А. Я. Хинчин

Асимптотические законы теории вероятностей

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 51
ББК 22.1
А11

А. Я. Хинчин

А11 Асимптотические законы теории вероятностей / А. Я. Хинчин – М.: Книга по Требованию, 2013. – 98 с.

ISBN 978-5-458-31509-8

Математика в монографиях. Серия обзоров. Книга 3. Асимптотические законы теории вероятностей.Под редакцией акад. И. М. Виноградова, проф. А. Н. Колмогорова, проф. Л. А. Люстерника, проф. А. И. Плеснера. Перевод с немецкого И. С. Пискунова и А. Н. Эрастовой.В предметом отношении основной целью теории вероятностей является математический анализ массовых явлений. В формальном отношении этим определяется круг задач, гносеологически довольно точно очерченный; теоретическое изучение тех закономерностей явлений и процессов, которые в своих основных чертах обуславливаются именно массовым характером этих явлений или процессов (т.е. наличие в них большого числа в той или иной мере равноправных событий, величин и т.п.), так что индивидуальные свойства отдельных ингредиентов до некоторой степени оттесняются на задний план.Наконец, в чисто математическом отношении это приводит к инфинитезимальным исследованиям особого рода, в которых систематически изучаются и обосновываются предельные законы, имеющие место при безграничном возрастании числа ингредиентов. В этой связи так называемые "предельные теоремы" теории вероятностей отнюдь не являются какой-либо обособленной ветвью этой науки, но, напротив, составляют собою наиболее существенную часть её проблематики.

ISBN 978-5-458-31509-8

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

Серия Книжный Ренессанс
www.samizday.ru/reprint

ПРЕДИСЛОВИЕ

В предметном отношении основной целью теории вероятностей является математический анализ массовых явлений. В формальном отношении этим определяется круг задач, гносеологически довольно точно очерченный: теоретическое изучение тех закономерностей явлений и процессов, которые в своих основных чертах обусловливаются именно *массовым характером* этих явлений или процессов (т. е. наличием в них *большого числа* в той или иной мере равноправных событий, величин и т. п.), так что индивидуальные свойства отдельных ингредиентов до некоторой степени оттесняются на задний план. Наконец, *в чисто математическом* отношении это приводит к инфинитезимальным исследованиям особого рода, в которых систематически изучаются и обосновываются предельные законы, имеющие место при безграничном возрастании числа ингредиентов. В этой связи так называемые «предельные теоремы» теории вероятностей отнюдь не являются какой-либо обособленной ветвью этой науки, но, напротив, составляют собою наиболее существенную часть ее проблематики.

Эта «асимптотическая» теория вероятностей в качестве математической дисциплины далеко еще не представляет собою единого целого. Совсем недавно совокупность ее результатов состояла еще из нескольких особняком стоящих, не связанных никакой общей точкой зрения предельных теорем. Лишь в самое последнее время ей удалось добиться некоторых новых установок, позволяющих надеяться, что в не слишком далеком будущем мы будем иметь для этой области, основоположной по своему теоретическому значению и чрезвычайно важной по своим практическим приложениям, единую и цельную теорию. Здесь необходимо упомянуть, с одной стороны, исследования, возникшие в физической статистике в связи с так называемым диференциальным уравнением Фоккера-Планка, с другой стороны — ряд чисто математических изысканий, посвященных непрерывным стохастическим процессам (Башелье, Адамар, Гостинский, Колмогоров, Финетти и др.).

Учитывая все вышесказанное, я счел наиболее целесообразным собрать в этой небольшой книжке, которая должна служить введением в современные методы асимптотической теории вероятностей, в первую очередь все то, что наиболее содействует единству теории. Приняв эту основную установку, я был вынужден отказаться от изложения многих важных и изящных исследований, среди которых в первую очередь необходимо отметить прекрасные результаты С. Н. Бернштейна, Леви, Фреше, Мизеса и Полиа. Я старался, насколько это оказалось возможным, охватить все части строящегося здания единым методом; наиболее удобным для этой цели мне представлялся метод «верхних» и «нижних» функций, который, как известно, с успехом применялся Перроном к разным вопросам анализа и значение которого для проблем теории вероятностей было недавно открыто и систематически использовано И. Г. Петровским.

Выражаю искреннюю благодарность А. Н. Колмогорову и И. Г. Петровскому, ценными советами которых я все время пользовался при составлении настоящей книги и которые предоставили в мое распоряжение ряд своих еще неопубликованных исследований.

А. Хинчин

Москва, 14 февраля 1933 г.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава I

ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ЛАПЛАСА-ЛЯПУНОВА

1. СУММА НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

1. Наиболее давно и хорошо известный асимптотический закон теории вероятностей — предельный закон Лапласа-Ляпунова — и в наши дни остается одним из основных положений этой науки. Это происходит не только в силу его огромного значения для все возрастающего числа областей применения, но, главным образом, потому, что современные установки и методы теории вероятностей все больше и больше выявляют его центральное положение в исследованиях почти всех направлений. Поэтому будет целесообразным начать наше изложение именно с этого закона. Нашей ближайшей задачей при этом будет установить возможно тесную связь как его содержания, так и методов его доказательства с общими установками современной теории вероятностей.

Пусть случайная величина x подчинена закону распределения $U(x)$, который мы будем считать нормированным условиями [1]:

$$\int x\, dU(x) = 0, \quad \int x^2 dU(x) = 1.$$

Пусть известно, что x есть сумма n независимых друг от друга случайных величин $x_1, x_2, \ldots, x_n$, которые соответственно подчинены известным законам распределения: $F_1(x), F_2(x), \ldots, F_n(x)$. Сущность предельного закона Лапласа-Ляпунова состоит в том, что в случае большого числа n слагаемых при очень общих условиях $U(x)$ приближается к функции Гаусса-Лапласа:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int^{x} e^{-\frac{1}{2}u^2} du$$

равномерно относительно x, совершенно независимо от специальных свойств законов распределения слагаемых. Необходимые для этого условия касаются исключительно веса отдельных слагаемых в образовании суммы x и выражают тем или иным образом, что

[1]) Здесь, как и в дальнейшем, не выписан явно нижний (соответственно верхний) предел интегрирования, равный $-\infty$ (соответственно $+\infty$).

вероятные значения этих слагаемых должны быть малы в сравнении со всей суммой. Так, например, при выбранной нормировке вполне достаточно предположить, что третьи абсолютные моменты величин x_k равномерно малы в сравнении с их дисперсиями. Метод доказательства Ляпунова [27, 28] [1]) требует несколько меньшего, потому что в нем рассматриваются только абсолютные моменты порядка $2+\delta$ ($\delta>0$ как угодно мало) и соответственно этому даже не предполагается конечность третьих абсолютных моментов. Еще более общи приобретающие в последнее время все большее распространение условия Линдеберга [26], в которых вообще не встречается никаких моментов высших порядков; но зато эти условия требуют известной равномерности сходимости интегралов, представляющих вторые моменты. Нужно, однако, заметить, что все эти различные формы условий выражают, в сущности, одни и те же свойства рассматриваемых случайных величин. Их формальное различие обусловлено, главным образом, стремлением сделать их более удобными для применения выбранного метода доказательства. Соответственно этому мы примем условия, которые представляют незначительное изменение условий Линдеберга и которые особенно удобны для выбранного нами метода доказательства.

Что касается этого метода доказательства, то он является в изложенной здесь форме новым, хотя об использованных в нем соотношениях говорили уже многие авторы, например, желая установить эвристическую точку зрения или провести аналогию с другими математическими методами (см., например, [31], стр. 499). Идея этого доказательства ведет начало от Петровского и применена впервые Колмогоровым [23] к рассматриваемому нами сейчас вопросу. Кроме простоты и ясности, она имеет еще то преимущество, что обнаруживает связь изучаемых проблем теории вероятностей с некоторыми диференциальными уравнениями в частных производных, чем достигается большая общность. Этот метод применяется почти без всяких изменений не только к многомерному случаю, как читатель увидит еще в этой главе, но даже к более сложным и глубоким проблемам диффузии, как это будет видно в следующих главах; теория непрерывных стохастических процессов находит в нем (см. § 2 этой главы) также очень удобный метод исследования.

2. Условия, при которых функция распределения $U(x)$ всюду мало отличается от функции Гаусса-Лапласа $\Phi(x)$, мы сформулируем так: при очень малых $\tau>0$ все интегралы

$$\int\limits_{|x|>\tau} x^2 dF_k(x) \qquad (k=1, 2, \ldots, n)$$

---

[1]) Числа в квадратных скобках относятся к литературе, указанной в конце книги.

должны быть очень малы в сравнении с соответствующими дисперсиями

$$\int x^2 dF_k(x) = b_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, n);$$

при этом предположено (только для сокращения записи), что математические ожидания всех x_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ равны нулю. Тогда теорему можно сформулировать следующим образом: *для каждого* $\varepsilon > 0$ *существуют два таких положительных числа* τ *и* λ, *что каждый раз, как только выполнены условия*

$$\int\limits_{|x| > \tau} x^2 dF_k(x) < \lambda b_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{L}$$

для всех x

$$|U(x) - \Phi(x)| < 2\varepsilon.$$

Для лучшей ориентировки мы дадим сначала краткий обзор всего хода доказательства. Если $U_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ обозначает функцию распределения суммы $\sum\limits_{i=1}^{k} x_i$, то, очевидно,

$$U_n(x) = U(x)$$

и при $k > 1$

$$U_k(x) = \int U_{k-1}(x - \xi)\, dF_k(\xi). \tag{1}$$

Функция $\Phi\left(\frac{x}{\sqrt{z}}\right)$ в полуплоскости $z > 0$ есть решение уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}.$$

Основная идея доказательства Петровского-Колмогорова состоит во введении «верхней» функции [1])

$$V(x, z) = \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{z}}\right) + \varepsilon z$$

($\varepsilon > 0$ произвольная постоянная), которая, очевидно, удовлетворяет уравнению:

$$\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \varepsilon. \tag{2}$$

---

[1]) Для эллиптических уравнений это понятие введено O. Perron'ом [32], для параболических — использовано Sternberg'ом [36].

Можно показать, что для каждого $\delta>0$ и достаточно малых τ и λ во всей полуплоскости $z>\delta$

$$V(x, z+b_k) > \int V(x-\xi, z)\, dF_k(\xi) \qquad (k=1, 2, \ldots, n). \quad (3)$$

Это составит содержание основной для дальнейшего леммы 1.

Рекуррентным способом из уравнения (1) и неравенства (3) мы легко придем к заключению, что величина $U_n(x)=U(x)$ будет не намного больше, чем $V\left(x, \sum_{k=1}^{n} b_k\right)= V(x, 1)=\Phi(x)+\varepsilon$, и, следовательно, только немного больше, чем $\Phi(x)$, так как ε может быть выбрано как угодно малым. Так как совершенно таким же образом доказывается обратное неравенство (с $-\varepsilon$ вместо $+\varepsilon$), то этим теорема доказывается полностью.

3. Лемма 1. *Для каждого $\delta>0$ при достаточно малых τ и λ из неравенств* (L) *следует неравенство* (3) *во всей полуплоскости $z>\delta$.*

Доказательство. Заметим сначала, что все частные производные функции $V(x, z)$ в области $z>\delta$ равномерно ограничены и равномерно непрерывны. Далее

$$V(x-\xi, z)=V(x, z)-\xi\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{1}{2}\xi^2\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\rho(x, \xi, z),$$

$$\rho(x, \xi, z)=\frac{1}{2}\xi^2\left\{\left[\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right]_{x-\theta\xi, z}-\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right\} \qquad (0<\theta<1),$$

где невыписанными явно аргументами всюду служат x и z. Поэтому в силу условий $\int dF_k(\xi)=1$ и $\int \xi\, dF_k(\xi)=0$ получаем:

$$\int V(z-\xi, z)\, dF_k(\xi)=V(x, z)+\frac{1}{2}b_k\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+J, \quad (4)$$

где

$$J=\int \rho(x, \xi, z)\, dF_k(\xi).$$

Если обозначить теперь через $M(\delta)$ верхнюю грань абсолютных значений частных производных второго порядка от $V(x, z)$ в области $z>\delta$, то везде в этой области

$$|\rho(x, \xi, z)|<\xi^2 M(\delta);$$

если $\tau>0$ достаточно мало, то мы имеем, кроме того, в силу равномерной непрерывности $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ в этой же области

$$|\rho(x, \xi, z)|<\frac{\varepsilon}{3}\xi^2 \text{ при } |\xi|<\tau.$$

Если воспользоваться условием (L) Линдеберга, то отсюда получится:

$$|J| \leqslant \int_{-\tau}^{\tau} |\rho(x, \xi, z)| \, dF_k(\xi) + \int_{|\xi|>\tau} |\rho(x, \xi, z)| \, dF_k(\xi) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{3} \int_{-\tau}^{\tau} \xi^2 dF_k(\xi) + M(\delta) \int_{|\xi|>\tau} \xi^2 dF_k(\xi) \leqslant \frac{\varepsilon}{3} b_k + M(\delta) \lambda b_k.$$

Если выбрать $\lambda < \frac{\varepsilon}{3M(\delta)}$, то

$$|J| < \frac{2\varepsilon}{3} b_k;$$

если же еще принять во внимание, что $V(x, z)$ удовлетворяет уравнению (2), то из (4) следует:

$$\int V(x-\xi, z) \, dF_k(\xi) < V(x, z) + b_k \frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\varepsilon}{3} b_k. \tag{5}$$

Однако, с другой стороны, в силу (L)

$$b_k = \int_{-\tau}^{\tau} \xi^2 dF_k(\xi) + \int_{|\xi|>\tau} \xi^2 dF_k(\xi) < \tau^2 + \lambda b_k,$$

$$b_k < \frac{\tau^2}{1-\lambda}, \tag{6}$$

и, следовательно, в силу того, что

$$V(x, z+b_k) = V(x, z) + b_k \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{1}{2} b_k^2 \left[\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right]_{x,\, z+\theta b_k} \quad (0 < \theta < 1),$$

будем иметь:

$$V(x, z+b_k) > V(x, z) + b_k \frac{\partial V}{\partial z} - \frac{1}{2} b_k^2 M(\delta) >$$

$$> V(x, z) + b_k \frac{\partial V}{\partial z} - \frac{1}{2} \frac{\tau^2 M(\delta)}{1-\lambda} b_k.$$

При достаточно малых τ и λ отсюда получается:

$$V(x, z+b_k) > V(x, z) + b_k \frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\varepsilon}{3} b_k. \tag{7}$$

Из (5) и (7) следует неравенство (3), что и требовалось доказать.

Для того чтобы закончить доказательство основной теоремы, остается доказать еще следующую элементарную лемму:

Лемма 2. *Пусть две случайные величины имеют математические ожидания нуль и дисперсии* $< \beta$; *если* $G_1(x)$ *и,* *соответственно, $G_2(x)$ — их функции распределения, то для всех x и всех $a>0$ имеет место неравенство:*

$$G_1(x)-G_2(x+2a)\leqslant\frac{\beta}{a^2}.$$

Доказательство. 1) В случае $x\leqslant -a$ из неравенства Чебышева следует:

$$G_1(x)\leqslant G_1(-a)\leqslant\frac{\beta}{a^2}$$

и a fortiori

$$G_1(x)-G_2(x+2a)\leqslant\frac{\beta}{a^2}.$$

2) В случае $x>-a$ из того же неравенства вытекает:

$$G_2(x+2a)\geqslant G_2(a)\geqslant 1-\frac{\beta}{a^2}$$

и a fortiori

$$G_1(x)-G_2(x+2a)\leqslant 1-G_2(x+2a)\leqslant\frac{\beta}{a^2}.$$

4. Сумма $\sum_{i=1}^{k} x_i$ имеет дисперсию $B_k=\sum_{i=1}^{k} b_i$ и закон распределения $U_k(x)$. Если фиксировать выбранную в лемме 1 постоянную δ, то можно в силу (6) утверждать, что при достаточно малых λ и τ выполняются неравенства

$$b_k<\delta \quad (k=1, 2, \ldots, n).$$

Тогда в ряде величин $B_1, B_2, \ldots, B_n$ будем иметь: $B_1=b_1<\delta$ и $B_n=1>\delta$ (требование $\delta<1$, разумеется, не вносит ограничения). Пусть B_s — первый член этого ряда, который больше, чем δ $(1<s\leqslant n)$; очевидно, тогда

$$\delta<B_s=B_{s-1}+b_s<2\delta.$$

Закон распределения $U_s(x)$ имеет, следовательно, среднее значение 0 и дисперсию $B_s<2\delta$. Но $\Phi\left(\frac{x}{\sqrt{B_s}}\right)$ есть также закон распределения с такими же точно свойствами и, следовательно, по лемме 2 для всех x и всех $a>0$:

$$U_s(x)-\Phi\left(\frac{x+2a}{\sqrt{B_s}}\right)<\frac{2\delta}{a^2}$$

и a fortiori

$$U_s(x)-V(x+2a, B_s)=U_s(x)-\Phi\left(\frac{x+2a}{\sqrt{B_s}}\right)-\varepsilon B_s<\frac{2\delta}{a^2}. \quad (8)$$