

Механика в СССР за 50 лет

Том 3. Механика деформируемого твердого тела

УДК 53
ББК 22.3
М55

М55 Механика в СССР за 50 лет: Том 3. Механика деформируемого твердого тела / – М.: Книга по Требованию, 2021. – 480 с.

ISBN 978-5-458-50769-1

ISBN 978-5-458-50769-1

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2021
© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2021

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первоизданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

ЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ*)

*А. И. КАЛАНДИЯ, А. И. ЛУРЬЕ, Г. Ф. МАНДЖАВИДЗЕ,
В. К. ПРОКОПОВ, Я. С. УФЛЯНД*

(под общей редакцией А. И. Лурье)

§ 1. Общие решения и теоремы существования	5
1.1. Общие решения	5
1.2. Тензор функций напряжений	9
1.3. Интегральные уравнения пространственной задачи	12
§ 2. Пространственные задачи теории упругости	17
§ 3. Задачи Сен-Венана и Альманзи	25
§ 4. Смешанные пространственные задачи статики упругого тела	33
§ 5. Постановка и методы решения задач плоской теории упругости	40
5.1. Общие комплексные представления решения плоской задачи	40
5.2. Формулировка основных задач плоской теории упругости	41
5.3. Методы решения плоских задач	44
§ 6. Основные результаты исследования задач плоской теории упругости	56
6.1. Решение основных задач для однородной среды	56
6.2. Кусочно-однородная среда. Подкрепленные и усиленные пластинки	62
6.3. Смешанные и контактные задачи	66
6.4. Плоская статическая задача теории упругости анизотропного тела	67
6.5. Равновесие хрупких тел с трещинами	69

§ 1. Общие решения и теоремы существования

1.1. Общие решения. В задаче о равновесии упругого тела при отсутствии массовых сил разыскиваются общие выражения (перемещений или напряжений), удовлетворяющие по возможности простым дифференциальным уравнениям и построенные так, чтобы уравнения теории упругости выполнялись в силу этих простых уравнений. Роль «простых» играют уравнения Лапласа и бигармоническое; при этом желательно иметь наименьшее число функций. Знание общих решений позволяет при

*) В настоящем очерке дается обзор исследований по классической (линейной) теории упругости в нашей стране за пятьдесят лет. Рассмотрены только статические задачи в их «строгой» постановке.

Недостаток места заставил почти полностью исключить из обзора приближенные методы решения задач теории упругости, основывающиеся на вариационных принципах. Не затронуты здесь и технические теории (стержни, плиты, оболочки), построение которых предполагает использование добавочных гипотез кинематического или статического содержания.

§ 1 и п. 6.5 очерка написаны А. И. Лурье, § 2 и 3 — В. К. Прокоповым, § 4 и п. 5.3.9 — Я. С. Уфляндом, § 5 и 6 — А. И. Каландия и Г. Ф. Манджavidзе.

составлении частных решений уравнений теории упругости использовать хорошо известные «каталоги» решений «простых» уравнений в тех или иных координатах; однако краевые задачи теории упругости, конечно, несводимы, за исключением простейших (полупространство, кручение тела вращения и др.), к задачам типа Дирихле или Неймана для уравнения Лапласа. Ограничение случаем отсутствия массовых сил несущественно, так как построение частного решения, соответствующего этим силам, возможно в общем случае и легко выполняется для их частных заданий (вес, центробежные силы и т. д.). Обзор ранних исследований по общим решениям дан П. Ф. Папковичем (1937); единый способ их построения, основанный на использовании тензора функций напряжений, предложил Ю. А. Крутков (1949).

Внимание к задаче построения общих решений было привлечено опубликованной в 1930 г. статьей Б. Г. Галеркина. Было показано, что уравнениям теории упругости в напряжениях ($\hat{T}$ — тензор напряжений, σ — его первый инвариант)

$$\nabla \cdot \hat{T} = 0, \quad (1 + \nu) \nabla^2 \hat{T} + \nabla \nabla \sigma = 0 \quad (1.1)$$

можно удовлетворить, выражая вектор перемещения u через бигармонический вектор G соотношением

$$2\mu u = \nabla \nabla \cdot G - 2(1 - \nu) \nabla^2 G. \quad (1.2)$$

Это решение с указанием, что из него получаются ранее известные, но без упоминания о его «общности», было предложено Ж. Буссинеском еще в 1889 г. П. Ф. Папкович (1937, 1939) указал, что (1.2) является излишне общим решением уравнения теории упругости в перемещениях

$$(1 - 2\nu) \nabla^2 u + \nabla \nabla \cdot u = 0. \quad (1.3)$$

Это следует из того, что структура уравнения (1.3), при наличии массовой силы в правой части, повторяет структуру решения (1.2). Поэтому, приняв в (1.2) за вектор u решение краевой задачи теории упругости (удовлетворяющей трем условиям на поверхности тела O), мы вправе ожидать, что и вектор G может быть подчинен еще трем условиям на O , что, очевидно, излишне.

Разыскивая вектор перемещения в форме суммы гармонического вектора и градиента скаляра χ

$$u = 4(1 - \nu) B + \nabla \chi, \quad \nabla^2 B = 0,$$

приходим, после подстановки в (1.3), к уравнению $\nabla^2 \chi = -2\nabla \cdot B$; его решение представляется суммой частного решения $\chi = -R \cdot B$ и решения $\chi = -B_0$ уравнения Лапласа (через R обозначен вектор-радиус). Итак,

$$\chi = -(R \cdot B + B_0), \quad u = 4(1 - \nu) B - \nabla (R \cdot B + B_0). \quad (1.4)$$

Такое представление решения уравнения теории упругости было дано П. Ф. Папковичем (1932) и несколько позже Г. Нейбером. По сообщению П. Ф. Папковича, оно ранее было известно Г. Д. Гродскому *). Вектор перемещения (1.4) представлен суммой гармонического вектора B и гармонического скаляра B_0 или через четыре гармонические функции B_0, B_s ($s = 1, 2, 3$), где B_s — проекции B на оси декартовой системы координат. Другая форма записи решения (1.4), принадлежащая

*) Автору этого очерка известна статья Г. Д. Гродского, опубликованная в 1935 г. Намеченный в тексте ход вывода решения (1.4) сообщил автору Г. Ю. Джанелидзе.

И. С. Аржаных (1952) и М. Г. Слободянскому (1954), имеет вид

$$\mathbf{u} = 4(1 - \nu) \mathbf{B} + \mathbf{R} \cdot \nabla \mathbf{B} - \mathbf{R} \nabla \cdot \mathbf{B}. \quad (1.5)$$

Она отличается от (1.4) (когда $B_0 = 0$) гармоническим вектором с равной нулю дивергенцией (т. е. ротором гармонического вектора). Были предложены также формы решения, выраженные через гармонические функции при помощи объемных интегралов от ньютоновых потенциалов; таково представление Тер-Мкртчяна (1947):

$$\mathbf{u} = 4(1 - \nu) \mathbf{B} + \frac{1}{2\pi} \nabla \int_D \frac{\nabla \cdot \mathbf{B}}{R} d\tau. \quad (1.6)$$

Интегральное представление вектора перемещения $\mathbf{u}$ через его дивергенцию и ротор, а также через заданные на поверхности тела значения $\mathbf{u}$ и его нормальной производной $\partial \mathbf{u} / \partial n$ дано И. С. Аржаных (1954).

Поскольку на поверхности O тела задаются лишь три краевых условия, представляется допустимым сохранить в выражении общего решения (1.4) только три гармонические функции, отбросив в нем, например, B_0 или одну из функций B_s (Г. Нейбер). Этот вопрос рассматривал П. Ф. Папкович (1939) и более подробно М. Г. Слободянский (1954).

Включение B_0 в (1.4) излишне, когда вектор ∇B_0 представим через некоторый гармонический вектор $\mathbf{B}^*$ с помощью соотношения

$$\nabla B_0 = 4(1 - \nu) \mathbf{B}^* - \nabla \mathbf{R} \cdot \mathbf{B}^*. \quad (1.7)$$

Но тогда $\nabla \cdot \mathbf{B}^* = 0$, $\nabla \times \mathbf{B}^* = 0$, так что $\mathbf{B}^* = \nabla \Theta$, $\nabla^2 \Theta = 0$ и соотношение (1.7) записывается в виде

$$B_0 = 4(1 - \nu) \Theta - R \frac{\partial \Theta}{\partial R} = \sum_{n=0}^{\infty} R^n Y_n(\theta, \lambda),$$

причем здесь использовано представление гармонической функции B_0 во внутренней односвязной области рядом по гармоническим полиномам $R^n Y_n$. Тогда

$$\Theta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R^n Y_n}{4(1 - \nu) - n} \quad (1.8)$$

и при $n = 3$, $\nu = 0,25$, $B_0 = R^3 Y_3$ соотношению (1.7) нельзя удовлетворить (предполагается, что $0 < \nu < 1/2$). Отсюда, имея в виду теорему Келдыша — Лаврентьева о представимости в конечной односвязной области гармонической функции равномерно сходящимся рядом гармонических полиномов, надо заключить, что представление (1.7) при $\nu = 0,25$ невозможно. Для бесконечной области с полостью в представлении B_0 следует заменить n на $-(n + 1)$, знаменатель в ряде (1.8) $4(1 - \nu) + n + 1$ не обращается в нуль ни при каком целом n и $0 < \nu < 1/2$; отбрасывание B_0 в этом случае законно. Аналогично доказывается, что решение (1.5) является общим для конечной односвязной области, не исключая $\nu = 0,25$, а для бесконечной области с полостью при $\nu \neq 0,25$. Более общие результаты можно найти у М. Г. Слободянского (1954).

Нам представляется, что в решении (1.4), как и в других формах общих решений, следует видеть полезное вспомогательное средство решения краевых задач теории упругости, допускающее непосредственное использование классических частных решений уравнения Лапласа. При построении решения конкретной задачи сохранение четвертой гармонической

функции облегчает выбор этих решений, поэтому нет нужды от нее отказываться (А. И. Лурье, 1955).

В. И. Блох (1958) исходит из представления вектора перемещения $\mathbf{u}$ в форме суммы гармонического вектора и градиента скаляра χ . Решение (1.4) содержится в представлении Блоха при $\chi = -(\mathbf{R} \cdot \mathbf{B} + B_0)$; полагая $\chi = -R^2 \nabla \cdot \mathbf{C}$, где $\mathbf{C}$ — гармонический вектор, Блох приходит к представлению

$$\mathbf{u} = 2(1 - 2\nu) \mathbf{R} \nabla \cdot \mathbf{C} - 4(1 - \nu) \mathbf{R} \times (\nabla \times \mathbf{C}) - R^2 \nabla \nabla \cdot \mathbf{C}, \quad (1.9)$$

которое можно дополнить градиентом гармонического скаляра и ротором гармонического вектора. В представление Блоха внесены еще слагаемые, выраженные через три плоские гармонические функции.

Формы решений, указанные И. С. Аржаных (1954) и Ф. С. Чуриковым (1953),

$$2\mu \mathbf{u} = (1 - 2\nu) \mathbf{B} - \frac{1}{2} \nabla \times (\mathbf{R} \times \mathbf{B}) \quad (1.10)$$

не отличаются от (1.5).

Более общая форма указана В. М. Деевым (1959):

$$2\mu \mathbf{u} = [(4\nu - 3)\beta + 4(1 - \nu)(\varepsilon - \delta)] \mathbf{B} + \beta (\nabla \mathbf{B}) \cdot \mathbf{R} + [2(4\nu - 3)\varepsilon - \delta] \mathbf{R} \cdot \nabla \mathbf{B} + \varepsilon R^2 \nabla \nabla \cdot \mathbf{B}, \quad (1.11)$$

причем β , ε , δ — постоянные, которыми можно распоряжаться произвольно. При надлежащем выборе этих постоянных возвращаемся к решениям (1.4), (1.5), (1.9). В (1.11) содержится также решение

$$2\mu \mathbf{u} = 4(1 - \nu) \mathbf{B} + \frac{2(4\nu - 3)}{7 - 8\nu} \mathbf{R} \nabla \cdot \mathbf{B} + \frac{1}{7 - 8\nu} R \nabla \nabla^2 \cdot \mathbf{B}, \quad (1.12)$$

выражающееся через гармонический вектор $\mathbf{B}$ и его дивергенцию $\nabla \cdot \mathbf{B}$.

Известное решение О. Лява для случая аксиальной симметрии (вокруг оси z) следует из (1.2), если принять $G_z = \chi(r, z)$, $G_x = 0$, $G_y = 0$. Более общее представление решения в цилиндрических координатах (через гармоническую и бигармоническую функции) дано С. Г. Гутманом (1948).

Для многосвязной области D_0 , ограниченной извне поверхностью O_0 и изнутри поверхностями O_i ($i = 1, \dots, k$), целиком лежащими в D и не имеющими общих точек между собой и с O_0 , вектор перемещения при $\nu \neq 0,25$ представим в виде (М. Г. Слободянский, 1959)

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_{(0)} + \sum_{i=1}^k \mathbf{u}_{(i)}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \sum_{i=1}^k \mathbf{B}_{(i)},$$

$$\mathbf{u}_0 = 4(1 - \nu) \mathbf{B}_{(0)} - \nabla \mathbf{R} \cdot \mathbf{B}_{(0)}, \quad \mathbf{u}_{(i)} = 4(1 - \nu) \mathbf{B}_{(i)} - \nabla \mathbf{R}_{(i)} \cdot \mathbf{B}_{(i)},$$

где $\mathbf{B}_{(i)}$ — вектор, гармонический в области, внешней к O_i , а $\mathbf{B}_{(0)}$ — гармонический в D_0 , причем начало Ω_i вектора $\mathbf{R}_i$ расположено внутри полости, ограниченной поверхностью O_i . Форма этого решения — «полная», если луч из Ω_i пересекает O_i в одной точке; она будет «общей», когда O_i — замкнутая поверхность Ляпунова *).

Следует еще отметить, что задача построения «общих решений» системы линейных дифференциальных уравнений вида

$$\sum_{j=1}^n L_{ij} u_j = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

*) О различии «полной» и «общей» форм решения см. М. Г. Слободянский (1959).

(в ней L_{ij} — линейные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами по переменным $x_1, x_2, \dots, x_m$) сводится (А. И. Лурье, 1937; позже (1953 г.) румынский ученый Г. Моизил) к разысканию «потенциалов» φ_s ($s = 1, \dots, n$), через которые решения u_j выражаются с помощью соотношений вида

$$u_j = \sum_{s=1}^n M_{sj} \varphi_s \quad (j = 1, 2, \dots, n).$$

Здесь M_{sj} — искомые линейные дифференциальные операторы, а каждый из потенциалов φ_s удовлетворяет одному и тому же дифференциальному уравнению

$$K \varphi_s = 0 \quad (s = 1, 2, \dots, n).$$

Легко усмотреть, что оператор $K = |L_{ij}|$ представляет определитель квадратной матрицы операторов L_{ij} , а M_{sj} — алгебраические дополнения j -го столбца этого определителя. В применении к уравнениям теории упругости в перемещениях для изотропного тела описанное вычисление приводит к решению (1.2) Галеркина — Буссинеска. Очевидно, что способ применим к анизотропной среде, к динамическим уравнениям теории упругости и т. д.

1.2. Тензор функций напряжений. Напомним, что ротор транспонированного ротора тензора $\hat{\Phi}$ называется тензором несовместимости (Ink) над $\hat{\Phi}$:

$$\text{Ink} \hat{\Phi} = \nabla \times (\nabla \times \hat{\Phi})^T. \quad (1.13)$$

Это — симметричный тензор, если симметричен тензор $\hat{\Phi}$. Другое представление $\text{Ink} \hat{\Phi}$ имеет вид

$$\text{Ink} \hat{\Phi} = -\nabla^2 \hat{\Phi} + 2 \text{def} \nabla \cdot \hat{\Phi} - \hat{E} \nabla \cdot \nabla \cdot \hat{\Phi} - (\hat{E} \nabla^2 - \nabla \nabla) \hat{\Phi}. \quad (1.14)$$

Здесь $\hat{E}$ — единичный тензор, $\Phi = I_1(\hat{\Phi})$ — первый инвариант $\hat{\Phi}$; $\text{def} \mathbf{a} = 1/2 (\nabla \mathbf{a} + \nabla \mathbf{a}^T)$ — операция над вектором $\mathbf{a}$, называемая «деформацией» этого вектора. Примером служит линейный тензор деформации $\hat{\mathcal{E}} = \text{def} \mathbf{u}$. Условия сплошности (зависимости Сен-Венана) выражают обращение в нуль этого тензора:

$$\text{Ink} \hat{\mathcal{E}} = \text{Ink} \text{def} \mathbf{u} = 0. \quad (1.15)$$

Вообще, для всякого вектора $\text{Ink} \text{def} \mathbf{a} = 0$. Наоборот, если $\text{Ink} \hat{\Phi} = 0$, то $\hat{\Phi} = \text{def} \mathbf{a}$ — существует вектор, деформацией которого является тензор $\hat{\Phi}$.

В частности, для тензора $\hat{E} \hat{\Phi} = \hat{E} I_1(\hat{\Phi})$

$$\text{Ink} \hat{E} \hat{\Phi} = (\hat{E} \nabla^2 - \nabla \nabla) \hat{\Phi}, \quad (1.16)$$

а для тензора с равной нулю дивергенцией ($\nabla \cdot \hat{\Phi} = 0$)

$$\text{Ink} \hat{\Phi} = -\nabla^2 \hat{\Phi} + \text{Ink} \hat{E} \hat{\Phi}. \quad (1.17)$$

При отсутствии объемных сил таким тензором является тензор напряжений $\hat{T}$; вводя обозначение $\sigma = I_1(\hat{T})$, имеем согласно (1.16) и (1.17)

$$\text{Ink} \hat{T} = -\nabla^2 \hat{T} + (\hat{E} \nabla^2 - \nabla \nabla) \sigma \quad (\nabla \cdot \hat{T} = 0). \quad (1.18)$$

Обратившись теперь к закону Гука для изотропного тела

$$2\mu\hat{\mathcal{E}} = \hat{T} - \frac{\nu}{1+\nu}\sigma\hat{E}, \quad (1.19)$$

согласно (1.15) и (1.17) имеем

$$-\nabla^2\hat{T} + \frac{1}{1+\nu}(\hat{E}\nabla^2 - \nabla\nabla)\sigma = 0, \quad \nabla^2\sigma = 0, \quad (1.20)$$

причем второе соотношение получено образованием первого инварианта тензора в левой части (1.20). Итак, получены зависимости Бельтрами — Мичелла

$$\nabla^2\hat{T} + \frac{\nabla\nabla\sigma}{1+\nu} = 0. \quad (1.21)$$

Известно, что тензор с равной нулю дивергенцией представим ротором другого тензора: — если $\nabla \cdot \hat{T} = 0$, то $\hat{T} = \nabla \times \hat{C}$; если, сверх того, тензор $\hat{T}$ симметричен ($\hat{T} = \hat{T}^T$), то, введя еще в рассмотрение симметричный тензор $\hat{\Phi}$, следует принять $\hat{C} = (\nabla \times \hat{\Phi})^T$; тогда $\hat{T} = \nabla \times (\nabla \times \hat{\Phi})^T = = \text{Ink } \hat{\Phi}$, $\hat{T}^T = (\text{Ink } \hat{\Phi})^T = \text{Ink } \hat{\Phi} = \hat{T}$, так как по условию $\hat{\Phi}^T = \hat{\Phi}$. Из этого следует, что уравнения статики сплошной среды при отсутствии массовых сил ($\nabla \cdot \hat{T} = 0$, $\hat{T} = \hat{T}^T$) удовлетворяются, если принять

$$\hat{T} = \text{Ink } \hat{\Phi} \quad (\hat{\Phi} = \hat{\Phi}^T). \quad (1.22)$$

Введенный Ю. А. Крутковым (1949), В. И. Блохом (1964) и Б. Финци тензор $\hat{\Phi}$ называется тензором функций напряжений. Тензор напряжений $\hat{T}$ останется неизменным, если в выражение $\hat{\Phi}$ внесено слагаемое вида $\text{def } \mathbf{a}$, где $\mathbf{a}$ — произвольный вектор. Это позволяет упрощать форму задания тензора $\hat{\Phi}$, сохраняя в его выражении только три компоненты. Таковы представления Максвелла (тензор $\hat{\Phi}$ — диагональный) и Морера (в $\hat{\Phi}$ сохранены только недиагональные компоненты). В книге В. И. Блоха (1964) указаны еще три компонентных задания $\hat{\Phi}$ в декартовых координатах; там же перечислено девять вариантов трехкомпонентных представлений $\hat{\Phi}$ в цилиндрических координатах для случая симметрии вращения (см. также Ю. А. Кротов, 1949, стр. 108).

Преобразование Ю. А. Кротова. Возвращаясь к упругой изотропной среде и учитывая, что по (1.20) и (1.16) $\nabla\nabla\sigma = -\text{Ink } \hat{E}\sigma$, можно представить зависимости Бельтрами — Мичелла в виде

$$\text{Ink} \left(\hat{\Phi} - \frac{\sigma}{1+\nu}\hat{E} \right) = 0, \quad (1.23)$$

так что тензор в скобках является деформацией над некоторым вектором $\mathbf{c}$:

$$\nabla^2\hat{\Phi} - \frac{\sigma}{1+\nu}\hat{E} = \text{def } \mathbf{c}. \quad (1.24)$$

Вместе с тем согласно (1.22)

$$\sigma = I_1 (\text{Ink } \hat{\Phi}) = \nabla^2\Phi - \nabla \cdot \nabla \cdot \hat{\Phi} = \nabla^2\Phi - \nabla \cdot \mathbf{b}, \quad \mathbf{b} = \nabla \cdot \hat{\Phi}, \quad (1.25)$$

и это позволяет записать (1.24) в виде

$$\nabla^2\hat{\Phi} - \frac{\hat{E}}{1+\nu}(\nabla^2\Phi - \nabla \cdot \mathbf{b}) = \text{def } \mathbf{c}. \quad (1.26)$$

Из этого соотношения исключается вектор $\mathbf{c}$; образуя первый инвариант над тензорами в (1.26), приходим к равенству

$$\nabla \cdot \left(\frac{3}{1+\nu} \mathbf{b} - \frac{2-\nu}{1+\nu} \nabla \Phi - \mathbf{c} \right) = 0,$$

выражающему обращение в нуль дивергенции вектора в скобках; этот вектор является поэтому ротором другого вектора, но последний можно включить в состав вектора $\mathbf{b}$. Этим определяется вектор $\mathbf{c}$ и далее $\text{def } \mathbf{c}$; подстановка в (1.25) приводит к уравнению

$$\nabla^2 \hat{\Phi} = \frac{1}{1+\nu} \hat{E} (\nabla^2 \Phi - \nabla \cdot \mathbf{b}) + \frac{3}{1+\nu} \text{def } \mathbf{b} - \frac{2-\nu}{1-\nu} \nabla \nabla \Phi. \quad (1.27)$$

Исключив теперь $\nabla^2 \hat{\Phi}$ из выражений (1.14), (1.22) и (1.27), приходим к представлению тензора напряжений $\hat{T}$ в упругой изотропной среде:

$$\hat{T} = \frac{\nu}{1+\nu} \hat{E} (\nabla^2 \Phi - \nabla \cdot \mathbf{b}) - \frac{1-2\nu}{1+\nu} (\text{def } \mathbf{b} - \nabla \nabla \Phi). \quad (1.28)$$

Теперь согласно (1.19) определяются тензор деформации $\hat{\mathcal{E}}$ и по нему вектор перемещения $\mathbf{u}$ (отбрасывается перемещение твердого тела):

$$2\mu \hat{\mathcal{E}} = \frac{1-2\nu}{1+\nu} \text{def } (\nabla \Phi - \mathbf{b}), \quad 2\mu \mathbf{u} = \frac{1-2\nu}{1+\nu} \nabla \Phi - \mathbf{b}. \quad (1.29)$$

Формулы Ю. А. Круткова (1.28) и (1.29) представляют одну из форм общего решения уравнений линейной теории упругости; ими определяются по тензору функций напряжений $\hat{\Phi}$, удовлетворяющему дифференциальному уравнению (1.27), тензор напряжений $\hat{T}$ и вектор перемещения $\mathbf{u}$. Последние оказались зависящими только от $I_1(\hat{\Phi}) = \Phi$ и $\mathbf{b} = \nabla \cdot \hat{\Phi}$. Поэтому достаточно, обратившись к (1.27), установить соотношение связи только между этими величинами. К нему можно прийти, составив дивергенцию в левой и правой частях (1.27):

$$\nabla^2 \mathbf{b} + \frac{\nabla \nabla \cdot \mathbf{b}}{1-2\nu} = \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \nabla \nabla^2 \Phi. \quad (1.30)$$

Полагая

$$\mathbf{b} = \nabla^2 \mathbf{G}, \quad \Phi = \frac{\nabla \cdot \mathbf{G}}{2(1-\nu)}, \quad (1.31)$$

мы удовлетворим этому уравнению (1.30), если вектор $\mathbf{G}$ — бигармонический. Согласно (1.29) это приводит к решению (1.2) Галеркина — Буссинеска.

Частным решением уравнения (1.30) служит $\mathbf{b} = \nabla \Phi$, а соответствующее однородное уравнение (при правой части, равной нулю) только значениями постоянных отличается от уравнения (1.3) для вектора перемещения. Поэтому вектор $\mathbf{b}$ может быть построен по типу решения Папковича (1.4):

$$\mathbf{b} = \frac{1+\nu}{1-2\nu} [4(1-\nu) \mathbf{B} - \nabla (\mathbf{R} \cdot \mathbf{B} + B_0)] + \nabla \Phi, \quad (1.32)$$

и подстановка в (1.29) приводит к представлению (1.4) вектора $\mathbf{u}$.

Основываясь на формулах (1.30), (1.28) и (1.29), Ю. А. Крутков получил многочисленные другие «общие решения». Например, если ввести в рассмотрение вектор $\mathbf{K}$ с равной нулю дивергенцией и с ротором,

определяемым через векторы $\mathbf{b}$ и $\nabla\Phi$:

$$\nabla \cdot \mathbf{K} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{K} = \nabla\Phi - \frac{\mathbf{b}}{2(1-\nu)},$$

то согласно (1.29) и (1.30) приходим, отбросив несущественный постоянный множитель, к решению Кирна

$$\mathbf{u} = \nabla \times \mathbf{K} - (1 - 2\nu) \mathbf{b} \quad (\nabla^2 \mathbf{K} = \nabla \times \mathbf{b}, \quad \nabla \cdot \mathbf{K} = 0).$$

1.3. Интегральные уравнения пространственной задачи. Составление интегральных уравнений пространственных краевых задач, преодоление трудностей, связанных с их изучением, доказательство существования и разыскание эффективных способов построения их решений — содержание многолетней работы В. Д. Купрадзе (1963) и его сотрудников. Изложение методов и результатов этих исследований с подробной библиографией содержится также в монографии В. Д. Купрадзе, Т. Г. Гегелия, М. О. Башелейшвили и Т. В. Бурчуладзе, опубликованной в 1968 г.

Далее в этом очерке будут рассмотрены лишь первая и вторая краевые задачи пространственной теории упругости для изотропной однородной среды. Мы ограничимся при этом внутренней задачей (i) для односвязного конечного объема (V_i) и внешней (e) для бесконечной среды (V_e), снабженной полостью. Предполагается гладкость поверхности O , ограничивающей V_i извне (V_e — изнутри).

Потенциалы теории упругости. В рассмотрение вводится тензор Кельвина — Соммильяны $\hat{U}(M, Q)$, определяющий перемещение $\mathbf{u}(M, Q)$ точки M неограниченной упругой среды, вызываемое действием единичной сосредоточенной силы $\mathbf{e}$ в точке Q :

$$\mathbf{u}(M, Q) = \hat{U}(M, Q) \cdot \mathbf{e}, \quad \hat{U}(M, Q) = \frac{1}{4\pi\mu} \left[\frac{\hat{E}}{R} - \frac{\nabla\nabla R}{4(1-\nu)} \right] \quad (1.33)$$

($\hat{E}$ — единичный тензор, $\mathbf{R} = Q\vec{M} = \mathbf{r}_M - \mathbf{r}_Q$, $R = |\mathbf{R}|$). Вектор $\mathbf{n}_M \cdot \hat{T}$ напряжения на площадке в точке M с нормалью $\mathbf{n}_M$ определяется выражением

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_M \cdot \hat{T} &= \hat{\Phi}(M, Q) \cdot \mathbf{e}, \quad \hat{\Phi}(M, Q) = \\ &= \frac{1}{8\pi(1-\nu)R^3} \left[(1-2\nu)(\mathbf{n}_M \mathbf{R} - \mathbf{R} \mathbf{n}_M) - 2(1-\nu) \hat{E} \mathbf{n}_M \cdot \mathbf{R} - R^3 \mathbf{n}_M \cdot \mathbf{R} \nabla \nabla \frac{1}{R} \right]. \end{aligned} \quad (1.34)$$

Пусть O — замкнутая поверхность ($M \subset O$); тогда

$$\iint_O \mathbf{R} \times \hat{\Phi}(M, Q) d\sigma_M = 0 \quad (1.35)$$

и имеет место обобщенная теорема Гаусса

$$\iint_O \hat{\Phi}(M, Q) d\sigma_M = -\hat{E} \delta(Q), \quad \delta(Q) = \begin{cases} 1 & Q \subset V_i, \\ 1/2 & Q \subset O, \\ 0 & Q \subset V_e \end{cases} \quad (1.36)$$

(V_i — объем внутри O , V_e — вне O).

Из введенных В. Д. Купрадзе векторных потенциалов теории упругости далее рассматриваются два: первый, подобный потенциалу простого слоя $A(Q)$ на поверхности O , и второй, подобный потенциалу двойного

слоя $B(Q)$:

$$A(Q) = \iint_O a(M) \cdot \hat{U}(M, Q) d\sigma_M, \quad (1.37)$$

$$B(Q) = \iint_O b(M) \cdot \hat{\Phi}(M, Q) d\sigma_M. \quad (1.38)$$

Очевидно, что $A(Q)$ и $B(Q)$ при $Q \notin O$ представляют решения уравнения теории упругости в перемещениях при отсутствии массовых сил.

Предельные значения на O изнутри и извне первого потенциала, обозначаемые через

$$A_i(Q_0) = \lim_{V_i \supset Q \rightarrow Q_0} A(Q), \quad A_e(Q_0) = \lim_{V_e \supset Q \rightarrow Q_0} A(Q),$$

равны его прямому значению, определяемому несобственным сходящимся интегралом

$$A(Q_0) = \iint_O a(M)_0 \cdot \hat{U}(M, Q_0) d\sigma_M. \quad (1.39)$$

Для предельных значений второго потенциала имеют место соотношения

$$B_i(Q_0) = B(Q_0) - \frac{1}{2} b(Q_0), \quad B_e(Q_0) = B(Q_0) + \frac{1}{2} b(Q_0), \quad (1.40)$$

аналогичные формулам Племели, причем прямое значение определяется интегралом, сходящимся лишь в смысле главного значения:

$$B(Q_0) = \iint_O b(M) \cdot \hat{\Phi}(M, Q_0) d\sigma_M = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_{O - \hat{O}(Q_0, \varepsilon)} b(M) \cdot \hat{\Phi}(M, Q_0) d\sigma_M$$

($O(Q_0, \varepsilon)$ — окрестность на O точки Q_0 с диаметром 2ε).

При достаточном удалении точки $Q \in V_e$ от поверхности O , $R \rightarrow -r_Q$, согласно (1.33) и (1.37) имеем ($e_Q = r_Q/r_Q$)

$$\lim_{Q \rightarrow Q_\infty} A(Q) = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)r_Q} [(3-4\nu)\hat{E} - e_Q e_Q] \cdot \iint_O a(M) d\sigma_M;$$

это — вектор перемещения в Q под действием приложенной в начале координат силы, задаваемой интегралом по O от плотности $a(M)$.

Второй потенциал при $Q \rightarrow Q_\infty$ обращается в нуль не медленнее, чем r_Q^{-2} , и его можно трактовать как перемещение, создаваемое системой сил, распределенных по поверхности O , с равным нулю главным вектором.

Интегральные уравнения. В первой краевой задаче вектор перемещения $u(Q)$, принимающий заданное значение $v(Q_0)$ на поверхности O (объема V_i во внутренней задаче, полости во внешней задаче), разыскивается в форме второго потенциала теории упругости с неизвестной плотностью $b(M)$:

$$u(Q) = B(Q) = \iint_O b(M) \cdot \hat{\Phi}(M, Q) d\sigma_M. \quad (1.41)$$

В случае внешней задачи это представление предполагает, что $u(Q_\infty)$ имеет порядок r_Q^{-2} ; главный вектор сил, которые должны быть распределены по поверхности O полости, чтобы сообщить ее точкам вектор

перемещения $\mathbf{v}(Q_0)$, должен быть равен нулю. Поэтому решение первой внешней краевой задачи в форме (1.41) может существовать только при специальном задании $\mathbf{v}(Q_0)$, а в общем случае решение будет представлено суммой (1.41) и потенциала простого слоя (решения «эластостатической задачи Робена»).

Интегральные уравнения внутренней (i) и внешней (e) задач получаются из задания (1.41) путем предельного перехода $\lim_{Q \rightarrow Q_0} \mathbf{u}(Q) = \mathbf{v}(Q_0)$ с помощью формул Племели (1.40):

$$I^{(i)} \dots \frac{1}{2} \mathbf{b}(Q_0) - \iint_O \mathbf{b}(M) \cdot \hat{\Phi}(M, Q_0) d\sigma_M = -\mathbf{v}(Q_0), \quad (1.42)$$

$$I^{(e)} \dots \frac{1}{2} \mathbf{b}(Q_0) + \iint_O \mathbf{b}(M) \cdot \hat{\Phi}(M, Q_0) d\sigma_M = \mathbf{v}(Q_0). \quad (1.43)$$

Несложно проверить, сославшись на (1.30) и (1.36) при $\delta(Q) = 1/2$, что задание $\mathbf{b}(M)$ в форме перемещения твердого тела

$$\mathbf{b}^*(M) = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_M = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{Q_0} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R} \quad (1.44)$$

является решением однородного уравнения, соответствующего (1.43),

$$I_0^{(e)} \dots \frac{1}{2} \mathbf{b}^*(Q_0) = \iint_O \mathbf{b}^*(M) \cdot \hat{\Phi}(M, Q_0) d\sigma_M = 0. \quad (1.45)$$

Вместе с тем $\mathbf{b}(M) = -\mathbf{b}^*(M)$ является решением уравнения (1.42), когда поверхность O перемещается как твердое тело, тогда весь объем V_i также перемещается как твердое тело; что следует из (1.41) и (1.36) при $\delta(Q) = 1$.

Во второй краевой задаче на O задаются поверхностные силы $\mathbf{F} = (\mathbf{n} \cdot \hat{T})_0$, а вектор перемещения разыскивается в форме первого потенциала

$$\mathbf{u}(Q) = \iint_O \mathbf{a}(M) \cdot \hat{U}(M, Q) d\sigma_M. \quad (1.46)$$

Используя (1.34) после опущенных здесь (но нетривиальных) преобразований, приходим к интегральным уравнениям

$$\Pi^{(i)} \dots \frac{1}{2} \mathbf{a}(Q_0) + \iint_O \hat{\Phi}(Q_0, M) \cdot \mathbf{a}(M) d\sigma_M = \mathbf{F}(Q_0) = (\mathbf{n}_Q \cdot \hat{T})_0, \quad (1.47)$$

$$\Pi^{(e)} \dots \frac{1}{2} \mathbf{a}(Q_0) - \iint_O \hat{\Phi}(Q_0, M) \cdot \mathbf{a}(M) d\sigma_M = -\mathbf{F}(Q_0) = (\mathbf{n}_Q \cdot \hat{T})_0, \quad (1.48)$$

причем $\mathbf{n}_Q$ — нормаль, внешняя к V_i .

Выше указывалось, что интегралы в векторных уравнениях (1.42)—(1.43), (1.47)—(1.48) рассматриваются в смысле их главных значений — эти системы уравнений сингулярны. Трудность дальнейшего исследования состоит в доказательствах применимости к ним теорем и альтернативы Фредгольма (при μ и ν , обеспечивающих положительность потенциальной энергии деформации); см. В. Д. Купрадзе (1963, 1968), а также С. Г. Михлин (1962).