

Ф. Клейн

**Вопросы элементарной и
высшей математики**

**Часть 1. Арифметика, алгебра и
анализ**

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 51
ББК 22.1
Ф11

Ф11 **Ф. Клейн**
Вопросы элементарной и высшей математики: Часть 1. Арифметика, алгебра
и анализ / Ф. Клейн – М.: Книга по Требованию, 2021. – 526 с.

ISBN 978-5-458-66034-1

ISBN 978-5-458-66034-1

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2021

© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2021

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.



Серия Книжный Ренессанс

www.samizday.ru/reprint

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловіе автора	первому изданію	Стр. XI
Предисловіе автора	второму изданію..	XIV
Предисловіе редактора		XV

Введеніе.

Задача настоящихъ лекцій	1
Указаніе литературы	2

ОТДѢЛЪ ПЕРВЫЙ: АРИѦМЕТИКА.

ГЛАВА I.

Дѣйствія надъ натуральными числами.

1. Введеніе чиселъ	8
Основныя законы ариометическихъ дѣйствій	11
3. Логическія теоріи цѣлыхъ	14
Замѣчанія относительно преподаванія математики	22
4. Практика счета съ цѣлыми числами	24
Описаніе счетной „Brunsviga“	25

ГЛАВА II.

Первое расширеніе понятія о числѣ.

1. Отрицательныя числа.	34
Къ исторіи отрицательныхъ чиселъ	38
2. Дроби	43
Ирраціональныя числа	47

ГЛАВА III.

Особыя свойства цѣлыхъ чиселъ.

Роль теоріи	университетскомъ	
преподаваніи		57
Отдѣльныя вопросы	теоріи	61
Простыя числа и разложеніе на множителей		61
Обращеніе простыхъ дроби въ десятичныя		62

VI

	Стр.
Непрерывныя дроби	64
Пифагоровы числа. Великая теорема Ферма	69
Задача о дѣленіи окружности на равныя части	76
Доказательство невозможности построения правильного семиугольника циркулемъ и линейкой	79

ГЛАВА IV

Комплексныя числа.

1. Обыкновенныя комплексныя числа	60
2. Высшія комплексныя особенности кватернионы	94
Операции надъ векторами	102
3. Умноженіе кватернионовъ преобразованіе ротнаго растяженія въ пространствѣ	106
Изображеніе векторовъ въ трехмѣрномъ пространствѣ	110
4. Комплексныя числа въ преподаваніи	119

ГЛАВА V

Современное развитіе и строеніе математики вообще

Два различныхъ ряда эволюцій, по которымъ параллельно развивался математическій анализъ	123
Краткій обзоръ исторіи	128

ОТДѢЛЪ ВТОРОЙ: АЛГЕБРА.

Введеніе.

Учебники	140
Выясненіе главной задачи: примѣненіе геометрическихъ рѣшеній уравненій	140

ГЛАВА I.

Вещественныя уравненія съ вещественными неизвѣстными

1. Уравненія, содержащія одинъ параметръ	141
2. Уравненія съ двумя параметрами	143
Классификація уравненій по числу вещественныхъ корней	149
3. Уравненія съ тремя параметрами $\lambda, \mu,$	154
Аппаратъ для численнаго рѣшенія уравненій	156
Дискриминантная поверхность биквадратнаго уравненія	161

ГЛАВА II.

Уравненія въ области комплексныхъ чиселъ

А. Основная теорема алгебры	167
В. Уравненія съ однимъ комплекснымъ параметромъ; геометрическая интерпретація при помощи конформнаго изображенія	171

VII

Примѣры.

	Стр.
1. Двучленное уравненіе	181
Неприводимости; „невозможность“ дѣленія	185
2. Уравненіе дѣдра	189
3. Уравненія тетраэдра, таэдра, икосаэдра	196
4. Продолженіе; выводъ уравненій	202
О рѣшеніи нашихъ нормальныхъ уравненій	211
6. Униформизированіе нормальныхъ уравненій	216
средствомъ трансцендентныхъ функцій	219
Тригонометрическое рѣшеніе кубическаго уравненія	224
7. Разрѣшимость въ радикалахъ	228
8. Сведеніе	230
уравненій	нормаль-
уравненіймъ	228
Къ теоріи уравненій пятой степени	230

ОТДѢЛЪ ТРЕТІЙ: АНАЛИЗЪ.

Введеніе

ГЛАВА I.

Логарифмы и показательныя функціи.

1. Систематика алгебраическаго	236
Историческое развитіе ученія о логарифмѣ	240
Неперь и Бюрги: уравненіе въ конечныхъ разностяхъ	241
17-е столѣтіе: площадь гиперболы	241
Эйлеръ и Лагранжъ: алгебраическій анализъ	249
19-е столѣтіе: функція комплекснаго переменнаго	251
2. Нѣкоторыя замѣчанія школьномъ преподаваніи	253
4. Точка зрѣнія	256
ременной теоріи функцій	256

ГЛАВА II.

О гониометрическихъ функціяхъ.

1. Теорія гониометрическихъ функцій	уче-
ніемъ логарифмѣ	267
2. Тригонометрическія таблицы	279
А. Чисто тригонометрическія	279
В. Логарифмно-тригонометрическія	283
3. Примѣненіе гониометрическихъ функцій	287
А. Тригонометрія, особенности, сферическая тригонометрія	287
Основныя понятія сферической тригонометріи и формулы первой	288
Формулы второй степени, собственные и чуждые треугольники	296
Площадь сферическаго	дополнительныя соотношенія сфери-
тригонометріи	300

VIII

	Стр.
В. Ученіе — небольшихъ — особенностей	
колебанійхъ маятника	307
Школьное изложеніе (скрытый анализъ бесконечно-малыхъ)	308
С. Изображеніе періодическихъ функцій посредствомъ рядовъ изъ тригонометрическихъ функцій (тригонометрическіе ряды)	312
Приближенія, выраженные конечнымъ числомъ членовъ ряда	313
Величина погрѣбности: сходимость бесконечныхъ рядовъ	320
Явленія Гиббса	325
Д. Общее понятіе — функцій	327
Историческое значеніе тригонометрическихъ рядовъ Фурье	336

ГЛАВА III.

Исчисленіе бесконечно-малыхъ въ собственномъ смыслѣ слова.

1. Общія замѣчанія относительно бесконечно-малыхъ	339
Происхожденіе исчисленія бесконечно-малыхъ вслѣдствіе особенностей чувственныхъ воспріятій	340
Логическое обоснованіе исчисленія бесконечно-малыхъ посредствомъ понятія о предѣлѣ (Ньютонъ и послѣдователи до Коши)	341
Введеніе дифференціала (Лейбницъ и его послѣдователи)	350
Реакція противъ предѣльныхъ переходовъ и бесконечно-малыхъ: производныхъ Лагранжа	359
О преподаваніи исчисленія бесконечно-малыхъ въ школѣ	360
Теорема Тейлора	362
Параболы, соприкасающіяся съ данной кривою	362
Оѣнка погрѣбности по Коши	374
Замѣчанія историческаго характера	379
Учебники	381
Характеръ нашего изложенія	381

ПРИЛОЖЕНІЯ

ГЛАВА I.

Трансцендентность чиселъ e и π

Историческія замѣчанія	385
Доказательство трансцендентности чис.	387
Доказательство трансцендентности числа	394
Трансцендентныя и алгебраическія	401

IX

ГЛАВА II.

Ученіе о комплексахъ.

1. Мощное комплекса	Стр. 408
Исчислимость рациональных и алгебраическихъ	110
Нечислимость континуума	415
Расположеніе элементовъ совокупности	427
О значеніи и дѣлахъ ученія о совокупностяхъ	435

ДОПОЛНЕНІЯ КО ВТОРОМУ ИЗДАНІЮ.

1. Новые коммисіи для изученія вопросовъ преподаванія (къ стр. 2-й)	443
2. Новѣйшая литература по преподаванію математики (къ стр. 7-й)	446
3. Къ великой теоремѣ Ферма (къ стр. 75-й)	447
4. Къ доказательству невозможности построения правильнаго семиугольника (къ стр. 79)	449
Вращенія съ растяженіями четырехмѣрнаго пространства и трансформации Лоренца въ современной электродинамикѣ (къ стр. 111-й)	449
6. Къ дискриминантной поверхности биквадратнаго уравненія (къ стр. 157)	451
7. Къ уравненіямъ шестой степени (къ стр. 229)	452
8. Къ исторіи логарифмовъ (къ стр. 241)	452
9. Къ школьному изложенію ученія о логарифмахъ (къ стр. 255)	453
10. Къ ученію колебаній маятника (къ стр. 308)	453
11. Къ развитію исчисленія безконечно-малыхъ (къ стр. 339)	454
12. Къ разсужденіямъ основаній исчисленія безконечно-малыхъ (къ стр. 357)	455
13. Къ ученію о совокупностяхъ (къ стр. 405)	456
14. Къ вопросу о числѣ вѣтвей совокупности (къ стр. 408)	456
15. О Фр. Майерѣ. (къ стр. 437)	457

ДОПОЛНЕНІЯ РЕДАКТОРА.

1. Платъ II („Алгебры“).	460
II. О Римановыхъ поверхностяхъ	463

Предисловіе автора къ первому изданію.

Настоящее литографированное изданіе, которое я предлагаю вниманію математической публики и въ особенности преподавателей математики въ нашихъ среднихъ учебныхъ заведеніяхъ, должно представлять собою, по мысли автора, первое продолженіе тѣхъ лекцій „о преподаваніи математики въ среднихъ учебныхъ заведеніяхъ“, специально посвященныхъ вопросу объ „организации математическаго преподаванія“, которыя я выпустилъ въ свѣтъ въ прошломъ году вмѣстѣ съ г. Шиммакомъ*). Въ этой послѣдней книгѣ былъ сдѣланъ обзоръ различныхъ формъ, въ которыхъ осуществляется преподаваніе математики въ средней школѣ; теперь было необходимо присоединить сюда разборъ самаго учебнаго матеріала. Въ этихъ лекціяхъ я имѣлъ въ виду представить учителю—или также болѣе зрѣлому студенту—содержаніе и обоснованіе областей, входящихъ въ кругъ преподаванія, принимая при этомъ во вниманіе фактически существующую постановку послѣдняго; я старался подойти къ этому съ точки зрѣнія современной науки въ возможно простой и живой формѣ. При этомъ я не имѣлъ въ виду дать систематическое изложеніе, какъ это дѣлаютъ, напримѣръ, Веберъ и Вельштейнъ; я хотѣлъ придать этимъ лекціямъ характеръ эскизовъ въ той самой формѣ, въ какую онѣ выливались, когда я ихъ дѣйствительно читалъ.

На такую программу—которая въ данномъ случаѣ проведена пока лишь для Ариметики, Алгебры и Аналіза, я указывалъ уже въ предисловіи къ упомянутой книгѣ Клейна-Шиммака (апрѣль 1907 г.); я тогда надѣялся, что г. Шиммакъ, несмотря на многія препятствія, все же найдетъ время, чтобы

*) См. выписку на стр.

снова взять на себя обработку моих лекцій для печати. Но я самъ, можно сказать, помѣшалъ ему сдѣлать это, такъ какъ постоянно пользовался его энергіей для работы въ другихъ направленьяхъ по интересующимъ насъ обоимъ педагогическимъ вопросамъ. Какъ бы тамъ ни было, но вскорѣ выяснилось, что выполнить первоначальный планъ въ короткій срокъ было неосуществимо, а между тѣмъ это казалось желательнымъ въ интересахъ фактическаго воздѣйствія на вопросы преподаванія, стоящія теперь на первомъ планѣ. Поэтому я снова прибѣгнулъ, какъ въ прежніе годы, къ болѣе удобному средству — литографированію моихъ лекцій; къ тому же мой теперешній ассистентъ, г. Геллингерь (Ernst Hellinger) оказался исключительно умѣлымъ помощникомъ въ этомъ дѣлѣ.

Я долженъ сказать, что работу, которая выпала на долю г. Геллингера, отнюдь не слѣдуетъ считать незначительной. Въдѣ отъ устнаго изложенія преподавателя, обусловленнаго всевозможными случайными обстоятельствами, до письменнаго изложенія, въ значительной мѣрѣ сглаженнаго и обработаннаго, еще очень далеко. Но только въ литографированномъ изданіи точность обработки и выдержанность изложенія не приводятся съ такою строгостью, какъ это считается необходимымъ, согласно установившемуся обычаю, для печатныхъ произведеній.

Я нѣсколько боюсь опредѣленно обѣщать, что за этими лекціями послѣдуетъ продолженіе этого изданія по вопросу о преподаваніи другихъ отраслей математики и прежде всего Геометріи*); я хочу только высказать въ заключеніе желаніе, чтобы настоящая книга оказалась полезной тѣмъ, что побудитъ много учителя нашей средней школы къ самостоятельному размышленію о новомъ, болѣе цѣлесообразномъ изложеніи того учебнаго матеріала, который они преподаютъ. Исключительно съ такой точки зрѣнія надо смотрѣть на мою книгу, а не считать ее готовымъ учебнымъ планомъ; разработку послѣдняго я всецѣло предоставляю тѣмъ, которые сами работаютъ въ школѣ. Если кто нибудь

*) Къ счастью, оказалось возможнымъ уже въ 1900 году издать „Геометрію“, какъ вторую часть „Элементарной математики съ высшей точки зрѣнія“.

предполагаетъ, что я когда либо понималъ свою дѣятельность иначе, то это недоразумѣніе. Въ частности, учебный планъ Педагогической Коммиссіи Общества Германскихъ Естествоиспытателей и Врачей (т. наз. „Меранская программа“) *) выработанъ не мною, а лишь при моемъ участіи выдающимися представителями школьной математики.

Наконецъ, относительно характера изложенія въ этой книгѣ достаточно будетъ сказать, что я здѣсь, какъ и прежде въ подходящихъ случаяхъ, старался всюду соединить геометрическую наглядность съ той точностью, какую даютъ арифметическія формулы; я особенно старался прослѣдить исторію возникновенія различныхъ теорій, чтобы этимъ путемъ выяснить особенности различныхъ способовъ изложенія, которые въ современномъ преподаваніи постоянно уживаются рядомъ.

Гёттингенъ, конецъ іюня 1908 г.

Ф. Клейнъ.

*) См. статью В. Кагана „О реформѣ преподаванія математики среднихъ учебныхъ заведеній Германіи и Франціи“. Вступительная статья къ русскому изданію книги: Борель — Штеккель „Элементарная Математика“ (См. также примѣч. на стр. 5).

Предисловіе автора ко второму изданію.

Чтобы не слишкомъ задерживать выходъ въ свѣтъ этого новаго изданія, вмѣсто уже разошедшагося перваго, пришлось во всѣхъ существенныхъ пунктахъ повторить первое изданіе безъ измѣненій. Поэтому вся обработка текста свелась къ тому, что во многихъ мѣстахъ было сглажено изложеніе, исправлено было нѣсколько недосмотровъ, а также внесены кое-гдѣ краткія дополненія къ литературнымъ указаніямъ. Нѣсколько болѣе подробныя „добавленія“ по нѣкоторымъ вопросамъ, затронутымъ въ этихъ лекціяхъ, помѣщены отдѣльно въ концѣ книги: въ нихъ, между прочимъ, содержатся безъ всякой претензіи на полноту—краткіе обзоры новѣйшей литературы и дальнѣйшаго развитія тѣхъ стремленій къ реформѣ преподаванія, о которыхъ упоминается въ лекціяхъ. Выполненіе новаго изданія снова было поручено д-ру Геллингеру, состоящему въ настоящее время приватъ-доцентомъ въ Марбургѣ.

Ф. Хлейнъ.

Геттингенъ,
Мартъ, 1911
