

**ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА
ШПАРГАЛКА**

Москва
RUGRAM

УДК 001.5
ББК 92
В68

Волошук, В.
В68 Теория вероятностей и математическая статистика / В. Волошук. — М. : Научная книга / RUGRAM, 2021. — 50 с. — (Шпаргалки).

Шпаргалка представляет собой краткое пособие для быстрого изучения курса и успешной сдачи экзамена по дисциплине «Теория вероятностей и математическая статистика».

Предназначена для преподавателей и студентов.

BIC JN
BISAC EDU000000

Содержание

1. Испытания и события.	
Виды случайных событий	5
2. Определение вероятности	5
3. Основные формулы комбинаторики	5
4. Относительная частота.	
Устойчивость относительной частоты.	
Статистическая вероятность	5
5. Геометрические вероятности	7
6. Теорема сложения вероятностей	
несовместных событий	7
7. Полная группа событий.	
Противоположные события	7
8. Принцип практической	
невозможности маловероятных событий	7
9. Произведение событий.	
Условная вероятность	9
10. Теорема умножения вероятностей	9
11. Независимые события. Теорема	
умножения независимых событий	9
12. Теорема сложения вероятностей	
совместных событий. Формула	
полной вероятности	9
13. Вероятность гипотез.	
Формула Бейеса. Формула Бернулли	11
14. Локальная и интегральная	
теоремы Лапласа	11

49. Определение показательного	
распределения. Вероятность попадания	
в заданный интервал показательно	
распределенной случайной величины	29
50. Числовые характеристики	
показательного распределения	29
51. Функция надежности.	
Показательный закон надежности	29
52. Характеристическое свойство	
показательного закона надежности	29
53. Понятие о системе нескольких	
случайных величин	31
54. Закон распределения	
вероятностей дискретной	
двухмерной случайной величины	31
55. Функция распределения двухмерной	
случайной величины. Свойства	
функции распределения двухмерной	
случайной величины	31
56. Вероятность попадания случайной	
точки в полуполосу. Вероятность	
попадания случайной точки	
в прямоугольник	31
57. Плотность совместного	
распределения вероятностей	
непрерывной двухмерной	
случайной величины (двухмерная	
плотность вероятности)	33

27. Дисперсия числа появлений	
события в независимых испытаниях	17
28. Среднее квадратическое	
отклонение. Среднее квадратическое	
отклонение суммы взаимно	
независимых случайных величин	17
29. Одинаково распределенные взаимно	
независимые случайные величины	19
30. Начальные и центральные	
теоретические моменты	19
31. Неравенство Чебышева.	
Теорема Чебышева	19
32. Теорема Бернулли	19
33. Определение и свойства	
функции распределения	21
34. Определение плотности	
распределения. Вероятность	
попадания непрерывной случайной	
величины в заданный интервал	21
35. Нахождение функции	
распределения по известной	
плотности распределения	21
36. Вероятностный смысл и свойства	
плотности распределения	21
37. Закон равномерного	
распределения вероятностей	23
38. Числовые характеристики	
непрерывных случайных величин	23

70. Определение случайной функции.	
Корреляционная теория случайных	
функций	39
71. Математическое ожидание	
случайной функции и его свойства	39
72. Дисперсия случайной функции	
и ее свойства	39
73. Корреляционная функция	
случайной функции и ее свойства	41
74. Нормированная корреляционная	
функция. Взаимная корреляционная	
функция и ее свойства	41
75. Нормированная взаимная	
корреляционная функция	41
76. Характеристики суммы	
случайных функций	41
77. Производная случайной функции	
и ее характеристики	43
78. Интеграл от случайной функции	
и его характеристики	43
79. Комплексные случайные величины	
и их числовые характеристики	43
80. Определение стационарной	
случайной функции	43
81. Свойства корреляционной функции	
стационарной случайной функции	45
82. Нормированная корреляционная	
функция стационарной случайной функции	45

39. Нормальное распределение. Нормальная кривая	23
40. Влияние параметров нормального распределения на форму нормальной кривой	23
41. Вероятность попадания в заданный интервал нормальной случайной величины	25
42. Вычисление вероятности заданного отклонения	25
43. Правило трех сигм	25
44. Понятие о теореме Ляпунова. Формулировка центральной предельной теоремы	25
45. Оценка отклонения теоретического распределения от нормального. Асимметрия и эксцесс	27
46. Функция одного случайного аргумента и ее распределение. Математическое ожидание функции одного случайного аргумента	27
47. Функция двух случайных аргументов. Распределение суммы независимых слагаемых. Устойчивость нормального распределения	27
48. Распределение « χ^2 = квадрат». Распределение Стьюдента. Распределение Фишера-Снедекора	27

83. Стационарно связанные случайные функции	45
84. Корреляционная и взаимно корреляционная функции производной стационарной случайной функции	45
85. Корреляционная функция интеграла от стационарной случайной функции	47
86. Определение характеристик эргодических стационарных случайных функций из опыта	47
87. Вариационный ряд. Оценка неизвестной вероятности по частоте	47
88. Корреляция. Метод наименьших квадратов	47

15. Вероятность отклонения относительной частоты от постоянной вероятности в независимых испытаниях	11
16. Случайная величина. Схема Бернулли	11
17. Закон распределения вероятностей дискретной случайной величины	13
18. Биномиальное распределение. Распределение Пуассона	13
19. Простейший поток событий	13
20. Геометрическое и гипергеометрическое распределение	13
21. Числовые характеристики дискретных случайных величин. Математическое ожидание дискретной случайной величины	15
22. Вероятностный смысл и свойства математического ожидания	15
23. Математическое ожидание числа появлений события в независимых испытаниях	15
24. Отклонение случайной величины от ее математического ожидания	15
25. Дисперсия дискретной случайной величины	17
26. Формула для вычисления дисперсии. Свойства дисперсии	17

58. Нахождение функции распределения системы по известной плотности распределения	33
59. Вероятностный смысл и свойства двухмерной плотности вероятности	33
60. Вероятность попадания случайной точки в произвольную область	33
61. Отыскание плотностей вероятностей составляющих двухмерной случайной величины	35
62. Условные законы распределения составляющих системы дискретных и непрерывных случайных величин	35
63. Условное математическое ожидание	35
64. Зависимые и независимые случайные величины	35
65. Числовые характеристики систем двух случайных величин. Корреляционный момент. Кoeffициент корреляции	37
66. Коррелированность и зависимость случайных величин	37
67. Нормальный закон распределения на плоскости	37
68. Линейная регрессия. Прямые линии среднеквадратической регрессии	37
69. Линейная корреляция. Нормальная корреляция	39

1

ИСПЫТАНИЯ И СОБЫТИЯ. ВИДЫ СЛУЧАЙНЫХ СОБЫТИЙ

В окружающем нас мире мы наблюдаем различные события, сталкиваемся с результатами многочисленных опытов и наблюдений. Одни события происходят всегда при определенной совокупности условий. Такие события называют **достоверными**. Например, если подбросить монету, то она упадет на землю. События, которые заведомо не произойдут при определенной совокупности условий, называются **невозможными**. Например, если в ящике находятся красные и белые шары и из ящика наудачу извлечен один шар, то невозможным будет событие «извлечен черный шар». Подобная однозначность всегда имеет место. Однако встречаются события, исход которых при определенной совокупности условий заранее предсказать нельзя. Такие события называются **случайными**. Совокупность условий, при осуществлении которых случайное событие может либо произойти, либо не произойти, называется **испытанием**, или **опытом**. Результат испытания называется **исходом** испытания, или **событием**. Например, «брошена монета» — испытание, «выпадение герба» — случайное событие; «брошена игральная кость» — испытание, «выпадение пяти очков» — случайное событие. Раздел математики, изучающий закономерности в случайных событиях, называется теорией вероятностей. Знаменитый французский ученый **Блез Паскаль (1623–1662)**, один из создателей основ теории вероятностей, писал об этой науке: «Это учение, объединяющее точность математичес-

2

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ

Вероятность события — это численная мера объективной возможности его появления. Классический способ определения вероятности базируется на понятии равновероятных элементарных событий. Рассмотрим конкретный пример.

Пример 1. При однократном бросании правильной и однородной игральной кости полная группа событий:

$$U = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6\},$$

где $A_i = \{i\}$ ($i = 1, 2, \dots, 6$).

Так как кость однородна и симметрична, то выпадение любой грани $A_i = \{i\}$ ($i = 1, 2, \dots, 6$) равновероятно. В таком случае вероятность каждого события A_i равна $1/6$.

Рассмотрим конечное пространство элементарных событий:

$$U = \{A_1, A_2, \dots, A_n\},$$

где $A_1, A_2, \dots, A_n$ — попарно несовместные и равновероятные элементарные события. Пусть некоторому событию A благоприятствуют m из n элементарных событий пространства U .

Вероятностью $P(A)$ события A называется отношение числа m элементарных событий, благоприятствующих событию A к общему числу n равновероятных элементарных событий:

$$P(A) = m/n.$$

3

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ КОМБИНАТОРИКИ

Существует определенный класс задач, в которых необходимо из конечного множества элементов по строго установленным правилам составлять различные подмножества и производить подсчет числа таких подмножеств.

Такие задачи называются комбинаторными, а раздел математики, занимающийся их решением, называется **комбинаторикой**.

Правило умножения. Пусть требуется выполнить одно за другим какие-то k действий. Если первое действие можно выполнить n_1 способами, второе действие — n_2 способами, третье — n_3 способами и так до k -го действия, которое можно выполнить n_k способами, то все k действий вместе могут быть выполнены $n_1 \times n_2 \times \dots \times n_k$ способами.

Это правило дает удобный метод решения многих комбинаторных задач.

Правило сложения. Если два действия взаимно исключают друг друга, причем одно из них можно выполнить g способами, а другое — n способами, то выполнить одно любое из этих действий можно $g + n$ способами.

Это правило распространяется на любое конечное число действий.

Соединениями называются группы (множества), составленные из каких-либо предметов (букв, цифр, книг и др.). Предметы, из которых составлены соединения, называются **элементами**. Различают три вида соединений: размещения, перестановки и сочетания.

Размещения. Пусть дано некоторое множество $a_1, a_2, \dots, a_n$, состоящее из n элемен-

4

ОТНОСИТЕЛЬНАЯ ЧАСТОТА. УСТОЙЧИВОСТЬ ОТНОСИТЕЛЬНОЙ ЧАСТОТЫ. СТАТИЧЕСКАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ

Относительная частота события A определяется равенством:

$$W(A) = m/n,$$

где m — число испытаний, в которых событие A наступило;

n — общее число испытаний. Как показывает практика, при многократном повторении одного и того же опыта при одних и тех же условиях частота наступления события A остается все время примерно одинаковой и очень редко значительно отклоняется от некоторого постоянного числа. Это число называется вероятностью рассматриваемого события.

При статистическом определении в качестве вероятности события принимают его относительную частоту. Существование вероятности $P(A)$ не зависит от того, производим мы опыты или нет, это число характеризует случайное событие A , и около него группируются частоты $W(A)$. Справедливо утверждение, называемое **теоремой Бернулли**. Оно означает, что если число испытаний достаточно велико, то с вероятностью, сколь угодно близкой к единице, отличие частоты события A от его вероятности меньше любого наперед заданного положительного числа. На вопрос о том, сколько нужно сделать опытов, чтобы $W(A)$ была «близка» к вероятности $P(A)$, отвечает наука, тесно связанная с тео-

Из определения вероятности вытекают следующие ее свойства.

1. $0 \leq P(A) \leq 1$, так как $0 \leq m \leq n$.
2. $P(D) = 0$, если D — невозможное событие.
3. $P(F) = 1$, если F — достоверное событие.

Пример 2. На сборку поступают изделия из двух цехов. Первый цех передал на сборку 20 изделий, второй — 30 изделий. Сборщик наудачу берет одно изделие. Определить вероятность того, что это изделие изготовлено в первом цехе.

Решение. Общее число вариантов выбора изделий равно количеству изделий, поступающих на сборку, т.е. 50. Первый цех изготовил 20 изделий. Вероятность того, что было выбрано изделие первого цеха, $P = 20/50 = 0,4$.

Пример 3. Игральный кубик бросают один раз. Найти вероятность того, что выпадет четное число очков.

Решение. Обозначим через A событие «выпадет четное число». Рассмотрим события A_i — «выпадет i очков», $i = 1, 2, \dots, 6$. Очевидно, что эти события равновозможны и образуют полную группу. Тогда число всех исходов $n = 6$. Выпадению четного числа очков благоприятствуют события A_2, A_4, A_6 , т.е. $m = 3$. Искомая вероятность, по определению, равна отношению числа благоприятствующих исходов к числу всех исходов: $P(A) = 3/6 = 1/2$.

рией вероятностей. Она называется **математической статистикой**.

Пример 1. Длительные наблюдения над полом новорожденных показали, что частота рождения мальчиков колеблется около числа 0,515, а частота рождения девочек — 0,485. Поэтому вероятность рождения мальчика принимают равной $P_1 = 0,515$, а вероятность рождения девочки — 0,485. В некоторых случаях для упрощения расчетов полагают обе вероятности равными 0,5.

ких доказательств с неопределенностью случая и примиряющее эти, казалось бы, противоречивые элементы, с полным правом может претендовать на титул математики случайного».

Случайные события обозначаются большими буквами латинского алфавита $A, B, C, \dots$. Два события называются **несовместными**, если появление одного из них исключает появление другого. В противном случае события называются **совместными**.

Пример 1. В ящике находятся стандартные и нестандартные детали. Наудачу берут одну деталь. События A — «появилась нестандартная деталь» и B — «появилась стандартная деталь» являются несовместными событиями.

Пример 2. Брошена игральная кость. События A — «появление четырех очков» и B — «появление четного числа очков» являются совместными, так как появление одного из них не исключает появления другого.

Два события называются **противоположными**, если каждое из них происходит только тогда, когда не происходит другое.

Пример 3. Стрелок стреляет по мишени. События «попадание» и «непопадание» являются противоположными.

Событие, противоположное событию D , обозначается $\bar{D}$.

События $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ называются **равновозможными**, если условия испытания обеспечивают одинаковую возможность осуществления каждого из них.

тов. Размещениями из n элементов по m ($m \leq n$) называются соединения, в каждое из которых входит m элементов, взятых из данных n элементов, отличающиеся между собой элементами (хотя бы одним) или их порядком. Число размещений из n элементов по m обозначается символом A_n^m и вычисляется по формуле:

$$A_n^m = n(n-1)\dots(n-m+1)$$

или

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}, (n = 1, 2, \dots, 6).$$

Перестановки. Перестановками из n элементов называются соединения, в каждое из которых содержит n элементов и которые отличаются друг от друга только порядком следования элементов. Число перестановок из n элементов обозначается символом P и вычисляется по формуле $P_n = n!$

Сочетания. Сочетаниями из n элементов по m ($m \leq n$) называются соединения, в каждое из которых входят m элементов, взятых из данных n элементов, и которые отличаются только элементами (хотя бы одним). Число различных сочетаний из n элементов по m обозначается символом C и вычисляется по формуле:

$$C_n^m = \frac{n!}{(n-m)!m!}.$$

Основные свойства числа сочетаний.

$$C_n^m = C_n^n.$$

$$2. C_n^m + C_n^{m+1} = C_{n+1}^{m+1}.$$

5 ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ВЕРОЯТНОСТИ

Классическая формула вероятности предполагает конечное число всех исходов испытания. Но часто встречаются такие испытания, для которых число всех исходов бесконечно. В подобных случаях классическая формула неприменима.

Пусть на плоскости имеется некоторая фигура F , которая содержит фигуру f . На фигуру F наугад бросается точка, которая может оказаться в любой точке фигуры F . Другими словами, в результате бросания точки (опыта) возможно бесконечное множество исходов. В данном случае нет оснований считать неравновозможными хотя бы два каких-либо исхода из всего множества исходов. Брошенная точка может оказаться в фигуре f , а может там и не оказаться, поэтому можно говорить о вероятности попадания точки в фигуру f . В данном случае можно связать вероятность с площадями фигур F и f : чем больше площадь фигуры f , тем больше точка имеет возможностей попасть в нее. Обозначим через A событие, состоящее в попадании брошенной точки в фигуру f , а через S_f и S_F — площади фигур f и F соответственно. Тогда под вероятностью события A будем понимать отношение данных площадей, т.е.:

$$P(A) = \frac{S_f}{S_F}.$$

По аналогии с понятием благоприятствующего исхода фигуру f назовем благоприятствующей появлению события A .

Рассмотрим прямоугольную систему координат xOy . В этой системе двойным неравен-

6 ТЕОРЕМА СЛОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ НЕСОВМЕСТНЫХ СОБЫТИЙ

Теорема 1. Вероятность суммы двух несовместных событий A и B равна сумме вероятностей этих событий, т.е.

$$P(A+B) = P(A) + P(B).$$

Доказательство. Пусть n — общее число равновозможных несовместных элементарных событий испытания, в результате которого может произойти или событие A , или событие B , m_A — число элементарных событий, благоприятствующих событию A , m_B — число элементарных событий, благоприятствующих событию B . Так как события A и B несовместны, то событию $A+B$ благоприятствуют $m_A + m_B$ элементарных событий из общего числа n равновозможных несовместных элементарных событий. Поэтому:

$$P(A+B) = P(A) + P(B).$$

Теорема доказана.

Теорема 1 может быть обобщена.

Теорема 2. Вероятность суммы конечного числа попарно несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий.

Следствие 1. Если события $A_1, A_2, \dots, A_n$ образуют полную группу попарно несовместных событий, то сумма их вероятностей равна единице.

Следствие 2. Сумма вероятностей противоположных событий равна единице.

7 ПОЛНАЯ ГРУППА СОБЫТИЙ. ПРОТИВОПОЛОЖНЫЕ СОБЫТИЯ

Теорема. Если события $A_1, A_2, \dots, A_n$ образуют полную группу событий, то сумма вероятностей этих событий равна единице:

$$P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) = 1.$$

Доказательство. Появление одного из событий полной группы достоверно, а вероятность достоверного события равна единице, поэтому:

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = 1.$$

По определению, любые два события полной группы несовместны, применяя теорему сложения, получаем:

$$\begin{aligned} P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) &= \\ &= P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) = 1. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Два единственно возможных события, образующих полную группу, называются **противоположными**.

Теорема. Для противоположных событий сумма вероятностей равна единице.

Доказательство. Противоположные события образуют полную группу событий, а по ранее

8 ПРИНЦИП ПРАКТИЧЕСКОЙ НЕВОЗМОЖНОСТИ МАЛОВЕРОЯТНЫХ СОБЫТИЙ

Решая практические задачи, приходится сталкиваться с событиями, вероятность которых близка к нулю. Заключение о том, что маловероятное событие в единичном испытании не произойдет, сделать нельзя. Появление или неоявление маловероятного события в единичном испытании, казалось бы, предсказать невозможно. Но длительные исследования показали, что маловероятное событие в единичном испытании в большинстве случаев не происходит. На основании этого используют **принцип практической невозможности маловероятных событий**: если случайное событие маловероятно, то практически можно считать, что оно не произойдет в единичном испытании. Нельзя ответить однозначно на вопрос, какой должна быть вероятность события, чтобы считать его невозможным в единичном испытании? **Уровнем значимости** называется достаточно малая вероятность, при которой в конкретной задаче событие можно считать практически невозможным. На практике принимают уровни значимости из интервала $(0,01; 0,05)$. Из принципа невозможности маловероятных событий следует важное для практических приложений **следствие**: если вероятность случайного события очень близка к единице, то практически можно считать, что в единичном испытании это событие произойдет.

Пример. Пусть вероятность события равна 0,01. Если событие заключается в том, что сна-

Пример 1. Наудачу берется натуральное число из чисел от 100 до 999. Какова вероятность того, что хотя бы две его цифры совпадают?

Решение. События «взяли наудачу число k » образуют множество исходов этого опыта, и эти исходы равновероятны. Число исходов $n = 900$. Нас интересует «у выбранного числа совпадают хотя бы две цифры» (событие A). Гораздо легче подсчитать вероятность противоположного события — «у выбранного числа все цифры различны» (событие $\bar{A}$). Каждое такое число есть упорядоченное подмножество из трех цифр множества из десяти цифр, у которого первый элемент не 0, т.е.:

$$m = A_{10}^3 = 9 \cdot 9 \cdot 8$$

и

$$P(\bar{A}) = \frac{9 \cdot 9 \cdot 8}{900} = 0,72.$$

Интересующая нас вероятность.

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 0,28.$$

ряд при падении не разорвется и примерно 1 % выстрелов останется без результатов, то с этим можно примириться. Но если 0,01 — вероятность того, что при прыжке не раскроется парашют, то пренебречь этим никак нельзя. Эти примеры показывают, что в каждой конкретной задаче необходимо заранее на основании практических соображений установить, как мала должна быть вероятность события, чтобы ею можно было пренебречь.

ствам удовлетворяют координаты любой точки, принадлежащей квадрату $OTAT$ (рис. 1). Этот квадрат рассмотрим как фигуру F , координаты точек которой являются возможными значениями моментов поступления импульсов. Устройство срабатывает, если разность поступления импульсов меньше t , т.е.:

$$y < x + t \text{ при } y > x. (*)$$

$$y > x - t \text{ при } y < x. (**)$$

Неравенство $(*)$ выполняется для координат тех точек фигуры F , которые лежат выше прямой $y = x$ и ниже прямой $y = x + t$; неравенство $(**)$ выполняется для точек, расположенных ниже прямой $y = x$ и выше прямой $y = x - t$. Из рис. 1 видно, что все точки, координаты которых удовлетворяют неравенствам $(*)$, $(**)$, принадлежат заштрихованной области. Эта область представляет собой фигуру f , координаты точек которой являются благоприятствующими срабатыванию устройства моментами времени x и y . Искомая вероятность:

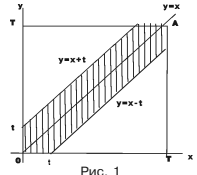


Рис. 1

$$P = \frac{S_f}{S_F} = \frac{T^2 - 2 \times (T-t)^2 / 2}{T^2} = \frac{t \times (2 \times T - t)}{T^2}.$$

доказанной теореме сумма вероятностей, образующих полную группу, равна единице.

Пример. Вероятность того, что стрелок попадет в цель, равна 0,6. Какова вероятность промаха?

Решение. События «стрелок попал в цель» и «стрелок не попал в цель» — противоположные, поэтому искомая вероятность:

$$q = 1 - p = 1 - 0,6 = 0,4.$$

ПРОИЗВЕДЕНИЕ СОБЫТИЙ. УСЛОВНАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ

Произведением событий A и B называют событие, которое происходит тогда и только тогда, когда имеют место оба события A и B . Например, событие C — «вынут червовый туз» является произведением событий A и B , где A — «вынута карта червонной масти» и B — «вынут туз».

Интуитивно под условной вероятностью события B при условии A понимают вероятность события B , вычисленную в предположении, что события A произошло, и обозначают ее $P_B(A)$.

Пример 1. В коробке 5 белых и 4 черных карандаша. Из коробки последовательно берут два карандаша. Найти вероятность того, что второй карандаш окажется черным при условии, что первый карандаш был черным.

Решение. Обозначим события: A — «первый карандаш черный», B — «второй карандаш черный». Если произошло событие A , то в ящике осталось 8 карандашей, из которых 3 черных. Поэтому искомая условная вероятность:

$$P_B(A) = \frac{3}{8}.$$

Дадим строгое определение условной вероятности: **условной вероятностью** события B при условии A называется отношение вероятности произведения событий A и B к вероятности события A при $P(A) \neq 0$.

Пример 2. Бросили игральную кость. Какова вероятность выпадения простого числа оч-

ТЕОРЕМА УМНОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Теорема 1. Вероятность произведения двух произвольных событий равна произведению одного из этих событий на условную вероятность другого при условии, что первое произошло.

Пример. На некотором предприятии 96 % изделий признается годными (событие A); из каждой сотни годных изделий в среднем 85 оказываются первого сорта (событие B). Найти вероятность того, что изделие, изготовленное на этом предприятии, окажется первого сорта.

Решение. Будем искать $P(AB)$, так как для того, чтобы изделие было первого сорта, надо, чтобы оно было пригодным (событие A) и первого сорта (событие B). В силу условия имеем $P(A) = 0,96$, $P_B(A) = 0,85$. Поэтому на основании теоремы $P(AB) = 0,816$.

Теорема 1 верна и для произвольного числа событий.

Теорема 2. Вероятность произведения конечного числа событий равна произведению вероятности одного из них на условные вероятности всех остальных, причем условная вероятность каждого последующего события вычисляется в предположении, что все предыдущие уже наступили.

Пример. В отделе работают 8 мужчин и 5 женщин. По табельным номерам наудачу отобрали 3 человек. Определить вероятность того, что все отобранные лица оказались женщинами.

Решение. Обозначим события: A — «первой отобрана женщина», B — «второй отобрана жен-

НЕЗАВИСИМЫЕ СОБЫТИЯ. ТЕОРЕМА УМНОЖЕНИЯ НЕЗАВИСИМЫХ СОБЫТИЙ

Теорема 1. Вероятность совместного появления двух независимых событий равна произведению их вероятностей.

Доказательство. Пусть события A и B независимы; тогда должно выполняться равенство $P_A(B) = P(B)$. Подставляя это равенство в формулу $P(AB) = P(A) \times P_A(B)$, получаем $P(AB) = P(A) \times P(B)$. Теорема доказана.

Независимые события обладают следующими свойствами.

1. Если события A и B независимы, то независимы события A и $\bar{B}$.

2. Если два события независимы, то независимы и противоположные им события.

События называются **независимыми** в совокупности, или просто независимыми, если наряду с их попарной независимостью независимы любое из них и произведение любого числа из остальных, в противном случае события называются зависимыми.

Теорема 2. Вероятность совместного появления нескольких событий, независимых в совокупности, равна произведению вероятностей этих событий, т.е.:

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1) \times P(A_2) \dots P(A_n).$$

Пример. Сколько нужно бросить игральных костей, чтобы с вероятностью, меньшей 0,4, можно было ожидать, что ни на одной из выпавших граней не появится шесть очков?

ТЕОРЕМА СЛОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ СОВМЕСТНЫХ СОБЫТИЙ. ФОРМУЛА ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ

Теорема. Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного наступления, т.е.:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Доказательство. Пусть в результате опыта возможны n равновероятных исходов. Пусть событию A благоприятствуют m исходов, а событию B — k исходов. События A и B совместны, поэтому часть указанных исходов благоприятствует и событию A , и событию B . Пусть количество таких исходов равно r . Тогда имеем:

$$P(A) = \frac{m}{n}, \quad P(B) = \frac{k}{n}, \quad P(AB) = \frac{r}{n}.$$

Событие $A + B$ заключается в наступлении либо события A , либо события B , либо события AB . Поэтому ему будут благоприятствовать $m + k - r$ исходов. Тогда получим:

$$P(A + B) = \left(\frac{m + k - r}{n} \right) = \frac{m}{n} + \frac{k}{n} - \frac{r}{n}.$$

Теорема доказана.

Пусть событие A может произойти только с одним из событий $H_1, H_2, \dots, H_n$, образующих полную группу попарно несовместных событий.

щина», С — «третьей отобрана женщина». Вероятность того, что первой отобрана женщина:

$$P(A) = \frac{5}{13}.$$

Вероятность того, что второй отобрана женщина, при условии, что первой уже отобрана женщина:

$$P_A(B) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}.$$

Вероятность того, что третьей отобрана женщина, при условии, что две женщины уже отобраны:

$$P_{AB}(C) = \frac{3}{11}.$$

Искомая вероятность равна:

$$P(ABC) = \frac{5}{13} \times \frac{1}{3} \times \frac{3}{11} = \frac{5}{143}$$

Тогда вероятность события А вычисляется по формуле **полной вероятности**:

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i) \times P_{H_i}(A).$$

Доказательство. Событие А может наступить, если появится одно из событий $H_1, H_2, \dots, H_n$. Это означает, что появление события А влечёт появление одного из событий $H_1 A, H_2 A, \dots, H_n A$, не важно, какого. Поэтому событие $A = H_1 A + H_2 A + \dots + H_n A$. Так как события $H_1, H_2, \dots, H_n$ по условию попарно несовместны, то очевидно, что события $H_1 A, H_2 A, \dots, H_n A$ также несовместны. Применяя теорему сложения для несовместных событий, получаем:

$$P(A) = P(H_1 A) + P(H_2 A) + \dots + P(H_n A).$$

Применяя далее теорему умножения вероятностей, получим:

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i) \times P_{H_i}(A).$$

ков, если известно, что число выпавших очков чётно?

Решение. Пусть событие А — «выпало чётное число очков», ему благоприятствуют три равновероятных исхода опыта: A_2, A_4, A_6 . Из них только исход A_2 благоприятствует событию В — «выпало простое число очков». Следовательно:

$$P_A(B) = \frac{1}{3}.$$

Решение. Обозначим: А — «ни на одной из выпавших граней не появится 6 очков»; A_i — «на выпавшей грани i-ой кости ($i = 1, 2, \dots, 6$) не появится 6 очков». Интересующее нас событие заключается в совмещении событий $A_1, A_2, \dots, A_n$, т.е. $A = A_1 A_2 \dots A_n$. Вероятность того, что на любой выпавшей грани появится число очков, не равное 6, равна $P(A_i) = \frac{5}{6}$. События A_i независимы в совокупности, поэтому применяем теорему 2:

$$P(A) = P(A_1) \times P(A_2) \dots P(A_n) = \left(\frac{5}{6}\right)^n.$$

Так как $\log(5/6) < 0$, получим $n > 5,025$. Таким образом, искомое число игральных костей $n \geq 6$.