J_{-\frac{3}{2}}, \dots, J_{-\frac{13}{2}}$ . . . . .	428
7.5.52. Функции $ber, bei, ker, kei$ и их производные . . . . .	428
7.5.53. Функции $M_0, \theta_0, M_1, \theta_1$ . . . . .	430
7.6. Функции Лежандра . . . . .	432
7.6.1. Введение . . . . .	432
7.6.2. Разложения в степенные ряды . . . . .	432
7.6.3. Полиномы Лежандра . . . . .	434
7.6.4. Производящая функция полиномов Лежандра . . . . .	434
7.6.5. Примеры полиномов Лежандра . . . . .	436
7.6.6. Представление полиномов Лежандра через определенный интеграл. Формула Лапласа . . . . .	436
7.6.7. Рекуррентные формулы . . . . .	437
7.6.8. Формула Родрига . . . . .	438
7.6.9. Ортогональность полиномов Лежандра . . . . .	438
7.6.10. Некоторые значения полиномов Лежандра . . . . .	440
7.6.11. Корни полиномов Лежандра . . . . .	440
7.6.12. Интеграл Шлефли . . . . .	440
7.6.13. Обобщение полиномов Лежандра. Полиномы Гегенбауера . . . . .	441
7.6.14. Функции Лежандра первого рода . . . . .	441
7.6.15. Описание поверхности $y = P_n(\cos \theta)$ . . . . .	443
7.6.16. Корни функций Лежандра первого рода . . . . .	443
7.6.17. Рекуррентные формулы . . . . .	445
7.6.18. Определение функции Лежандра первого рода через интеграл Коши . . . . .	446
7.6.19. Функция Лежандра второго рода. Определения . . . . .	447
7.6.20. Определение функции Лежандра второго рода через интеграл Коши . . . . .	449
7.6.21. Присоединенные функции Лежандра . . . . .	450
7.6.22. Присоединенные функции Лежандра для целых положительных индексов . . . . .	451
7.6.23. Рекуррентные соотношения . . . . .	454
7.6.24. Ортогональность присоединенных функций Лежандра . . . . .	455
7.6.25. Некоторые значения присоединенных функций Лежандра. Приложение присоединенных функций . . . . .	456
7.6.26. Сферические гармоники . . . . .	457
7.6.27. Графики функций Лежандра первого рода . . . . .	458
7.6.28. Графики функций Лежандра второго рода . . . . .	458
7.6.29. Таблица значений первых семи полиномов Лежандра . . . . .	459
7.6.30. Графики нормированных присоединенных функций Лежандра первого рода . . . . .	460
7.6.31. Приложение функций Лежандра. Решение задачи об электромагнитных колебаниях сферического резонатора . . . . .	460
7.7. Функции Матье . . . . .	465
7.7.1. Функции Матье первого рода . . . . .	465
7.7.2. Ортогональность функции Матье первого рода . . . . .	466