

Бэр Р.

Теория разрывных функций

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 51
ББК 22.1
Б97

Б97 **Бэр Р.**
Теория разрывных функций / Бэр Р. – М.: Книга по Требованию, 2013. – 137 с.

ISBN 978-5-458-25767-1

ISBN 978-5-458-25767-1

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2013
© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2013

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первоизданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА.

Уже при беглом взгляде на первые главы какого-нибудь курса классического анализа нам неизменно бросается в глаза одно обстоятельство. Основные понятия сначала вводятся посредством определений весьма общего характера; но непосредственно вслед за этим приносятся ограничения, суживающие область исследования; и только благодаря этим ограничениям становится возможным продвинуться сколько-нибудь далеко в построении различных теорий, составляющих математическую науку.

Но в таком случае является законным попытаться, возвращаясь к первоначальным определениям, извлечь из них все возможные интересные следствия, сохраняя за этими определениями, насколько возможно, их общий характер. Таким образом мы можем поставить себе задачу — построить, наряду с анализом классическим, иную, новую ветвь анализа, которая, разумеется, будет существенно отставать от первой в отношении количества полученных результатов, но взамен того будет создавать предложения большей общности.

К этой области математики относятся многочисленные уже теперь работы последних сорока лет, посвященные: разрывным функциям; функциям, не имеющим производной; функциям, имеющим производные всех порядков, но не разлагающимся в ряд Тэйлора; интегрированию возможно более общего класса функций; общему определению замкнутой плоской кривой и т. д.

Но весьма замечательно, что и классический анализ не может обойтись без рассмотрения вопросов, составляющих предмет этой второй ветви анализа. Особенности всевозможного рода, разрывы и т. д. появляются, помимо воли исследователя, в таких проблемах, где он охотно бы от них отказался.

Это утверждение, между прочим, оправдывается и исторически. Так, Поль дю-Буа-Реймон, в предисловии к своему философскому труду по теории функций, говорит, что к детальному анализу понятия функции он был приведен желанием ясно ориентироваться в теории интегралов дифференциальных урав-

нений второго порядка. Повидимому, и Георг Кантор был приведен к своим общим понятиям теории множеств желанием обобщить некоторые результаты, относящиеся к тригонометрическим рядам.

С точки зрения приложений может показаться преждевременным ставить вопрос о возможном практическом значении такого рода исследований. Однако мы можем отметить, что при математическом описании явлений природы постоянно имеют дело, смотря по обстоятельствам, то с непрерывною средою, то с дискретными моментами. Разумеется, речь идет только о приближениях; но в том-то и дело, что такого рода приближения с одинаковым успехом дают нам, в одних случаях — сплошная среда, в других — отдельные моменты. Некоторые теории физики, химии и минералогии представляют известную аналогию с математическим понятием разрывности. Во всяком случае, в противовес прежнему мнению, к счастью теперь оставленному, ничто не дает нам права утверждать, будто «природа не делает скачков». При таком положении вещей не является ли обязанностью математика приступить к изучению, *in abstracto*, соотношений, имеющих место между этими двумя понятиями, непрерывностью и разрывностью, — понятиями, которые, будучи противоположными друг другу, столь тесно друг с другом связаны? Быть может, это было бы самым верным путем к тому, чтобы подготовить почву для появления новой математической физики, в которой роль гипотезы была бы сведена к минимуму.

Настоящая работа содержит в себе материал лекций, читанных мною в 1904 г. в Collège de France по вопросу, входящему в круг тех исследований, о которых я только что говорил.

Содержание и план книги могут быть очерчены в двух словах. Поставив себе задачу найти все разрывные функции, которые могут быть представлены посредством рядов непрерывных функций, я подробно исследую все понятия и теории, какие мне нужны для того, чтобы получить полное решение этой задачи, и в том порядке, как они встречаются на этом пути.

Следуя принципу, принятому уже во всех вышедших в свет книгах настоящего собрания, я предполагаю известными читателю лишь самые обычные понятия (включая понятия мощности и счетного множества, рассмотренные в книге Бореля *Leçons sur la théorie des fonctions*); поэтому мне приходится подробно и с самого начала рассматривать различные теории, относящиеся к точечным множествам. Так, я изучаю последовательно понятия множеств замкнутых, совершенных, нигде не

плотных, производных множеств всех порядков. Для лучшего выяснения этих различных понятий мне показалось удобным сначала остановиться со всею подробностью на случае линейных множеств, где имеющие место обстоятельства могут быть представлены с известною наглядностью.

В этих исследованиях мне пришлось ввести принадлежащее Кантору понятие трансфинитного числа. Это понятие, будучи новым в математике, подало уже повод к философским спорам; причиною этого, без сомнения, является то, что, при известном способе его истолкования, оно приобретает как бы несколько таинственный характер. Вспомним, что ведь нечто аналогичное произошло в свое время и с мнимыми числами. Я твердо верю, что в данном случае, как и в других подобных случаях, математик имеет полную возможность стать на твердую почву. Это я пытаюсь показать во второй главе, целиком посвященной этой теории. Принятое мною изложение в своем общем плане соответствует тому, которому следовал Кантор в своих последних работах; я изменил его лишь в том смысле, что сохранил исключительно пункты, нужные мне для тех приложений, какие я имел в виду; с другой стороны, я старался пояснить изложение приведением конкретных примеров.

Работа, связанная с напечатанием настоящих лекций, была для меня значительно облегчена благодаря помощи, оказанной мне одним из моих слушателей, г. Данжуа, который взял на себя ее редактирование. Выражаю ему мою глубокую признательность.

Париж, 22 сентября 1904.

ПЕРВЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ О РАЗРЫВНЫХ ФУНКЦИЯХ.

I. ПРОСТЕЙШИЕ ПРИМЕРЫ.

1. Классический пример разрывных функций, разлагающихся в ряды непрерывных функций, представляют нам некоторые тригонометрические ряды. Мы будем отталкиваться от соотношения

$$\lg(1+z) = \frac{z}{1} - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n} + \dots, \quad (1)$$

которое, как это показывается в теории функций комплексного переменного, справедливо при условии $|z| \leq 1$, $z \neq -1$. Левая часть написанного равенства при этом представляет собою ту ветвь логарифма, которая обращается в нуль при $z=0$ и непрерывно изменяется при непрерывном перемещении точки, изображающей число z , внутри и на окружности круга сходимости (не проходя при этом через точку $z=-1$).

Положим

$$z = e^{ix},$$

причем x мы будем мыслить действительным числом, подчиненным условиям

$$-\pi < x < \pi.$$

Мы можем написать:

$$z = \cos x + i \sin x,$$

откуда

$$z^n = \cos nx + i \sin nx.$$

Точка, изображающая число z , может занимать любое положение на окружности круга сходимости, кроме $z=-1$; поэтому мы имеем:

$$\lg(1+z) = \sum (-1)^{n+1} \frac{\cos nx + i \sin nx}{n}.$$

С другой стороны, мы можем написать:

$$1 + z = 2 \cos \frac{x}{2} \left(\cos \frac{x}{2} + i \sin \frac{x}{2} \right).$$

При этом $\cos \frac{x}{2}$ положителен, ибо x заключено между $-\pi$ и $+\pi$.

Следовательно, модуль числа $1 + z$ равен $2 \cos \frac{x}{2}$, а аргумент того же числа равен $\frac{x}{2} + 2k\pi$. Но в таком случае все значения функции $\lg(1 + z)$ могут быть даны следующей формулой:

$$\lg(1 + z) = \text{Lg} \left(2 \cos \frac{x}{2} \right) + i \left(\frac{x}{2} + 2k\pi \right),$$

где Lg означает действительный логарифм, а k есть произвольное целое число.

Установив это, приравняем друг другу коэффициенты при i в обеих частях равенства (1). Мы получим, что при условии $-\pi < x < \pi$ и для некоторого целого k

$$\frac{x}{2} + 2k\pi = \frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \dots$$

Полагая $x = 0$, мы убеждаемся, что $k = 0$. Следовательно,

$$\frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \dots, \quad (2)$$

при условии

$$-\pi < x < \pi.$$

Чтобы довести до конца исследование функции, изображаемой рядом, стоящим в правой части равенства (2), мы заметим, что каждый член этого ряда есть периодическая функция с периодом 2π . Таким образом мы можем считать сумму этого ряда известной в каждом из интервалов:

$$\begin{aligned} \pi < x < 3\pi, \quad 3\pi < x < 5\pi, \dots, \\ -\pi > x > -3\pi, \quad -3\pi > x > -5\pi, \dots \end{aligned}$$

Остается рассмотреть, как ведет себя ряд, когда x равно одному из чисел $\pi, 3\pi, 5\pi, \dots, -\pi, -3\pi, -5\pi, \dots$. Мы непосред-

ственно видим, что в этих случаях все члены ряда обращаются в нуль. Таким образом мы убеждаемся, что ряд

$$\sum (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n}$$

сходится при любом значении переменного x , но что сумма его есть разрывная функция $f(x)$. Геометрически она изображается в виде следующих друг за другом прямолинейных отрезков и изолированных точек (черт. 1).

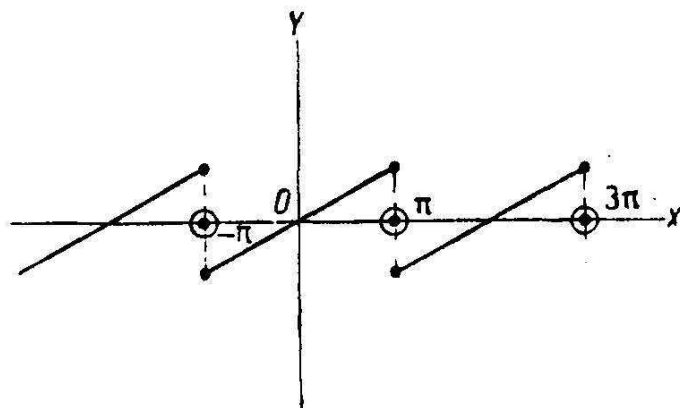
2. Станем теперь на несколько иную точку зрения. Зададим наперед какую-либо разрывную функцию $f(x)$ и попытаемся изобразить ее при помощи ряда, все члены которого были бы непрерывными функциями от x . Прежде всего я утверждаю, что задача эта равносильна задаче об отыскании такой последовательности непрерывных функций

$$f_1, f_2, \dots, f_n, \dots,$$

для которой при любом значении x_0 переменного x мы имели бы:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0) = f(x_0),$$

что мы будем выражать короче, говоря, что последовательность $f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$



Черт. 1.

имеет своим пределом функцию f . В самом деле, если нам дан ряд $u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$, члены которого суть непрерывные функции, то последовательность сумм $u_1 + u_2 + \dots + u_n$ которые также суть непрерывные функции, имеет своим пределом сумму f данного ряда; и обратно, если существует последовательность $f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$ непрерывных функций, имеющая своим пределом функцию f , то, полагая

$$u_1 = f_1, u_2 = f_2 - f_1, u_3 = f_3 - f_2, \dots,$$

мы получаем ряд непрерывных функций, сумма которого есть функция f .

В качестве примера мы рассмотрим функцию $f(x)$, определенную для $-1 \leq x \leq +1$, которая равна нулю для всех значений переменного x , кроме значения $x=0$, для которого она равна единице. Пусть n есть какое-либо целое положительное число; определим непрерывную функцию f_n , полагая

$$f_n = 0$$

для

$$-1 \leq x \leq -\frac{1}{n},$$

и для

$$-\frac{1}{n} \leq x \leq 1.$$

Для $x = 0$ положим $f_n = 1$. В каждом же из двух интервалов $\left(-\frac{1}{n}, 0\right)$ и $\left(0, \frac{1}{n}\right)$ мы заставим функцию f_n изменяться линейно, т. е. положим

$$f_n(x) = 1 + nx \quad \text{для} \quad -\frac{1}{n} \leq x \leq 0,$$

$$f_n(x) = 1 - nx \quad \text{для} \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{n}.$$

Определенная таким образом функция f_n очевидно непрерывна. Я утверждаю, что для любого значения x в рассматриваемом интервале

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x).$$

В самом деле, возможны два случая:

Первый случай. $x = 0$. В этом случае $f_n = 1$ для любого n , т. е. для любого n мы имеем $f_n = f$.

Второй случай. $x \neq 0$. Тогда существует такое целое положительное число p , что при $n > p$ мы имеем:

$$\frac{1}{n} < |x|.$$

Следовательно для $n > p$

$$f_n(x) = 0,$$

чем требуемое и доказано, ибо в этом случае $f(x) = 0$.

3. Сравним между собою оба рассмотренных примера. Мы видим, что существование разрывных функций, являющихся пределами функций непрерывных, гораздо более прямым путем обнаруживается во втором примере, нежели в первом. В связи с этим является уместным несколько остановиться на тех двух различных способах, какими вводится в математике понятие функции.

В первом примере мы исходили от обычного приема, состоящего в том, чтобы первоначально определить небольшое

количество простейших функций и ввести для них условные обозначения, а затем рассматривать все новые и новые комбинации этих первых простейших функций.

Во втором примере на общее понятие функции не было наложено никаких ограничений. Мы заботились лишь о том, чтобы рассматриваемые нами функции были однозначно определены для рассматриваемых значений переменного, причем способ этого определения мог быть выбран совершенно произвольно.

С другой стороны, пример ряда

$$\sum (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n}$$

показывает, что даже если мы станем на первую из двух указанных точек зрения, мы рано или поздно придем к необходимости рассматривать функции, поведение которых представляет те или иные особенности. В частности, к этому приводит нас рассмотрение рядов, к которым мы в свою очередь неизбежно приходим, вводя в математику понятие предела.

4. Тот прием, которым мы воспользовались во втором примере, с успехом может быть применен к любой функции, имеющей только одну точку разрыва. В самом деле, пусть $f(x)$ есть функция, определенная для $a \leq x \leq b$ и непрерывная во всех точках этого интервала, за исключением точки $x = c$. Рассмотрим интервал $(c - \alpha_n, c + \alpha_n)$, где α_n есть положительное число, стремящееся к нулю при неограниченном возрастании n . Мы определим функцию f_n следующим образом: положим $f_n = f$ для любого значения x в интервале (a, b) , не принадлежащего интервалу $(c - \alpha_n, c + \alpha_n)$, и для $x = c$. В каждом же из двух интервалов $(c - \alpha_n, c)$ и $(c, c + \alpha_n)$ мы заставим функцию f_n изменяться линейно. Если бы точка c совпадала с одной из точек a или b , то нам пришлось бы рассмотреть лишь одну из двух половин интервала $(c - \alpha_n, c + \alpha_n)$. Легко убедиться, что определенная таким образом функция f_n непрерывна и имеет своим пределом функцию f .

II. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ О ФУНКЦИЯХ, ЯВЛЯЮЩИХСЯ ПРЕДЕЛАМИ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ.

5. Мы ставим себе целью изучение разрывных функций, являющихся пределами функций непрерывных.

При этом мы в первую очередь ограничимся рассмотрением функций, зависящих от одного только переменного x , которое

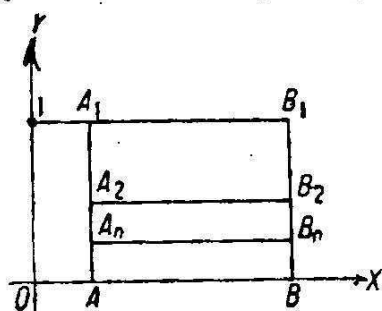
может принимать все значения, принадлежащие некоторому *конечному* интервалу (a, b) ; далее, мы будем предполагать рассматриваемые нами функции *ограниченными*, т. е. заключенными между конечными пределами.

Прежде всего мы несколько преобразуем задачу о построении последовательности непрерывных функций, стремящейся к разрывной функции $f(x)$ (т. е. имеющей эту функцию своим пределом).

Допустим, что функция $f(x)$ есть предел последовательности непрерывных функций

$$f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$$

Множество значений функций $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$ мы можем иначе рассматривать как множество значений некоторой функции от двух переменных, x и n ; на место переменного n ,



Черт. 2.

принимаящего только целые значения, мы теперь подставим переменное y , изменяющееся непрерывно. Мы введем некоторую функцию $F(x, y)$, подчинив ее в первую очередь следующим условиям: для $y = 0$ она должна обращаться в функцию $f(x)$, а для $y = \frac{1}{n}$ — в функцию $f_n(x)$. Изобразим геометрически область значений переменных x и y (черт. 2); x изменяется в промежутке между числами a и b которые соответственно изображаются точками A и B ; y принимает все значения, заключенные между нулем и единицею.

Мы отмечаем прямые $A_1B_1, A_2B_2, \dots, A_nB_n, \dots$, соответствующие ординатам $1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$

Функция $F(x, y)$, по определению, совпадает с функцией $f(x)$ на отрезке AB и с функцией $f_n(x)$ на отрезке A_nB_n .

Я утверждаю, что определение функции $F(x, y)$, может быть дополнено таким образом, чтобы она оказалась *непрерывною по отношению к совокупности обеих переменных* во всем прямоугольнике $AB B_1 A_1$, за исключением отрезка AB .

В самом деле, для того чтобы этого достигнуть, достаточно дополнить определение функции $F(x, y)$ следующим образом. Пусть на каждой прямой $x = x_0$, параллельной OY , функция $F(x, y)$ линейно зависит от y в промежутке между каждыми