А.К. Сушкевич

Теория обобщенных групп

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 51
ББК 22.1
А11

А.К. Сушкевич
А11 Теория обобщенных групп / А.К. Сушкевич – М.: Книга по Требованию, 2019. – 176 с.

ISBN 978-5-458-25763-3

Монография 1937 года по теории групп. Из предисловия автора: "Настоящая монография представляет собой, быть может, первое по времени, связное изложение теории всех типов обобщенных групп. Сюда вошли как мои собственные исследования, изложенные частью в моей диссертации, частью в отдельных моих работах, помещенных в разных математических журналах, так и исследования других математиков, посвященные обобщенным группам. "

ISBN 978-5-458-25763-3

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

Серия Книжный Ренессанс
www.samizday.ru/reprint

ВВЕДЕНИЕ

Настоящая книга посвящена одной из двух основных ветвей современной алгебры, а именно теории систем с одним действием,—систем, которые мы будем просто называть **группами**, употребляя этот термин в обобщенном смысле. Обычные группы (которые можно было бы назвать „классическими“, аналогично „классическому“ анализу) — конечные и бесконечные — являются частным случаем этого обобщенного понятия о группе, поскольку действие обычных групп является частным случаем понятия о действии вообще; оно подчинено вполне определенным законам (ассоциативному, неограниченной и однозначной обратимости и т. п.), которые доказываются (в случае конкретных групп) или просто постулируются (в случае абстрактных групп). Если говорится о „действии“, то предполагается и наличие объектов, над которыми действие совершается; в абстрактной теории эти объекты называются **элементами**. Природа этих элементов для нас безразлична; безразлично также, как именно совершается наше действие над взятыми элементами, но важно соответствие между взятыми элементами и элементами, полученными в результате действия. Это соответствие (иначе **соотношение**) выражается в виде **равенства**. С рассмотрения равенства мы и начнем.

Равенство, как известно, есть соотношение между двумя элементами, подчиненное трем основным законам: **симметрии** (если $A=B$, то и $B=A$), **транзитивности** (если $A=B$, $B=C$, то $A=C$) и **рефлексивности** ($A=A$). Если $A=B$, то элементы A и B называются **равными**; в противном случае они называются **неравными** или **различными** (что обозначается: $A \neq B$). Указанные три закона равенства позволяют распределить все элементы по классам так, что элементы одного и того же класса все равны друг другу, а элементы из разных классов — различны. Когда говорят о конечности или бесконечности данного множества элементов или о числе элементов конечного множества, то имеют в виду именно эти классы элементов, т. е., иными словами, равные друг другу элементы считаются за один элемент.

Укажем теперь на четвертый основной закон равенства—в связи с действием: *результат какого бы то ни было действия над* *данными элементами не изменится, если данные элементы заменить равными им.* При этом слова „не изменится" надо поднимать: „перейдет в равный". Отсюда вытекает общее следствие: *во всяком выражении*[1] *или соотношении можно заменять элементы равными им*; от этого ни выражение не изменится, ни соотношение не нарушится.

Мы предполагаем, что все элементы нашей системы (группы) как-то индивидуально обозначены, хотя бы большими буквами латинского алфавита со значками или без значков,[2] при этом должно быть соблюдено следующее правило: разные (т. е. неравные друг другу) элементы не могут быть обозначены одним и тем же символом (т. е. одной и той же буквой с одним и тем же значком).[3] При этом условии дадим классификацию равенств между выражениями из наших элементов. Равенства бывают следующие:

1. Равенство только с индивидуально обозначенными элементами (иначе — с „известными" элементами); такое равенство может быть верным или неверным; в первом случае оно выражает определенный индивидуальный факт; во втором случае оно отбрасывается, как содержащее противоречие.

2. Равенство, куда входит хоть один символ (буква), не являющийся обозначением ни одного индивидуального элемента; такой символ представляет „общий" или „переменный" или „неизвестный" элемент. Такие равенства подразделим еще на три рода:

а) Равенства-обозначения, служащие исключительно лишь для того, чтобы сокращенно обозначить одной буквой (стоящей в одной части равенства) более или менее сложное выражение (стоящее в другой части равенства). Мы отмечаем этот род равенств от остальных, ибо они, встречаясь на каждом шагу, не могут быть причислены ни к тождествам, ни к уравнениям. В таких равенствах, вместо обычного знака $=$, мы будем писать $\simeq$.

б) Тождества — равенства, остающиеся верными, если мы вместо символов „общих" элементов подставим символы любых индивидуальных элементов.[4] Среди тождеств выделяется абсолютное тождество, выражающее, что элемент равен самому себе: $A = A$. Все остальные тождества условны; они выражают свойства или законы действия данной группы, и для иной

---

[1] Мы не даем определения термину „выражение", подразумевая под ним то же, что подразумевается и в элементарной алгебре, только вместо чисел предполагая элементы.

[2] Для конечных и исчислимых систем „обозначение" элементов не возбуждает сомнений. Хуже обстоит дело с неисчислимою системой: тут саму возможность обозначения элементов надо ставить, как постулат.

[3] Но обратное может быть когда различными буквами обозначены равные друг другу элементы.

[4] Это определение тождества не сходится с тем, какое дается в теории чисел.

группы могут и не быть тождествами. Например, равенство $AB=BA$ является тождеством для абелевых групп и выражает коммутативный закон действия группы; для групп же не абелевых это равенство не является тождеством. Тождество иногда обозначают знаком $\equiv$.

в) Уравнения — все равенства, не подходящие под указанные выше типы. В уравнение должен входить, по крайней мере, один символ „общего" элемента, являющегося здесь „неизвестным", поскольку вообще неизвестно, какие индивидуальные элементы следует подставить вместо „общего" (или „общих") элемента, чтобы равенство оказалось правильным; эти индивидуальные элементы называются корнями или решениями данного уравнения, а нахождение их называется решением уравнения. Может случиться, что данное уравнение совсем не имеет корней, или имеет корни, но не все элементы данной группы являются его корнями, или, наконец все элементы группы — его корни („удовлетворяют" ему); в последнем случае, поскольку мы знаем, что он имеет место, данное равенство есть не уравнение, а тождество.

Заметим еще, что существуют смешанные равенства: тождества относительно одних букв и уравнения относительно других. Так, в гл. II, § 22, равенство (3) есть тождество относительно элемента X и уравнение для C.

Возвращаясь теперь к нашему абстрактному действию, заметим еще раз, что оно является не чем иным, как только установлением соответствия между элементами — „данными" и элементами — „результатами" действия; это соответствие выражается в форме равенства, в одной части которого стоят элементы „данные", соединенные или объединенные специальным знаком (буквою или специально придуманным значком), символизирующим наше действие, а в другой части — один из элементов „результатов действия". В дальнейшем мы ограничимся случаем, когда „результат действия" — единственный элемент, вполне определенный „данными" элементами; такое действие однозначно (противоположность ему — многозначное действие). Что касается количества „данных" элементов, то оно может быть каким угодно — не только конечным, но и бесконечным. Обычные так называемые „арифметические" или „алгебраические" действия являются действиями с двумя данными" элементами; таковы же и их обобщения — композиции подстановок n символов, матриц, геометрических преобразований, и, наконец, отвлеченное действие обычных („классических") групп. Но и действия с одним данным элементом широко распространены в математике, часто, впрочем, в скрытой форме. Такими действиями являются обычное диференцирование (нахождение производной) и интегрирование (нахождение первообразной функции); элементами тут являются функции. Далее, каждое геометрическое преобразование также является таким действием, элементы здесь — точки или иные геометрические образы. Широко распространившийся в новой математике оператор“ есть тоже символ действия с одним данным элементом. В гл. VII мы встретим примеры действия с n данными элементами, где $n>2$; в современной математике таким действием является решение алгебраического уравнения $n-1$ степени; это действие $(n-1)$-значное над n даниыми элеметами, коэфициентами уравнения. Наконец, как пример действия с исчислимым множеством данных элементов, можно привести стремление к пределу членов ряда: a_1, a_2, $a_3 \ldots$; $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$ есть единственный результат этого действия.

ГЛАВА I

ДЕЙСТВИЯ С ОДНИМ ЭЛЕМЕНТОМ

Подстановки

§ 1. Наши „элементы“ будем обозначать малыми греческими буквами с индексами или без индексов; действие обозначим буквою Θ. Рассмотрим сначала случай конечного множества различных „элементов“: $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$; произведя над каждым из этих элементов наше действие, получим результаты:

$$\Theta\alpha_1, \Theta\alpha_2, \ldots \Theta\alpha_n. \tag{1}$$

Здесь представляется два случая: 1) элементы (1) те же самые элементы $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ (может быть, только в ином порядке и не все), 2) элементы (1) (все или частично) отличны от $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$.

Разберем сначала первый случай; он сводится к подстановке:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \ldots & \alpha_n \\ \Theta\alpha_1 & \Theta\alpha_2 & \Theta\alpha_n \end{pmatrix}, \tag{2}$$

которую мы сокращенно обозначим $\begin{pmatrix} \alpha_\lambda \\ \Theta\alpha_\lambda \end{pmatrix}$. Здесь мы снова различим два случая:

a) Элементы (1) все различны, т. е., так как число их равно n, то это все элементы $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$, только в другом порядке; иными словами, подстановка (2) — обычная. Следовательно, действие Θ таково, что из $\Theta\alpha_\varkappa = \Theta\alpha_\lambda$ следует $\alpha_\varkappa = \alpha_\lambda$ или при $\alpha_\varkappa \neq \alpha_\lambda$ и $\Theta\alpha_\varkappa \neq \Theta\alpha_\lambda$; такое действие однозначно обратимо. Далее, так как в ряду (1) имеется каждый из элементов $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$, то при данном α_μ из этого ряда всегда найдется в этом же ряду такой элемент α_λ, что $\Theta\alpha_\lambda = \alpha_\mu$. Говорят, что действие Θ неограниченно обратимо. Таким образом в случае конечного числа элементов законы однозначной и неограниченной обратимости вытекают один из другого. Оба эти закона говорят о существовании и однозначности обратного к Θ действия, которое мы обозначим через Θ^{-1}; оно соответствует обратной подстановке и тоже однозначно и неограниченно обратимо, причем $(\Theta^{-1})^{-1} = \Theta$.

b) Может случиться, что в ряду (1) не все элементы различны, откуда следует, что в этом ряду имеются не все элементы $\alpha_1, \ldots \alpha_n$. Следовательно, в этом случае для действия Θ

не исполнены законы однозначной и неограниченной обратимости; подстановку (2) назовем в этом случае **конечной обобщенной**; она не имеет обратной.

Разложение на циклы

§ 2. Разберем первый случай более подробно. Возьмем какой-либо из наших элементов, например, α_1 и будем над ним производить наше действие Θ несколько раз.

$$\Theta\alpha_1 = \alpha_2,\ \Theta\alpha_2 = \alpha_3 \tag{3}$$

(мы обозначаем $\Theta\alpha_1$ через α_2, $\Theta\alpha_2$ через α_3 и т. д., так как, ведь, от нас зависит, как нумеровать наши элементы). Так как множество всех наших элементов конечно, то в ряду (3) не все элементы будут различными — с определенного места начнутся повторения; предположим, что:

$$\Theta\alpha_{k+l-1} = \alpha_{k+l} = \alpha_k$$

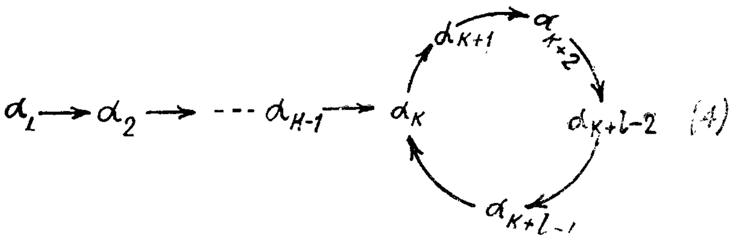
при **наименьших** k и l. Тогда, следовательно:

$$\Theta\alpha_1 = \alpha_2,\ \Theta\alpha_2 = \alpha_3, \ldots\ \Theta\alpha_{k-1} = \alpha_k, \ldots\ \Theta\alpha_{k+l-2} = \alpha_{k+l-1}$$

все различны, но далее $\Theta\alpha_{k+l-1} = \alpha_k$, и элементы $\alpha_k, \alpha_{k+1}, \ldots \alpha_{k+l-1}$ повторяются периодически, тогда как $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ \alpha_{k-1}$ не повторяются.

Назовем k — родом, а l — порядком элемента α_1.

Таким образом мы получим цикл, который можно схематически представить в следующем виде:



(4)

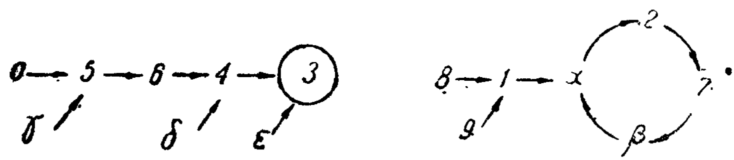
Фіг. 4.

Мы имеем „круг", составленный из элементов $\alpha_k, \alpha_{k+1}, \ldots \alpha_{k+l-1}$, с „хвостом", составленным из элементов $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_{k-1}$; „круг" этот назовем „**ядром**" цикла, а также каждого из элементов $\alpha_1, \ldots\ \alpha_{k+l-1}$, входящих в цикл. Если $k+l-1 < n$, то, кроме элементов $\alpha_1, \ldots\ \alpha_{k+l-1}$, существуют еще дальнейшие: $\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots$; взяв один из них, найдем и для него соответствующий цикл, причем может быть один из следующих трех случаев: или этот новый цикл не имеет с предыдущим ни одного общего элемента, или оба цикла имеют общее ядро; в последнем случае этот взятый элемент (например, α'_1) дает от ядра цикла (4) новое ответвление — новый „хвост"; или, наконец, взятый элемент α'_1 только „удлинит" уже имеющийся в (4) хвост (если α'_1 непосредственно или посредственно переходит в α_1). Таким образом всякую обобщенную подстановку можно разложить на циклы вида (4), причем не исключается возможность, что ядро такого цикла состоит всего лишь из одного элемента; хвостов может быть несколько, а может и совсем не быть; в последнем случае подстановка обычная, разложенная обычным образом на циклы, состоящие только из одних ядер.

Пример. Разложить на циклы подстановку:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & \alpha & \beta & \gamma & \delta & \varepsilon \\ 5 & \alpha & 7 & 3 & 3 & 6 & 4 & \beta & 1 & 1 & 2 & \alpha & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

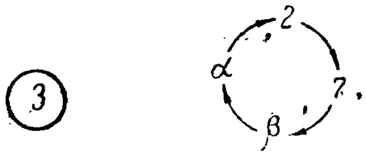
Здесь имеем два цикла:



(5)

Ядро первого цикла состоит из одного только элемента 3, переходящего в самого себя.

Совокупность ядер всех циклов, на которые разлагается данная подстановка, образует обычную подстановку — **главную часть** данной подстановки; входящие в эту главную часть элементы назовем тоже **главными**. Так, в предыдущем примере эту главную часть составляют циклы:



дающие обычную подстановку:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 & \alpha & \beta \\ 7 & 3 & \beta & 2 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Заметим, что все элементы одного и того же цикла имеют один и тот же порядок, который равен числу элементов ядра; роды же их вообще различны; элементы ядра имеют род, равный 0. Наибольший из родов элементов цикла назовем **родом цикла**, а порядок его элементов — **порядком цикла**, если цикл состоит только из ядра (без хвостов), то условимся его род считать равным 1 (а не 0).

Обратим внимание на начальные элементы всех хвостов цикла (в первом из циклов (5) это 0, γ, δ, ε; во втором — 8, 9), назовем их **генераторами** цикла, ибо они его порождают и вполне определяют (при данном действии Θ). Если цикл состоит из одного только ядра (без хвостов), то за его генератор можно принять любой из его элементов. Если же цикл имеет хотя бы один хвост, то его генераторы вполне определены, как начальные элементы хвостов.

Группы и подгруппы

§ 3. Возвращаемся опять к нашему действию Θ. В рассматриваемом первом случае назовем систему элементов $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ группой относительно действия Θ; n — порядок группы.[1] Как мы видели, такой группе соответствует подстановка (2), разложимая на циклы; каждый из этих циклов сам составляет группу относительно Θ — подгруппу всей группы. Таким образом вся группа распадается на такие подгруппы — циклы, совершенно независимые друг от друга в том смысле, что никакая их пара не имеет общих элементов; каждая из этих подгрупп порождается одним или несколькими генераторами (см. конец § 2); все эти генераторы всех циклов составляют систему генераторов группы. Генераторы разных циклов совершенно независимы друг от друга. Между генераторами одного и того же цикла существуют соотношения, которые мы и выявим.

Введем для этого такие обозначения: если $\alpha_2 = \Theta\alpha_1$ $\alpha_3 = \Theta\alpha_2$, $\alpha_4 = \Theta\alpha_3$, то будем обозначать $\alpha_3 = \Theta^2\alpha_1$, $\alpha_4 = \Theta^3\alpha_1, \ldots$

В таком случае, например, в цикле (4), будем иметь:

$$\Theta^{k+l-1}\alpha_1 = \Theta^{k-1}\alpha_1;$$

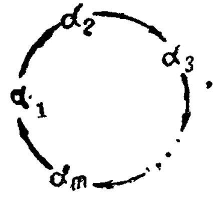
это и есть (здесь единственное) соотношение, которому удовлетворяет генератор α_1. В первом цикле (3) имеем соотношения:

$$\Theta^5 0 = \Theta^4 0,\ \Theta\gamma = \Theta 0,\ \Theta\delta = \Theta^3 0,\ \Theta\varepsilon = \Theta^4 0;$$

во втором цикле (5) имеем:

$$\Theta^6 8 = \Theta^2 8,\ \Theta 9 = \Theta 8.$$

Конечно, эти соотношения между генераторами для данного цикла определены вообще не однозначно. Если цикл состоит из одного только ядра с m элементами:



то всякий из элементов $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$ можно принять за генератор, и имеем только одно соотношение для взятого генератора, например, для α_1: $\Theta^m\alpha_1 = \alpha_1$.

Циклы являются не единственными подгруппами всей группы;

---

[1] Мы здесь определяем порядок конечной группы, как число всех различных ее элементов, в соответствии с определением порядка обычной конечной группы; но этот порядок группы не имеет ничего общего с порядком соответствующей подстановки (см. ниже).

если r число всех циклов, то совокупность s $(s<r)$ из этих циклов тоже составляет подгруппу, т. е. всего таких подгрупп:

$$r+\binom{r}{2}+\binom{r}{3}+\ldots+\binom{r}{r}=2^r-1$$

(включая сюда и саму группу). Но и это вообще еще не все подгруппы: „урезывая" (целиком или частично) хвосты у цикла, получаем тоже подгруппы (только ядро каждого цикла должно оставаться неизменным).

Повторение действия; род, порядок

§ 4. Среди всех возможных действий Θ отметим действие E, обладающее свойствами: $E\alpha=\alpha$ для всякого элемента α Такое действие назовем тождественным; при нем каждый элемент это — цикл, состоящий из одного одночленного ядра; подстановка, соответствующая этому действию, есть тождественная подстановка E.

В § 3 мы уже говорили о „повторениях" действия Θ, выражающихся символическими степенями: Θ^2, Θ^3,...; эти степени являются новыми действиями, которым соответствуют степени подстановки (2). Так как при конечном числе n элементов существует только ограниченное число возможностей для действия Θ над ними, то, следовательно, существует только конечное число $(=n^n)$ различных действий (и столько же различных подстановок). Следовательно, при некоторых наименьших (целых, положительных) k и l будем иметь:

$$\Theta^{k+l}\alpha=\Theta^k\alpha \tag{6}$$

для всякого элемента α_1; (условимся при этом считать $\Theta^1\alpha=\Theta\alpha$); будем это обозначать сокращенно:

$$\Theta^{k+l}=\Theta^k. \tag{6a}$$

Число k назовем родом, а l — порядком действия Θ и соответствующей подстановки (2) (этот порядок действия не следует смешивать с порядком группы). Легко видеть, что род действия равен наибольшему из родов циклов, на которые распадается соответствующая подстановка, а порядок действия равен общему наименьшему кратному порядков этих циклов.

Если действие Θ однозначно обратимо, т. е. существует обратное действие Θ^{-1}, то для всякого элемента α $\Theta^{-1}\Theta\alpha=\alpha$, т. е. можно написать: $\Theta^{-1}\Theta=E$ (и, очевидно, $\Theta\Theta^{-1}=E$); в этом случае подстановка (2) — обычная, ее род (и род действия Θ) равен единице, и при этом $\Theta^l=E$ или $\Theta^{-1}=\Theta^{l-1}$. Но обратное заключение неверно: если род подстановки и действия равен 1, то отсюда еще не следует, что подстановка обычная, а действие однозначно обратимо; а именно: из равенства $\Theta^{l+1}=\Theta$ еще не следует, что $\Theta^l=E$; может случиться, что циклы в этой подстановке имеют одночленные хвосты.

Очевидно, что $E^i=E$; но это свойство не характерно для тождественного действия, а именно: если в циклах для действия Θ все ядра и все хвосты одночленны, то для этого действия (и для соответствующей подстановки (2) тоже $\Theta^2=\Theta$, хотя $\Theta\neq E$. Такое действие (и соответствующую ему подстановку) назовем идемпотентным. Докажем, что среди степеней всякого действия имеется всегда одно, и только одно идемпотентное действие. Так, по (6a) имеем:

$$\Theta^{k+l+1}=\Theta^{k+1},\quad \Theta^{k+l+2}=\Theta^{k+2},$$

вообще $\Theta^{k+l+\lambda}=\Theta^{k+\lambda}$ при всяком λ; при $\lambda=l$ $\Theta^{k+2l}=\Theta^{k+l}=\Theta^k$; отсюда вообще при всяких λ и μ

$$\Theta^{k+\mu l+\lambda}=\Theta^{k+\lambda} \tag{7}$$

выберем λ так, чтобы было:

$$k+\mu l+\lambda=2(k+\lambda);$$

для этого должно быть: $\lambda=\mu l-k$, при этом μ таково, что $\mu l\geq k$. По (7) при различных μ получаем одно и то же действие $\Theta^{\mu l}$, причем $(\Theta^{\mu l})^2=\Theta^{2\mu l}=\Theta^{\mu l}$, т. е. $\Theta^{\mu l}$ идемпотентно.

Композиция подстановок

§ 5. Вернемся еще раз к обобщенной подстановке A:

$$A=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\dots\alpha_n\\ \alpha_1' & \alpha_2' & \alpha_3'\dots\alpha_n'\end{pmatrix}; \tag{8}$$

здесь $\alpha_1', \alpha_2',\dots\alpha_n'$ — те же элементы $\alpha_1, \alpha_2\dots\alpha_n$, только в ином порядке и (если A действительно обобщенная подстановка) не все, в то время как некоторые повторяются больше одного раза. В такой подстановке обязательно имеет место случай, когда два различных элемента α_x и α_λ переходят в один и тот же элемент, или, если вернемся к соответствующему действию Θ, когда $\Theta\alpha_x=\Theta\alpha_\lambda$ при $\alpha_x\neq\alpha_\lambda$.

Такие два элемента α_x и α_λ назовем сопряженными в подстановке A, а самый этот факт — сопряжением. Если несколько, например, λ различных элементов переходят в один и тот же в данной подстановке A, например, если $\Theta\alpha_1=\Theta\alpha_2=\dots=\Theta\alpha_\lambda$, то этот факт мы обозначим, как $\lambda-1$ сопряжение. Число всех сопряжений подстановки A, сложенное с числом различных элементов в нижней строке A, очевидно, даст в сумме n (число всех элементов верхней строки).

Если Θ_1 и Θ_2 два (различных или одинаковых) действия над теми же самыми элементами $\alpha_1, \alpha_2,\dots\alpha_n$, то последовательное производство действий Θ_1 и Θ_2 дает новое действие $\Theta_2\Theta_1$, определяемое формулой: $\Theta_2\Theta_1\alpha=\Theta_2(\Theta_1\alpha)$ для всякого α. Этой композиции действий соответствует композиция подстановок: если действию Θ_1 соответствует подстановка A_1, а действию Θ_2 — подстановка A_2, то действию $\Theta_2\Theta_1$ соответствует „произведение" подстановок: A_1A_2. Для этого символического умножения (композиции) действий и подстановок коммутативный закон неверен, но ассоциативный закон верен; именно, пусть $\Theta_1\alpha=\alpha'$, $\Theta_2\alpha'=\alpha''$, $\Theta_3\alpha''=\alpha'''$, тогда: $(\Theta_1\Theta_2)\Theta_3\alpha=\Theta_1(\Theta_2\Theta_3)\alpha=\alpha'''$ — для вся-