

О. ТИТЬЕНС

Гидро- и аэромеханика

Том 1

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 53
ББК 22.3
О-11

О-11 **О. Титъенс**
Гидро- и аэромеханика: Том 1 / О. Титъенс – М.: Книга по Требованию, 2013. – 224 с.

ISBN 978-5-458-34229-2

В своих лекциях Людвиг Прандтль дает в простом, ясном и строго научном изложении те части гидромеханики, которые, главным образом необходимы для научной разработки вопросов воздухоплавания и гидравлики. В книге славного геттингенского профессора инженеры найдут надежный фундамент в своей практической деятельности, а научные работники получат прекрасное руководство к дальнейшим научным изысканиям.

ISBN 978-5-458-34229-2

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2013
© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2013

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первоизданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

ПРЕДИСЛОВИЕ*

Подразделение учения о течениях на более теоретическую и более практическую части объясняется тем, что материал для этой книги составили два различных курса лекций, именно: более математический курс «Гидродинамика и аэродинамика» и более практический, ориентированный на вопросы аэротехники, курс «Аэромеханика». Впрочем, подразделение книги О. Титъенсом на два тома не вполне соответствует указанному подразделению лекций. Так, главы первого тома о состояниях свободной атмосферы и о газонаполненных воздушных кораблях принадлежат к «Аэромеханике», а некоторые более теоретические главы второго тома -- к «Гидродинамике и аэродинамике». Второй том, как уже было сказано, несколько выходит за пределы моих лекций.

Относительно основного направления переданных в этой книге моих лекций я должен заметить следующее. Прежде всего я стремился к отчетливой выработке понятий. Отдельные выводы, которые можно найти в других курсах, я или совсем обходил, или намечал их только вкратце. Также и при изложении результатов опыта я обращал больше внимания на то, чтобы на немногих примерах дать ясное представление о рассматриваемых вещах, чем на приведение возможно большего числа отдельных фактов, о которых можно найти достаточно сведений в специальной литературе. Я надеюсь, что настоящая книга благодаря своему своеобразию займет особое место среди имеющихся сейчас книг, посвященных учению о течениях, и желаю ей на этом пути успеха.

Л. Прандтль.

Геттинген, май 1929 г.

ОГЛАВЛЕНИЕ.

	<i>Стр.</i>
Предисловие редактора перевода	3
Предисловие к немецкому изданию	4
Введение	9

Определение понятий (9). Исторические замечания (10).

ОТДЕЛ ПЕРВЫЙ.

Статика жидкостей и газов.

I. Равновесие и устойчивость	13
<p>1. Основания, по которым жидкости и газы можно рассматривать как сплошные среды (13). 2. Понятие давления жидкости (17). 3. Связь между распределением давления и объемной силой (20). 4. Устойчивость положений равновесия (23). 5. Гидростатическое уравнение давления (24). 6. Применения гидростатического уравнения давления. Сообщающиеся сосуды (26). 7. Гидростатическое давление на стенки и дно (27). 8. Гидростатическая подъемная сила и устойчивость (29). 9. Определение метacentрической высоты (31).</p>	
II. Применение уравнения давления к идеальным газам. Устойчивость воздушных масс	33
<p>10. Уравнение состояния для идеальных газов (33). 11. Однородная атмосфера (34). 12. Изотермическая атмосфера (35). 13. Политропная атмосфера (36). 14. Определение показателя n степени политропы (37). 15. Значение температурного градиента для устойчивости воздушных масс (39). 16. Влияние влажности (41). 17. Понятие потенциальной температуры (42). 18. Образование облаков (45).</p>	
III. Статическая подъемная сила газонаполненных воздушных кораблей	48
<p>19. Давление на стенку аэростата (48). 20. Подъемная сила газонаполненного аэростата (49). 21. Значение температуры для подъемной силы (50). 22. Равновесие сил, приложенных к аэростату (51). 23. Устойчивость аэростата, находящегося в выполненном состоянии, при адиабатических изменениях состояния (52). 24. Устойчивость аэростата, находящегося в невыполненном состоянии, при адиабатических изменениях состояния (54). 25. Влияние температурных изменений при постоянном давлении на аэростат, находящийся в выполненном состоянии (55). 26. Влияние температурных изменений при постоянном давлении на аэростат, находящийся в невыполненном состоянии (57). 27. Причины притока или отдачи тепла; поведение аэростата во время полета (59).</p>	

IV. Поверхностное натяжение	Стр. 60
28. Физические положения (60). 29. Связь между поверхностным натяжением и разностью давлений на обеих сторонах поверхности жидкости (61). 30. Поверхностное натяжение при соприкосновении многих средин (62). 31. Поверхностное натяжение под влиянием силы тяжести (63). 32. Капиллярность (64).	

ОТДЕЛ ВТОРОЙ.

Кинематика жидкостей и газов.

V. Методы представления явлений движения жидкости	66
33. Лагранжево представление (66). 34. Эйлерово представление и его связь с методом Лагранжа (68). 35. Линии тока и траектории; установившиеся явления движения (69). 36. Линии отмеченных частиц (69). 37. Значение системы отсчета для формы движения (71). 38. Построение траекторий и линий отмеченных частиц (71). 39. Трубка тока (73).	
I. Геометрия векторных полей	73
40. Линейная векторная функция точки (73). 41. Геометрическое значение отдельных величин матрицы, определяющей скоростное поле (74). 42. Скорость сдвига и скорость растяжения (76). 43. Понятие аффинора (77). 44. Разложение аффинора на симметричную и антисимметричную части (78). 45. Теорема Стокса (80). 46. Теорема Гаусса (83). 47. Введение оператора ∇ (набла) (84).	
VII. Ускорение частицы жидкости и кинематические пограничные условия	87
48. Зависимость изменения величин, определяющих состояние частицы жидкости, от времени и скоростного поля (87). 49. Субстанциальная производная равна локальной производной плюс конвективная производная (87). 50. Кинематические пограничные условия; теорема Лагранжа (99). 51. Жидкости и газы следует рассматривать не как идеальные континуумы, а как квази-континуумы (90).	
VIII. Уравнение непрерывности	91
52. Несжимаемые однородные жидкости (91). 53. Сжимаемые жидкости (газы), вывод в эйлеровом представлении (92). 54. Общее уравнение непрерывности в лагранжевом представлении (94).	

ОТДЕЛ ТРЕТИЙ.

Динамика идеальной жидкости.

IX. Уравнение Эйлера и его интегрирование вдоль линии тока	96
55. Общие замечания по поводу действия вязкости жидкостей (96). 56. Уравнение Эйлера (99). 57. Интегрирование уравнения Эйлера вдоль линии тока (101). 58. Уравнение Бернулли (102). 59. Примеры применения уравнения Бернулли (104).	
X. Потенциальное движение	109
60. Упрощение уравнения Эйлера и интегрирование его при наличии потенциала скоростей (109). 61. Связь между интегралом уравнения Эйлера для потенциального движения и соответствующим интегралом	

вдоль линии тока (113). 62. Уравнения, определяющие потенциальную функцию и функцию давления (115). 63. Определение потенциальной функции для несжимаемых жидкостей (116). 64. Определение потенциальной функции для случая, когда скорость w очень мала (117). 65. Потенциальная функция для установившихся движений (118). 66. Определение потенциальной функции для одномерных течений (123). 67. Некоторые простые примеры потенциальных движений несжимаемой жидкости (123). 68. Потенциал источника и стока (128). 69. Определение течений около тел вращения при помощи замены последних источниками и стоками (129). 70. Течение вокруг шара, диполь (132). 71. Потенциал прямолинейной вихревой нити (135). 72. Отличие потенциального движения с циркуляцией от движения жидкости с вращением (137). 73. Понимание потенциала в качестве давления удара (138).	
XI. Плоское потенциальное движение	139
74. Действительная и мнимая части аналитической функции комплексного переменного как решения дифференциального уравнения Лапласа (139). 75. Дифференциальные уравнения Коши-Римана и их физическое значение (140). 76. Функция тока (142). 77. Функция течения $F(z)$ некоторых простых двухмерных движений (142). 78. Течение около прямого кругового цилиндра (147). 79. Понятие конформного отображения (149). 80. Применение конформных отображений к течениям (151). 81. Метод годографа (156). 82. Разрывные движения жидкости (160).	
XII. Вихревое движение	165
83. Кинематика вихревого движения (165). 84. Теорема В. Томсона о постоянстве циркуляции во времени (167). 85. Распространение теоремы Томсона на неоднородные жидкости (170). 86. Динамика вихревого движения (172). 87. Теоремы Гельмгольца о вихрях (173). 88. Скоростное поле в окрестности изолированной вихревой нити, закон Био-Савара (176). 89. Упрощенное построение вихревой нити при помощи предположения о вихревом ядре с постоянной угловой скоростью (182). 90. Движение и взаимодействие отдельных вихревых нитей (183). 91. Распределение давления в окрестности прямолинейного вихря (187). 92. Связь вихревого движения с поверхностями разрыва, или раздела (188). 93. Образование поверхностей разрыва (190). 94. Неустойчивость поверхностей разрыва, или раздела (194).	
XIII. Влияние сжимаемости	195
95. Общие замечания по поводу возможности рассматривать газы как несжимаемые жидкости (195). 96. Уравнение Бернулли для сжимаемых жидкостей; формула для напорного колпака (196). 97. Влияние сжимаемости на формулу динамического давления (198). 98. Уравнение непрерывности для сжимаемых жидкостей (200). 99. Влияние сжимаемости на форму линий тока при течениях со скоростью ниже скорости звука (202).	
XIV. Теоремы импульсов и энергии	203
100. Теорема импульсов для установившихся явлений движения (203). 101. Распространение теоремы импульсов на движения жидкости, «в среднем» установившиеся (209). 102. Применение теоремы импульсов (211). 103. Теорема энергии для неустановившихся движений несжимаемых жидкостей (216).	
Предметный указатель	221

Введение.

Определение понятий. Гидромеханика, заключающая в себе как частный случай аэромеханику, есть механика нетвердых тел.

Нетвердые тела можно подразделить на три группы:

- 1) жидкие тела с большой вязкостью,
- 2) жидкие тела с малой вязкостью,
- 3) газообразные тела.

Однако эти группы переходят одна в другую, и между ними нельзя провести строгого разграничения. Переход от вязких жидкостей к твердым телам совершается тоже постепенно. Если, например, патоке еще приписываются свойства вязкой жидкости, то об асфальте в общепринятой говорят уже как о твердом теле, несмотря на то, что в некоторых случаях (даже при обыкновенной температуре) он ведет себя подобно вязкой жидкости. То или иное его поведение в существенном зависит от скорости происходящей деформации. Если разбить молотком асфальт на куски, то он ведет себя при этом, как твердое тело; скорость деформации в этом случае очень велика. Если же асфальт, помещенный в бочку с открытым боковым отверстием, предоставить долгое время действию его собственного веса, то он начнет постепенно вытекать из бочки подобно очень вязкой жидкости (и при той же температуре, при которой он разбивается на куски); скорость деформации в этом случае очень мала.

В противоположность твердым телам, у которых действующие на них силы вызывают деформации, в общем случае пропорциональные этим силам, у нетвердых тел (жидкости и газы) сила, вызывающая определенную деформацию, должна быть тем меньшей, чем меньше скорость деформации. Следовательно, у жидкостей и газов произвольно большие деформации могут быть вызваны чрезвычайно малыми силами, если только скорость деформации будет достаточно малой. Вообще, нетвердые тела можно определить как такие, у которых, в предельном случае бесконечно малой скорости деформации, сила, необходимая для деформации, равна нулю.

Чтобы лучше уяснить себе разницу между жидким телом с большой вязкостью и жидким телом с малой вязкостью, вообразим произвольное твердое тело и заставим его двигаться сначала в такой жидкости, как, например, масло или патока, а затем — в воде, предполагая при этом, что плотность масла или патоки не отличается значительно от плотности воды. В первом случае — случае вязкой жидкости — сила, необходимая для продвижения тела, будет значительно больше той, которая необходима для продвижения того же тела в жидкости с малой вязкостью, каковою является вода. Больше внутреннее трение вязких жидкостей

оказывает деформации, в заданный промежуток времени, значительно большее сопротивление, чем очень малое внутреннее трение таких жидкостей, как вода, алкоголь или эфир.

Жидкие тела с малой вязкостью и газообразные тела отличаются друг от друга в отношении своих форм движения, главным образом, тем, что первые оказывают чрезвычайно большое сопротивление уменьшению своего объема (сжатию) при помощи внешнего давления, т. е. жидкости при умеренных давлениях являются практически несжимаемыми, в то время как газообразные тела могут быть сжаты при помощи даже относительно небольших давлений. Однако в тех случаях, когда изменения давления остаются настолько малыми, что вызываемыми этим изменениями плотности можно пренебречь, жидкие тела с малой вязкостью и газообразные тела подчиняются одним и тем же законам течения. Механику жидких тел с малой вязкостью и газообразных тел, поскольку последние могут рассматриваться тоже как несжимаемые, называют гидро- и аэромеханикой в узком смысле.

Причины значительного изменения объема газообразных тел могут быть двух родов, именно: изменения объема обуславливаются или чрезвычайно большими скоростями (порядка величины скорости звука), или изменениями давления, наступающими, например, при больших изменениях высоты (на 1 км и более). Первый случай наблюдается, например, при полете снарядов; эта область называется газовой динамикой. Со вторым случаем приходится иметь дело в динамической метеорологии.

Таким образом для всей области механики нетвердых тел можно составить следующую схему:



Исторические замечания. Дадим несколько исторических замечаний, которые одновременно объяснят точку зрения, принятую в настоящем изложении гидро- и аэродинамики в узком смысле.

Несмотря на то, что кое-какие знания в области гидромеханики и в особенности в области гидростатики имелись еще в древние и средние

века, — вспомним известный закон Архимеда, — и несмотря на то, что позднее эти знания были углублены и расширены Стевином (Stevin), Галилеем (Galilei) и Ньютоном (Newton), все же настоящим отцом гидромеханики можно считать только Леонарда Эйлера (Leonhard Euler). Он впервые дал ясное определение понятия давления жидкости и, исходя из этого определения, вывел основные уравнения движения, впоследствии названные его именем. Этот великий математик дал, между прочим, правила и указания к конструированию гидравлических машин и турбин.

Позднее, однако, становилось все более и более заметным, что стремительное развитие техники в XIX в. опережает научные знания. Многие новые задачи и вопросы, поставленные в области гидродинамики бурным развитием техники, гидромеханика, развивавшаяся в направлении, указанном Эйлером, не могла не только решить, но даже подойти к их решению. Причиной этого было, главным образом, то, что гидродинамика, исходя от эйлеровых уравнений движения, развивалась все более и более в теоретическом направлении и занималась почти исключительно идеальными, т. е. не обладающими внутренним трением, жидкостями. Из работавших в этом направлении назовем имена Гельмгольца (Helmholtz), лорда Кельвина (Kelvin), Ламба (Lamb), лорда Релей (Rayleigh).

Результаты этой так называемой классической гидродинамики плохо или даже совсем не совпадали с практикой. Так, на чрезвычайно важные вопросы, как велика потеря давления в трубах или сопротивление движущегося в жидкости тела, теоретическая гидродинамика отвечала, что как потеря давления, так и сопротивление по теории равны нулю. Следовательно, для инженеров теоретическая гидродинамика не могла иметь большого значения, так как, с одной стороны, для ее понимания требовались большие математические познания, а с другой стороны — возможность ее применения на практике была очень мала. В результате этого на основании громадного опытного материала создалась трудами инженеров, — назовем имена Д. Бернулли (D. Bernoulli), Гагена (Hagen), Вэйсбаха (Weissbach), Дарси (Darcy), Базена (Bazin), Буссине (Boussinesq), — новая наука — гидравлика, которая в отношении своих методов и целей постепенно все более и более стала отличаться от гидродинамики.

Методы классической гидродинамики обладали специфически аналитической природой, гидравлика же стала применять, главным образом, синтетические методы. Гидродинамика исходила из простого основного представления и, приписывая жидкости определенные механические свойства, пыталась чисто аналитическим путем перейти от поведения элемента жидкости к поведению всей массы жидкости. По-другому стала поступать гидравлика: исходя из элементарных опытных данных, она поставила перед собой задачу объяснить на их основе более сложные явления. Короче говоря, гидродинамика исходила из упрощенных законов природы, гидравлика же — из явлений природы.

Это различие в методах и исходных точках обеих наук было тесно связано с их целями. В классической гидродинамике единственным правилом было логическое построение, и поэтому от нее ускользало все, что не могло быть выведено из исходных уравнений путем математического анализа. Напротив, задачей и целью гидравлики было дать ответ по возможности для каждого отдельного случая практики, не останавливаясь при этом на внутренней связи между отдельными проблемами.

Теоретическая гидродинамика стала терять свое значение, так как результаты ее расчетов во многих случаях были прямо противоположны действительности; для возможности математического исследования проблем вводились упрощения (особенно в отношении отсутствия трения), которые в качестве приближений часто были непозволительны. С другой стороны, гидравлика распалась на ряд отдельных проблем. Каждый из все чаще возникающих вопросов решался при помощи специальных экспериментов и путем введения коэффициентов, найденных на основании этих экспериментов. Гидравлика становилась все более и более наукой о коэффициентах.

В конце XIX в. и в начале XX в. с обеих сторон возникло к этому критическое отношение, и зародилось стремление сблизить и соединить оба разошедшихся в разные стороны научных направления. Под воздействием быстро развившейся авиационной техники и турбиностроения, а также под влиянием тесно связанного с именем Ф. Клейна (F. Klein) известного общего направления, поставившего своей задачей восстановить утерянную связь между чистыми науками и прикладными, синтез гидродинамики и гидравлики сделал большие успехи.

В связи с этими замечаниями о развитии гидродинамики нетрудно представить себе, каковым должно быть последующее изложение. Именно, в основание должен быть положен синтез теории и практики. Теоретические рассуждения и выводы должны делаться не независимо от опытных данных, а наоборот, — в тесной связи с последними; с другой стороны, результаты экспериментов должны рассматриваться прежде всего с такой точки зрения, чтобы из многообразия опыта вывести лежащий в основе явлений закон и связать его с теорией.

Отдел первый.

Статика жидкостей и газов.

I. Равновесие и устойчивость.

1. Основания, по которым жидкости и газы можно рассматривать как сплошные среды. Прежде всего выясним, каким способом возможно описать движения жидкостей и газов и возникающие при этом закономерности. Очень общее описание движения жидкости, понимаемой как материя с молекулярной структурой, заключалось бы в составлении уравнений движения для всех отдельных молекул. Однако, не говоря о том, что внутримолекулярные силы нам неизвестны и что даже при знании этих сил мы были бы далеки от возможности решения этой проблемы в такой общности (проблема о трех телах!), нас интересует вовсе не движение молекул или мельчайших частиц жидкости. Напротив, дело идет о том, как движется жидкость в целом или как ведут себя такие ее части, которые содержат много молекул; какие возникают скорости или ускорения, какую плотностью или температурой обладают жидкость или газ в определенных местах. Другими словами, мы спрашиваем не о состояниях движения самих молекул, а о средних значениях в пространстве и во времени этих состояний.

Выясним теперь, как можно составить эти средние значения и в каких случаях такой возможности нет, т. е. в каких случаях не имеет смысла спрашивать об этих средних значениях, например о плотности или температуре жидкости. Для примера остановимся на понятии плотности.

Возьмем какую-нибудь жидкость (или газ) и будем рассматривать ее как систему отдельных материальных точек (молекул), занимающих в пространстве объем V . Тогда под средней плотностью этой системы понимают частное от деления суммы m масс всех точек, содержащихся в объеме V , на объем V , т. е. среднюю плотность для объема V считают равной $\frac{m}{V}$:

Но как следует определить плотность в одной какой-нибудь точке жидкости или газа? Пусть требуется составить выражение плотности для точки A внутри жидкости. Будем ограничивать точку A все меньшими и меньшими объемами $\Delta V_1, \Delta V_2, \dots$, из которых каждый следующий пусть целиком содержится в предыдущем ($\Delta V_{i+1} < \Delta V_i$). Обозначив суммы масс,

содержащихся в объемах ΔV_i , соответственно через Δm_i , будем иметь последовательность отношений $\frac{\Delta m_i}{\Delta V_i}$.

В то время как для относительно больших ΔV средняя плотность в общем случае зависит от величины ΔV (допустим, что мы имеем перед собой газ или жидкость с не повсюду постоянной плотностью), с уменьшением величины ΔV эта зависимость становится обыкновенно меньше и начинает стремиться к некоторому предельному значению (так как в общем случае для достаточно малых объемов плотность можно считать постоянной); но при дальнейшем уменьшении наступают все большие и большие колебания, и, наконец, при $\lim \Delta V = 0$ отношение $\frac{\Delta m}{\Delta V}$ либо тоже делается равным нулю, либо превышает всякие границы. Объясняется это тем, что в пределе точка A либо совпадает с материальной точкой, либо нет. В первом случае, вследствие конечного расстояния между материальными точками, числитель дроби $\frac{\Delta m}{\Delta V}$, начиная с определенного ΔV , становится постоянным, именно равным массе материальной точки A , в то время как знаменатель в пределе делается равным нулю, и вместе с этим частное $\frac{\Delta m_i}{\Delta V_i}$ возрастает сверх всяких границ. Во втором случае, когда A не совпадает с материальной точкой, в объеме ΔV , начиная с определенного ΔV_i , не будет содержаться ни одной материальной точки, так что частное $\frac{\Delta m_i}{\Delta V_i}$, начиная с этого ΔV_i , делается равным нулю и, следовательно, имеет нуль своим предельным значением.

Теперь возникает вопрос, может ли величина того объема, для которого $\frac{\Delta m}{\Delta V}$ не зависит от ΔV , быть принятой с достаточной точностью за «физическую точку», т. е. такую, объем которой настолько мал, что его величиной можно полностью пренебречь по сравнению с другими имеющимися размерами. Так как при нормальных давлениях в 1 кубическом сантиметре, например, воздуха содержится $2,7 \cdot 10^{19}$ молекул, то отсюда видно, что в указанном отношении в общем случае практически не встречается никаких трудностей. На самом деле, если для примера взять объем воздуха в 10^{-12} см^3 , или с наибольшим линейным размером в $\frac{1}{1000} \text{ мм}$, т. е. объем, величиной которого по сравнению с другими встречающимися размерами в общем случае можно пренебречь, то такая «физическая точка» содержит в себе $2,7 \cdot 10^7$ молекул — количество, еще весьма хорошо допускающее правильное составление среднего значения.

По-другому будет обстоять дело, если рассматривать газы, находящиеся под очень низким давлением, т. е. сильно разреженные. Здесь вследствие больших средних расстояний между отдельными молекулами весьма часто будут наблюдаться случаи, когда объемы ΔV^0 , необходимые для надежного составления среднего значения, окажутся столь большими, что уже нельзя будет пренебречь их величиной по сравнению с остальными размерами. Следовательно, здесь теряется всякий смысл спрашивать о плотности газа в какой-нибудь точке.

Если кривую (фиг. 1), изображающую связь между средней плотностью и объемом ΔV (к которому средняя плотность относится), про-