

А.А. Марков

**Введение в анализ и
сферическая тригонометрия**

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 51
ББК 22.1
А11

А11 **А.А. Марков**
Введение в анализ и сферическая тригонометрия / А.А. Марков – М.: Книга
по Требованию, 2015. – 434 с.

ISBN 978-5-458-56921-7

ISBN 978-5-458-56921-7

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2015

© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2015

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.



Серия Книжный Ренессанс

www.samizday.ru/reprint

центами при неизвестности, числители различны.

Если члены знаменателя δ можно получить из одного $a_1 b_2 c_3$ при помощи всевозможных перемещений знаков 1, 2, 3...

Очевидно, что из чисел 1, 2, 3 можно составить только шесть различных перемещений:

1, 2, 3 ; 1, 3, 2 ; 2, 3, 1 ; 2, 1, 3 ; 3, 1, 2 ; 3, 2, 1.

Здесь каждое перемещение получено из предыдущего переставлением двух чисел. Переставлявая в произведении:

$$a_1 b_2 c_3$$

знаки 1, 2, 3 (соответственно написанным местам перемещениям), получим еще пять одночленов:

И всего шесть членов

(1) (2) (3) (4) (5) (6)

$a_1 b_2 c_3$, $a_1 b_3 c_2$, $a_2 b_3 c_1$, $a_2 b_1 c_3$, $a_3 b_1 c_2$, $a_3 b_2 c_1$

войдут в состав знаменателя δ , стоящие на четных местах со знаком плюса; на нечетных местах со знаком минуса: (2), (4), (6) со знаком минуса:

$$\delta = \begin{Bmatrix} a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 + \\ + a_2 b_3 c_1 - a_2 b_1 c_3 + \\ + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1 \end{Bmatrix}$$

Для вывода выше упомянутых выражений x , y , z , перепишем δ иначе, собрав по два члена, содержащие a с одним и тем же значением:

4.

$$S = a_1(\underline{b_2c_3 - b_3c_2}) + a_2(\underline{b_3c_1 - b_1c_3}) + a_3(\underline{b_1c_2 - b_2c_1}).$$

Вспомогательное умножение:

$$\begin{array}{ccccccc} \text{все члены } 1^{\text{го}} \text{ уравнения на } \underline{b_2c_3 - b_3c_2} & & & & & & \\ \text{„ } 2^{\text{го}} \text{ „ „ „ „ „ „ } & & & & & & \underline{b_3c_1 - b_1c_3} \\ \text{„ } 3^{\text{го}} \text{ „ „ „ „ „ „ „ „ } & & & & & & \underline{b_1c_2 - b_2c_1} \end{array}$$

и получаем:

$$\begin{cases} a_1(b_2c_3 - b_3c_2)x + b_1(b_2c_3 - b_3c_2)y + c_1(b_2c_3 - b_3c_2)z = d_1(b_2c_3 - b_3c_2) \\ a_2(b_3c_1 - b_1c_3)x + b_2(b_3c_1 - b_1c_3)y + c_2(b_3c_1 - b_1c_3)z = d_2(b_3c_1 - b_1c_3) \\ a_3(b_1c_2 - b_2c_1)x + b_3(b_1c_2 - b_2c_1)y + c_3(b_1c_2 - b_2c_1)z = d_3(b_1c_2 - b_2c_1) \end{cases}$$

Приравнявая, наконец, сумму правых частей найденных уравнений сумме их левых частей, имеем:

$$\begin{bmatrix} a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + \\ + a_2(b_3c_1 - b_1c_3) + \\ + a_3(b_1c_2 - b_2c_1) \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} b_1(b_2c_3 - b_3c_2) + \\ + b_2(b_3c_1 - b_1c_3) + \\ + b_3(b_1c_2 - b_2c_1) \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} c_1(b_2c_3 - b_3c_2) + \\ + c_2(b_3c_1 - b_1c_3) + \\ + c_3(b_1c_2 - b_2c_1) \end{bmatrix} z = \\ = d_1(b_2c_3 - b_3c_2) + d_2(b_3c_1 - b_1c_3) + d_3(b_1c_2 - b_2c_1).$$

Коэффициенты при y и z , как мы равные нулю, пропадут.

Действительно, раскрывая скобки, например, коэффициенты при y , мы увидим, что каждому члену с плюсом найдется противоположный с минусом:

$$\underline{b_1b_2c_3} - \underline{b_1b_3c_2} + \underline{b_2b_3c_1} - \underline{b_2b_1c_3} + \underline{b_3b_1c_2} - \underline{b_3b_2c_1}$$

Следовательно, останется уравнение с одним неизвестным x :

5.

$$x \left[a_1 (b_2 c_3 - b_3 c_2) + a_2 (b_3 c_1 - b_1 c_3) + a_3 (b_1 c_2 - b_2 c_1) \right] = \\ = d_1 (b_2 c_3 - b_3 c_2) + d_2 (b_3 c_1 - b_1 c_2) + d_3 (b_1 c_2 - b_2 c_1) \dots$$

Отсюда:

$$x = \frac{X}{S} = \frac{d_1 b_2 c_3 - d_1 b_3 c_2 + d_2 b_3 c_1 - d_2 b_1 c_3 + d_3 b_1 c_2 - d_3 b_2 c_1}{a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 + a_2 b_3 c_1 - a_2 b_1 c_3 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1} \dots$$

Подобным же образом найдем:

$$y = \frac{Y}{S} = \frac{a_1 d_2 c_3 - a_1 d_3 c_2 + a_2 d_3 c_1 - a_2 d_1 c_3 + a_3 d_1 c_2 - a_3 d_2 c_1}{a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 + a_2 b_3 c_1 - a_2 b_1 c_3 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1} ;$$

$$z = \frac{Z}{S} = \frac{a_1 b_2 d_3 - a_1 b_3 d_2 + a_2 b_3 d_1 - a_2 b_1 d_3 + a_3 b_1 d_2 - a_3 b_2 d_1}{a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 + a_2 b_3 c_1 - a_2 b_1 c_3 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1} \dots$$

Мы видим, что числители выражений x, y, z можно получить из общего знаменателя S через замену a, b, c на d .

Чтобы вывести подобные же формулы для решения системы n уравнений первой степени с n неизвестными, остановимся на рассмотрении выражений, называемых определителями.

Объ «опредетелителях»

Из решения данных предыдущих систем уравнений знаменатели

$$a_1 b_2 - a_2 b_1$$

и

$$a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 + a_2 b_3 c_1 - a_2 b_1 c_3 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1$$

суть опредетелители:

первый четырех элементов

б.

$$a_1, b_1,$$

$$a_2, b_2,$$

расположенных во две строки и во два столбца;
второй девяти элементов

$$a_1, b_1, c_1,$$

$$a_2, b_2, c_2,$$

$$a_3, b_3, c_3,$$

расположенных во три строки и во три столбца.

Элементы, идущие горизонтально, например:

$$a_1, b_1, c_1$$

или:

$$a_3, b_3, c_3,$$

составляют строки;

элементы, идущие вертикально, как:

$$a_1, a_2, a_3$$

или:

$$c_1, c_2, c_3$$

составляют столбцы.

Условимся, для обозначения этих определителей,
ставить их элементы между двумя вертикальными
линиями и писать:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

и

$$\begin{vmatrix} a_1, b_1, c_1 \\ a_2, b_2, c_2 \\ a_3, b_3, c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 + a_2 b_3 c_1 - a_2 b_1 c_3 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1.$$

7.

Установим теперь общее понятие об определителе..

Пусть данные элементы расположены в n строках и n столбцов:

	$\begin{smallmatrix} 1^{aa} \\ \text{столбец} \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 2^{aa} \\ \text{столбец} \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 3^{aa} \\ \text{столбец} \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} n^{aa} \\ \text{столбец} \end{smallmatrix}$
1^{aa} строка	a_1	b_1	c_1	$\dots, p_1$
2^{aa} " "	a_2	b_2	c_2	$\dots, p_2$
3^{aa} " "	a_3	b_3	c_3	$\dots, p_3$
	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
n^{aa} строка	a_n	b_n	c_n	$\dots, p_n$

Все столбцы различаются буквами

$a, b, c, \dots, p$;

все строки обозначены различными номерами

$1, 2, 3, \dots, n$.

Учти, что в рассматриваемой нами системе n число строк $= n$ число столбцов.

Определитель этой системы n^2 элементов, для обозначения которого мы ставим наши элементы между двумя вертикальными чертами, представляет алгебраическую сумму всевозможных произведений такого вида:

$$a_x b_y c_z \dots p_\omega,$$

где

$$x, y, z, \dots, \omega$$

8.

-какое-нибудь размычение номеров

1, 2, 3, ..., n.

Если такие произведения будем называть членами определителя.. Для составления каждого члена определителя нужно взять из каждой строки по одному элементу, — и так же взять, каждый элемент находится в разных строках.. Подобно тем же, в каждый член определителя всякий номер

1, 2, 3, ..., n

и всякая буква

a, b, c, ..., p

входят один и только один раз.

Число членов в определителе системы n^2 элементов равно числу размещений из n номеров, то-есть

равно 1.2.3. n.

Например, определитель системы 4^2 элементов

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

состоит из двух членов, так как $n=2$.

В определителе системы 3 элементов

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 + a_2 b_3 c_1 - a_2 b_1 c_3 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1$$

имеет членов..

Число элементов в определителе системы $16^{\frac{n}{2}}$ элементов равно $1.2.3.4 = 24$ (так как $n=4$), и т. д...

Одни члены входят в состав определителя со знаком: плюс, а другие со знаком минус.

Какие члены берутся со знаком $+$ и какие со знаком $-$, об этом мы сейчас будем говорить. Будем отбрасывать только мы раздельные разложения на два класса и указывать правило, по которому для каждого разложения можно узнать, к какому классу оно относится.

Будем отбрасывать общий случай будем рассматривать и частный..

Возьмем определитель 56 элементов:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & e_1 & f_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & e_2 & f_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 & e_3 & f_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 & e_4 & f_4 \\ a_5 & b_5 & c_5 & d_5 & e_5 & f_5 \\ a_6 & b_6 & c_6 & d_6 & e_6 & f_6 \end{vmatrix}$$

Об этом определителе число элементов равно $1.2.3.4.5.6 = 720$ (так как $n=6$).

Возьмем один какой-нибудь член, например:

$$a_3 b_5 c_1 d_6 e_2 f_4 ..$$

Можно определить знак, с которым этот член войдет в состав определителя, разложив соответствующее ему разложение номеров

10.

3, 5, 1, 6, 2, 4

и узнаем, к какому классу принадлежит это разложение, по следующему правилу.

Можно из шести чисел составить всевозможные пары. Число всех пар $= \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$.

1, 2

1, 3

2, 3

1, 4

2, 4

3, 4

1, 5

2, 5

3, 5

4, 5

1, 6

2, 6

3, 6

4, 6

5, 6.

Обобщая ситуацию эти пары будут:

1, 2

1, 3 2, 3

1, 4 2, 4 3, 4

1, 5 2, 5 3, 5

.....

..... (n-2), (n-1)

1, n 2, n 3, n (n-2), n (n-1), n

и число их равно:

$$\frac{n(n-1)}{2} ..$$

Рассмотрим последовательность пар и будем говорить, что какая-нибудь пара (например, 1, 2) представляет в нашем разложении безпорядка - дока, если больший номер предшествует меньшему (у нас 3 предшествует единице).

Обобщая приведенные пары, представляющие безпорядка, таковы:

$(1,3), (1,5), (2,3), (2,5), (2,6), (4,5), (4,6)$.

Пары-же

$(1,2), (1,4), (1,6), (2,4), (3,4), (3,5), (3,6), (5,6)$

представляются в разложении

$3, 5, 1, 6, 2, 4$

порядка, так как меньший их номер предшествует большему.

Считаем теперь число безпорядков. Это дано число разложений четное число безпорядков и равно 7...

Условимся-же называть разложением I-го класса такое, в котором число безпорядков четное; разложением-же II-го класса такое, где число безпорядков нечетное. И будем звать со знаком плюса те члены, которые соответствуют разложению первого класса, и со знаком минуса те, которые соответствуют разложению второго класса.

Согласно установленным нами определениям, мы должны разложение

$3, 5, 1, 6, 2, 4$

отнести ко второму классу, так как в нем 7 безпорядков. Следовательно, соответствующий этому разложению член

$a_3 b_5 c_1 d_6 e_2 f_4$

войдет в состав определителя со знаком минуса.

Вопросы

Узнать, с какими знаками войдут в состав определителей следующие члены:

$$1, a_4 b_2 c_3 d_7 e_5 f_6 g_1,$$

$$2, a_3 b_4 c_2 d_1 e_5,$$

$$3, a_2 b_5 c_6 d_4 e_1 f_3 \dots$$

Итак, каждый член

$$a_\alpha b_\beta c_\gamma \dots p_\omega$$

определителя системы n^2 элементов

$$\begin{vmatrix} a_1, b_1, c_1, \dots, p_1 \\ a_2, b_2, c_2, \dots, p_2 \\ a_3, b_3, c_3, \dots, p_3 \\ \dots \\ a_n, b_n, c_n, \dots, p_n \end{vmatrix}$$

входит в состав его со знаком плюс, если соответствующее разложение

$$\alpha, \beta, \gamma, \dots, \omega$$

принадлежит к первому классу, и со знаком минус, если он принадлежит ко второму классу.

Отметим главный член определителя, составленный из элементов, находящихся на диагонали, проведенной в определителе (слева-направо, сверху-вниз):

$$a_1 b_2 c_3 \dots p_n$$

Главный член входит в состав определителя