

Н.Н. Боголюбов, С.Н. Мергелян

Советская математическая школа

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 51
ББК 22.1
Н11

Н11 **Н.Н. Боголюбов**
Советская математическая школа / Н.Н. Боголюбов, С.Н. Мергелян – М.: Книга по Требованию, 2013. – 64 с.

ISBN 978-5-458-59113-3

Советская математика занимала передовое место в мировой математической науке. Наши ученые имели блестящие достижения во всех основных областях современной математики, а во многих из них результаты наших математиков играли определяющую роль. Не задаваясь целью дать подробное описание важнейших достижений советских ученых во всех основных областях математики XX в., авторы отмечают лишь те результаты, которые сыграли определяющую роль в развитии соответствующих областей.

ISBN 978-5-458-59113-3

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2013
© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2013

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

стране. В нем развиваются многие актуальные направления современной математики, причем в некоторых областях работы новосибирских математиков являются ведущими не только в советской, но и в мировой науке.

Крупные научные школы были созданы в последнее время в Свердловске, Минске, Баку, Воронеже, Горьком, Харькове и некоторых других городах. Положение с развитием математики на периферии нельзя, однако, признать вполне благополучным. Несмотря на большую помощь, оказываемую московскими, ленинградскими математиками и учеными из других ведущих научных центров, еще многое должно быть сделано для поднятия уровня математических исследований в таких крупных университетских центрах, как Томск, Иркутск, Саратов, Ростов-на-Дону, Львов, Алма-Ата и ряде других.

Не задаваясь целью дать подробное описание важнейших достижений советских ученых во всех основных областях современной математики, отметим лишь те результаты, которые сыграли определяющую роль в развитии соответствующих областей,

В области теории чисел у нас существовала блестящая традиция, восходящая к работам П. Л. Чебышева, А. А. Маркова, Е. И. Золотарева, Г. Ф. Вороного, продолженная и развитая советской школой в области аналитической теории чисел, созданной и возглавляемой И. М. Виноградовым.

И. М. Виноградов обогатил аналитическую теорию чисел новыми, созданными им методами, на основе которых он смог получить решение ряда классических задач, не поддававшихся усилиям лучших математиков в течение столетий. И. М. Виноградову принадлежит заслуга создания метода тригонометрических сумм, который является, наряду с классическими методами рядов Дирихле и решета Эратосфена, основным методом в аналитической теории чисел и по праву носит название «метода Виноградова». Этим методом им было получено в 1934 г. почти неулучшаемое решение проблемы Варинга (поставленной в 1770 г.), а также была исчерпывающе исследована проблема распределения дробных частей значений полинома и получены весьма точные формулы для числа целых точек (точки, координаты которых — целые числа) в областях на плоскости и в пространстве.

На основании оценки тригонометрических сумм несколько иного вида И. М. Виноградов получил ряд глубоких результатов, относящихся к области аддитивных задач. В частности, в 1937 г. им была решена знаменитая проблема Гольдбаха (поставленная в 1742 г.) для нечетных чисел: было показано, что всякое достаточно большое нечетное число может быть представлено в виде суммы не более трех простых чисел. Этот успех явился одним из наиболее ярких достижений математики XX века. И. М. Виноградов установил также общий закон распределения степенных вычетов и невычетов, который оставался наиболее сильным результатом в этом направлении в течение 40 лет.

Идеи И. М. Виноградова интенсивно разрабатывались как в СССР, так и за рубежом. Пользуясь методами И. М. Виноградова, его ученик Н. Г. Чудаков получил весьма сильные результаты о распределении простых чисел в натуральном ряду. Им же было показано, что «почти всякое»

четное число есть сумма двух простых чисел и тем самым внесен существенный вклад в решение проблемы Гольдбаха для четных чисел. Применение методов И. М. Виноградова позволило К. К. Марджанишвили получить ряд интересных результатов в исследовании некоторых важных классов систем целочисленных уравнений. Недавно выяснилась возможность применения метода тригонометрических сумм к метрической теории чисел; на этом пути В. Г. Спринджук доказал гипотезу Малера о невозможности очень точного приближения почти всех чисел к алгебраическим.

Объединением соображений теории вероятностей и метода И. М. Виноградова явился дисперсионный метод Ю. В. Линника; этим методом, в частности, была решена проблема Харди — Литльвуда: было доказано, что все целые числа, начиная с некоторого, представимы в виде суммы простого числа и квадратов двух целых чисел; была указана также и асимптотика,

Ю. В. Линнику принадлежат также глубокие результаты по теории распределения целых точек на шаре и гиперболоиде; для исследования этих вопросов им был создан новый метод, носящий эргодический характер. Весьма значителен вклад Ю. В. Линника и в теорию L -рядов. Разработанная им теория « L -рядов в среднем» и созданный для этой цели метод большого решета позволили Ю. В. Линнику и его ученикам получить сильные результаты о распределении простых чисел в арифметической прогрессии и решить ряд трудных задач аддитивной теории. В самое последнее время А. И. Виноградовым — учеником Ю. В. Линника — была опровергнута известная гипотеза немецкого математика Куммера; А. И. Виноградову принадлежат наиболее сильные современные результаты по теории L -рядов.

Методом плотностей корней Ю. В. Линником была получена глубокая оценка для наименьшего простого числа в арифметической прогрессии с растущей разностью.

Теория сложения множеств натуральных чисел была разработана в 30-х годах Л. Г. Шнирельманом. На этом пути ему удалось доказать (раньше окончательных результатов И. М. Виноградова), что всякое натуральное число может быть представлено в виде суммы ограниченного числа простых чисел.

Советские математики, в первую очередь И. М. Виноградов и А. Я. Хинчин, получили ряд сильных результатов в области диофантовых приближений — решения неравенств в целых числах. В исследованиях А. Я. Хинчина в этой области значительную роль играла связь с теорией вероятностей и динамическими системами.

Фундаментальные результаты принадлежат И. П. Кубилюсу в вопросе о распределении значений арифметических функций — области, которую называют вероятностной теорией чисел ввиду того, что в ней применяются аналоги теорем теории вероятностей. Им и его учениками была разработана теория, позволившая для широкого класса аддитивных арифметических функций найти необходимые и достаточные условия того, чтобы закон распределения стремился к предельному; выяснен класс предельных законов и произведены оценки скорости сходимости закона распределения к предельному закону.

Широкий размах получили исследования по аналитической теории чисел в работах А. Г. Постникова и его учеников. Предметом исследования явились вопросы распределения дробных частей значений функции ag^x , а также вопросы распределения значений арифметических функций, в частности, распределения значений функции Эйлера. Получены многие тонкие результаты; установлены интересные связи со спектральной теорией дифференциальных операторов, теорией вероятностей.

В области теории трансцендентных чисел замечательные результаты принадлежат А. О. Гельфонду. Предложенный им метод позволил решить ряд глубоких задач, в частности седьмую проблему Гильберта; было доказано, что всякое алгебраическое число, отличное от 0 и 1, будучи возведено в иррациональную степень, дает трансцендентное число. Существенные результаты в этой области принадлежат также А. Б. Шидловскому, который исследовал вопрос о трансцендентности и алгебраической независимости значений функций, являющихся решением некоторых линейных дифференциальных уравнений.

В геометрии чисел важнейшими направлениями работ советских математиков являются: теория положительных квадратичных форм, исследование неопределенных квадратичных форм, правильные разбиения пространства.

Б. А. Венковым была построена общая теория приведения положительных квадратичных форм и изучены фундаментальные области автоморфизмов неопределенных квадратичных форм.

Б. Н. Делоне исследовал задачу о числе топологически различных типов правильных разбиений n -мерного эвклидова пространства. Он применил теорию приведения тернарных форм к кристаллографии.

Теория чисел, всегда считавшаяся областью математики, весьма далекой от практических применений, в последние годы играет все большую роль в ряде прикладных вопросов.

Аналитическая теория чисел дала методы моделирования случайных процессов, в работах Н. М. Коробова получила приложение к вычислительной математике (методы исчисления кратных интегралов). Геометрическая теория чисел также нашла приложение в вычислительной математике — в теории кубатурных формул.

В области алгебраической теории чисел в 20—40-е годы наиболее перспективная работа велась за рубежом (Г. Вейль, Х. Хассе — Германия, А. Вейль, К. Шевалле — Франция); у нас, несмотря на отдельные яркие результаты (Н. Г. Чеботарев, Б. Н. Делоне и Д. К. Фаддеев), сколько-нибудь крупной школы в этом направлении не существовало.

Положение изменилось лишь в 50-х годах после блестящих работ И. Р. Шафаревича. Им было дано доказательство общего закона взаимности степенных вычетов, что явилось, в известном смысле, завершающим этапом в полуторастолетней истории арифметических законов взаимности, восходящей к Эйлеру и Гауссу. И. Р. Шафаревичем и его учеником Е. С. Голодом был внесен фундаментальный вклад в теорию погружаемости алгебраических полей: был построен пример мнимого квадратичного поля, которое нельзя погрузить в алгебраическое поле с обычной теорией делимости. Этим решена в отрицательном смысле известная «проблема башни», поставленная Гильбертом.

Ряд важных результатов в алгебраической теории чисел получен в последние годы Ю. И. Маниным — учеником И. Р. Шафаревича.

В целом можно заключить, что советская математика сохраняет первенство в области аналитической теории чисел. В алгебраической же теории чисел, где ранее было отставание, уже имеются крупные успехи,

Математическая логика, как и теория чисел, относится к числу тех областей математики, развитие которых в течение длительного времени обуславливалось в основном внутренними потребностями и закономерностями развития математики как науки и которые только на сравнительно позднем этапе получили многочисленные, подчас даже неожиданные, приложения. Интерес к математической логике, возникший еще в прошлом веке, в связи с так называемыми парадоксами теории множеств, особенно усилился в 20—30-е годы, когда со всей остротой стал вопрос о существовании алгоритмов решения тех или иных задач. Если раньше математики, не сомневаясь в существовании алгоритмов решения задач алгебры, теории чисел, топологии и т. д., направляли свои усилия только на поиски этих алгоритмов, то теперь стало ясно, что искомые алгоритмы могут не существовать вовсе. Появилась возможность даже доказывать неразрешимость тех или иных алгоритмических проблем (т. е. отсутствие искомого алгоритма). Все это потребовало разработки точного понятия алгоритма; большой вклад в эту проблему, наряду с американскими математиками, внесли А. Н. Колмогоров и А. А. Марков. Понятие нормального алгоритма, предложенное А. А. Марковым, было использовано А. А. Марковым и Н. А. Шаниным для определения конструктивных действительных чисел и конструктивных функций действительного переменного, чем были заложены основы конструктивного анализа; получившего в последние годы значительное развитие.

Если первое доказательство неразрешимости известной алгоритмической проблемы было получено Черчем (США), то наиболее глубокие и значительные результаты в этом направлении принадлежат П. С. Новикову, который доказал неразрешимость проблем тождества, изомеризации и сопряженности теории групп. Доказательство неразрешимости проблемы распознавания для широкого класса групповых свойств принадлежит С. И. Адяну, ученику П. С. Новикова. Доказательство неразрешимости проблемы распознавания для весьма широкого класса свойств полугрупп, а также проблемы представимости матриц принадлежит А. А. Маркову. Им же была доказана неразрешимость проб-

лемы гомеоморфизма и проблемы гомотопической эквивалентности для n -мерных многообразий при $n > 4$.

Доказательство неразрешимости общих алгоритмических проблем алгебры повысило интерес к тем частным случаям этих проблем, для которых удается найти положительное решение. Так, С. И. Адьяном было получено решение проблемы тождества для широкого класса групп с одним соотношением. А. И. Мальцев решил проблему тождества для нильпотентных групп. Единственной классической алгоритмической проблемой, для которой до сих пор не получено решения в общем случае, является десятая проблема Гильберта, заключающаяся в отыскании алгоритма, проверяющего для любого диофантова уравнения с целыми коэффициентами, имеет ли это уравнение целочисленное решение или нет. В этом направлении работают многие как советские, так и зарубежные математики.

Теория алгоритмов получила важные применения в теории и практике программирования на электронных вычислительных машинах. Большой интерес представляют исследования по оценкам эффективности алгоритмов, которые относятся к объему схемы (программы) алгоритма, к числу шагов при применении алгоритма, к промежуточным словам при применении алгоритма.

Ряд крупных результатов на стыке математической логики и алгебры получен в научной школе, возглавляемой А. И. Мальцевым. Создано новое направление, оформившееся в глубоко разработанную теорию, дающую общие методы решения ряда трудных вопросов теории алгебраических систем и моделей. Промежуточное положение теории моделей объясняется тем, что ее предмет — изучение свойств классов моделей — принадлежит алгебре, а методы в основном относятся к математической логике. А. И. Мальцеву и его ученикам принадлежат важные утверждения, относящиеся к вопросам разрешимости элементарных теорий. А. И. Мальцевым был получен фундаментальный результат о неразрешимости элементарной теории конечных групп. Ю. Л. Ершов доказал разрешимость элементарных теорий широкого класса полей, в частности, разрешимость элементарной теории каждого p -адического поля; это крупный сдвиг в старой проблеме о нахождении классов алгебраических полей с разрешимыми теориями.

Необходимо отметить, что общая постановка вопроса о разрешимости элементарных теорий и первые результаты в этой области принадлежат американским ученым (А. Тарский и другие), однако впоследствии советские специалисты не только догнали зарубежных математиков в исследовании

алгоритмической природы элементарных теорий, но и стали успешно с ними конкурировать и перегонять в ряде разделов.

Важные результаты были получены советскими учеными в последние годы и в области математической теории управляющих систем, которая является, по существу, тем разделом математической логики, чье развитие в значительной мере определяется непосредственными запросами практики. Наиболее значительные результаты были получены в области исследования функциональных систем, синтеза управляющих систем, теории автоматов, исследовании вопросов надежности. В области теории синтеза управляющих систем исходным пунктом исследований послужили работы К. Шеннона (США); существенным шагом в разработке методов синтеза был переход с асимптотической постановке задачи. Эта постановка была сформулирована К. Шенноном, однако получить асимптотических результатов ему не удалось. В работах О. Б. Лупанова были изучены новые методы синтеза, которые позволили для разных классов управляющих систем получать асимптотики и построить соответствующие им наилучшие алгоритмы синтеза. О. Б. Лупановым был найден также общий прием для подхода к синтезу схем для функций из подобных классов — принцип локального кодирования. Ряд интересных исследований по синтезу минимальных схем принадлежит Ю. И. Журавлеву и С. В. Яблонскому.

Ряд важных работ выполнен у нас и в области математической лингвистики, являющейся, с точки зрения используемых в ней методов, разделом математической логики. Помимо углубленного анализа строения языка, эти работы имеют непосредственный практический выход в области автоматического перевода с одного языка на другой. В этой области можно отметить работы Т. М. Тер-Микаэляна, О. С. Кулагиной, И. А. Мельчука.

В целом исследования в области математической логики ведутся у нас широким фронтом, получен ряд первоклассных результатов. Однако в некоторых разделах мы заметно отстаем. Это, прежде всего, аксиоматическая теория множеств, где за рубежом в последние годы получены выдающиеся результаты (США — Коэн, Чехословакия — Вopenка и другие), ряд разделов математической теории управляющих систем (использование вычислительных машин для решения логико-кибернетических задач, теория графов). Несомненно, что работы в этих разделах должны быть усилены, особенно учитывая все возрастающую роль математической логики в различных прикладных вопросах,

В области алгебры в Советском Союзе работают несколько крупных научных школ. Под алгеброй в настоящее время понимается большой комплекс математических дисциплин, часть из которых находится на грани между алгеброй и другими математическими науками: математической логикой (теория моделей, теория автоматов), теорией чисел (алгебраическая теория чисел), топологией (топологическая алгебра), алгебраической геометрией, функциональным анализом и т. п.

Выше уже отмечались достижения школы, возглавляемой А. И. Мальцевым, относящиеся, главным образом к математической логике. А. И. Мальцеву и его ученикам принадлежат важные результаты, относящиеся собственно к алгебре. Так, А. И. Мальцевым были найдены необходимые и достаточные условия упорядочиваемости абстрактной группы; им была доказана классическая теорема о представлении произвольной группы Ли в виде прямого произведения ее максимальной компактной подгруппы на евклидово пространство, решена проблема классификации полупростых подгрупп классических групп Ли и получены другие крупные результаты. М. И. Каргополовым было получено существенное продвижение в теории упорядочиваемых групп: были построены примеры упорядочиваемых групп, не допускающих упорядоченных пополнений, доказана гипотеза о неаксиоматизируемости класса доупорядочиваемых групп.

Советским математикам принадлежит ряд блестящих достижений в области теории полей и многочленов. Здесь необходимо отметить, в первую очередь, работы Н. Г. Чеботарева, чьи результаты 30—40-х годов в области теории Галуа, теории полей алгебраических чисел, теории распределения корней многочленов являются классическими и оказали значительное влияние на дальнейшее развитие науки. Фундаментальный вклад в теорию Галуа внес И. Р. Шафаревич. Он доказал, что в случае, когда основное поле является полем алгебраических чисел конечной степени, существует алгебраическое расширение этого поля с наперед заданной разрешимой группой Галуа. И. Р. Шафаревичем и Д. К. Фаддеевым получены важные результаты в теории погружаемости полей. Д. К. Фаддеевым была решена проблема унимодулярной эквивалентно-

сти систем целочисленных матриц. А. И. Кострикиным, учеником И. Р. Шафаревича, была решена так называемая «ограниченная проблема Бернсайда» о конечности всякой группы, заданной k образующими и одним тождественным определяющим соотношением.

В области так называемой «общей алгебры», включающей в себя общую теорию групп, теорию колец и алгебр, теорию структур, теорию полугрупп, общую теорию алгебраических систем, теорию категорий и универсальных алгебр, существует активно действующая научная школа, возглавляемая А. Г. Курошем. Возникновение этой школы связано с именем выдающегося советского ученого О. Ю. Шмидта, который впервые начал разрабатывать теорию абстрактных групп, ему же принадлежит один из центральных результатов в этой теории.

Представителями этой школы изучается широкий круг вопросов, относящихся к прямым и свободным произведениям групп и алгебр (здесь необходимо отметить классическую работу А. Г. Куроша, дающую полное описание подгрупп свободных произведений групп), теории разрешимых групп, теории линейных групп, теории категорий и т. д. Фундаментальный вклад в развитие топологической алгебры внес Л. С. Понтрягин созданием теории характеров топологических абелевых групп. Эта теория оказала существенное влияние на развитие не только алгебры, но и ряда других разделов математики; работы Л. С. Понтрягина в области топологической алгебры и теории групп Ли были продолжены многими математиками как у нас в стране, так и за рубежом.

Для развития современной математики характерно широкое проникновение алгебраических методов в другие области математики, «алгебраизация» математики. При этом алгебраические идеи и методы находят широкое применение не только в тех разделах, где влияние алгебры очевидно (алгебраическая геометрия, алгебраическая теория чисел), но и, казалось бы, в далеких областях — в функциональном анализе, теории дифференциальных уравнений, теории функций многих комплексных переменных и т. п. Если в 20—30-х годах наибольшее значение для других областей математики имели теория групп и линейная алгебра, то в последнее время наибольшую роль играют идеи и методы гомологической алгебры, возникновение которой относится к концу 40-х годов. Хотя одно из основных понятий гомологической алгебры — группы гомологий групп — было дано Д. К. Фаддеевым, быстрое развитие гомологической алгебры и, главное, широкое использование гомологических методов в других областях математики происходило главным образом в других странах.