Зубелевич Г.

Сборник задач московских математических олимпиад

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 50
ББК 22
З-91

Зубелевич Г.
З-91 Сборник задач московских математических олимпиад / Зубелевич Г. – М.: Книга по Требованию, 2026. – 304 с.

ISBN 978-5-8854-3000-5

Сборник содержит задачи, предлагавшиеся на математических олимпиадах, которые проводит Московский институт усовершенствования учителей для учащихся 5-7 классов, и задачи для учащихся 8 классов, составленные автором и частично заимствованные. Составленный из задач, несколько повышенной трудности, сборник может служить хорошим пособием для подготовки к олимпиадам и для занятий в математических кружках.

ISBN 978-5-8854-3000-5

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2026
© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2026

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.



Серия Книжный Ренессанс
www.samizday.ru/reprint

V

КЛАСС[1]

I. Примеры

а) Решить уравнения:

1. $1-\left[\left(3\frac{5}{14}-\frac{1\frac{11}{49}}{x\cdot\frac{25}{38}-47\frac{3}{7}}\right)\cdot\frac{12}{55}+1\frac{3}{85}\right]:5\frac{14}{17}=\frac{5}{7}$.

2. $12\frac{3}{5}:\left[5\frac{2}{15}+\left(5\frac{5}{9}-\frac{8\frac{3}{4}}{\frac{8}{21}\cdot x-1\frac{2}{5}}\right)\cdot 5\frac{68}{125}\right]-\frac{2}{11}=\frac{4}{5}$.

3. $\left[3{,}25-\frac{\left(6\frac{9}{16}-2\frac{1}{2}\cdot x\right)\cdot 0{,}53}{0{,}75}\right]:6\frac{2}{3}=\frac{4}{15}$.

4. $4{,}98-120{,}12:\left[8{,}008\cdot\left(4{,}0025-\frac{1{,}12211-2\cdot x}{4{,}444}\right)\right]+0{,}03=1{,}01$.

5. $\left[\left(\frac{30{,}01-x:9}{7}+97{,}785\right)\cdot 8-488{,}84\right]:7=45{,}6$.

6. $2\cdot[0{,}2-0{,}02:(0{,}002+0{,}0002\cdot x)]=0{,}3$.

7. $50{,}32-21{,}32:[(20+9{,}744:x)\cdot 0{,}5-1{,}63]=48{,}27$.

8. $[(2-x):1{,}5+17{,}4:29]:(25\cdot 0{,}16)-0{,}005=0{,}4$.

б) Восстановить цифры и знаки действий:

9.
123,.7.
348,2.4
2.9,748
.3.,497

10.
3 . 5, 6 7 .
2 0 ., . . . 9
. 9 6, 8 8 9

---

[1] Часть задач этого раздела может быть решена в IV классе, например: № 4—28; 36—38; 50; 54; 56; 72—75; 82—84; 86—89; 92; 105; 113; 115; 127; 128; 131; 149; 150; 159; 163—168; 175—177; 184—194; 206; 312—314; 321; 323; 327; 328 и некоторые другие.

11.

```
        . . . . .
            3 4 .
-----------------
        . . . . .
    . . . . . .
  2 3 5 0 3 8
-----------------
  . . . . . . . 6
```

12.

```
        . . 4
        2 3 .
-----------------
      . . 2 4
    1 . . .
  1 . . .
-----------------
  . 1 . . . .
```

13.

```
      . . .
    2 . .
-----------
  2 . . 5
. . 0
-----------
8 3 . . .
```

14.

```
        2 3 . . 8 5
              . . . 5
-----------------------
      . . . . . 2 .
      . 3 4 7 . .
    . . 9 5 7 0
  . 0 4 . . .
-----------------------
  7 . . . . . . . .
```

15.

```
        . 7 . . .
            7 4 3
-----------------
      . . . . . 5
    . . . . . .
  . . . . . .
-----------------
  4 2 . . . 8 7 .
```

16.

```
        . . 8
        . . .
-----------------
      7 . . 4
    7 . . 4
  7 . . 4
-----------------
  . . 8 . . .
```

17.

```
        . . 6
      3 . .
-----------
    2 . . 6
  2 . . 2
. . 8 .
-----------
1 4 . . . .
```

18.

```
      . . . .
          . 2
-----------------
    1 8 . 4 8
  7 4 9 9 .
-----------------
  . . . 6 6 .
```

19.

```
        . . 8 .
          . 7 .
-----------------
      3 . . . 0
    . . 0 . 2
  . . . 3 .
-----------------
  . . . 9 . . .
```

20. 237 · . 1 . . . =
= 7 . . . 065

21. Какую цифру надо поставить вместо звездочки в четырехзначном числе 777*, чтобы получилось число, делящееся на 6?

22. Число 82** делится на 90. Найти делимое.

23. При делении некоторого числа на 45 цифру тысяч 3 в делимом приняли за 9, а цифру единиц 9 за 4 и получили в частном 438 и в остатке 44. Найти верное частное и остаток.

24. При делении некоторого числа на 105 цифру тысяч 6 в делимом приняли за 0, а цифру десятков 0 за 6 и получили в частном 389, а в остатке 16. Найти верное частное и остаток.

25. При сложении нескольких чисел ученик из-за небрежности допустил ошибки: цифру единиц 9 он принял за 3, цифру сотен 7 он принял за 1, а цифру тысяч 6 он принял за 5. У ученика получилось в сумме 72 438. Найдите верную сумму.

26. Между некоторыми цифрами 1 2 3 4 5 6 7 8 9, написанными в указанном порядке, поставить знаки сложения и вычитания так, чтобы получилось число, равное 100.

27. Найти быстро сумму всех четных чисел от 2 до 100.

28. Если от задуманного числа отнять 11, то получившееся число разделится на 11. Если от задуманного числа отнять 7, то полученное число разделится на 7. Если от задуманного числа отнять 13, то полученное число разделится на 13. Найти задуманное число.

в) Вычислить:

29. $\frac{5}{6}+6\frac{5}{6}\cdot\left(11\frac{94}{1591}-6\frac{38}{1517}\right):8\frac{11}{43}$

30. $1\frac{1}{6}+6\frac{5}{6}\cdot\left(10\frac{133}{2173}-5\frac{23}{1643}\right):41\frac{12}{31}$

31. $15\frac{120}{187}-5\frac{120}{143}-\frac{200}{2431}+\left(37\frac{11}{29}-37\frac{11}{29}\right):$

$:2\frac{13}{47}\cdot 100+50:21\frac{152}{163}$

32. $2\frac{16}{143}-1\frac{131}{132}+2\frac{11}{13}:2\frac{2}{5}+18\frac{13}{17}\cdot\left(15\frac{3}{37}-15\frac{3}{37}\right):$

$:14\frac{15}{31}+8\frac{298}{429}$

33. $\left(17\frac{3535}{88\,375}-16\frac{1001}{1365}\right)\cdot 3\frac{6}{23}+3\frac{6}{23}:\left(5-1\frac{187}{253}\right)$

34. $\left(13\frac{6105}{11\,211}-12\frac{9919}{18\,382}\right):1\frac{5}{1010}-2\frac{6}{17}\cdot\left(8-7\frac{2323}{4040}\right)$

35. $\dfrac{2\frac{2}{5}-\frac{2}{5}\cdot\left(1\frac{3}{4}+\frac{17:3125}{8:6250}\right)}{\left(2\frac{31}{42}+1\frac{5}{16}\right)\cdot 6\frac{3}{43}+5\frac{40}{43}}$

Перед решением следующих примеров надо повторить распределительный закон умножения, правила прибавления и вычитания суммы и разности; определение и примеры взаимно простых чисел; повторить нахождение их наименьшего общего кратного; заметить, что два последовательных числа взаимно просты.

Найти быстро результаты:

36. $\dfrac{254 \cdot 399 - 145}{254 + 399 \cdot 253}$

37. $\dfrac{5932 \cdot 6001 - 69}{5932 + 6001 \cdot 5931}$

38. $\dfrac{423\,134 \cdot 846\,267 - 423\,133}{423\,133 \cdot 846\,267 + 423\,134}$

39. $\dfrac{1}{20} + \dfrac{1}{30} + \dfrac{1}{42} + \dfrac{1}{56} + \dfrac{1}{72} + \dfrac{1}{90} + \dfrac{1}{110} + \dfrac{1}{132}$

40. $\dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 4} + \dfrac{1}{4 \cdot 5} + \dfrac{1}{5 \cdot 6} + \dfrac{1}{6 \cdot 7} + \dfrac{1}{7 \cdot 8} + \dfrac{1}{8 \cdot 9} + \dfrac{1}{9 \cdot 10}$

41. $\dfrac{1}{10 \cdot 11} + \dfrac{1}{11 \cdot 12} + \dfrac{1}{12 \cdot 13} + \dfrac{1}{13 \cdot 14} + \dfrac{1}{14 \cdot 15} + \dfrac{1}{15 \cdot 16} + \dfrac{1}{16 \cdot 17} + \dfrac{1}{17 \cdot 18} + \dfrac{1}{18 \cdot 19} + \dfrac{1}{19 \cdot 20}$

42. $\dfrac{4}{5 \cdot 7} + \dfrac{4}{7 \cdot 9} + \dfrac{4}{9 \cdot 11} + \dfrac{4}{11 \cdot 13} + \ldots + \dfrac{4}{59 \cdot 61}$

43. $\dfrac{7^2}{2 \cdot 9} + \dfrac{7^2}{9 \cdot 16} + \dfrac{7^2}{16 \cdot 23} + \ldots + \dfrac{7^2}{65 \cdot 72}$

44. $10\,101 \cdot \left(\dfrac{5}{111\,111} + \dfrac{5}{222\,222} - \dfrac{4}{3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37} \right)$

45. $333 \cdot \left(\dfrac{71}{111\,111} + \dfrac{573}{222\,222} - \dfrac{2}{3 \cdot 7 \cdot 37} \right)$

46. $182 \cdot \left(\dfrac{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27}}{2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \frac{2}{27}} : \dfrac{4 - \frac{4}{7} + \frac{4}{49} - \frac{4}{343}}{1 - \frac{1}{7} + \frac{1}{49} - \frac{1}{343}} \right) \cdot \dfrac{80\,808\,080}{91\,919\,191}$

47. $158 \cdot \left(\dfrac{12 - \frac{12}{7} - \frac{12}{289} - \frac{12}{85}}{4 - \frac{4}{7} - \frac{4}{289} - \frac{4}{85}} : \dfrac{5 + \frac{5}{13} + \frac{5}{169} + \frac{5}{91}}{6 + \frac{6}{13} + \frac{6}{169} + \frac{6}{91}} \right) \times \times \dfrac{505\,505\,505}{711\,711\,711}$

Найти x из следующих равенств:

48. $\left(\frac{1}{25\cdot 26}+\frac{1}{26\cdot 27}+\frac{1}{27\cdot 28}+\frac{1}{28\cdot 29}+\frac{1}{29\cdot 30}\right)\cdot 150+$
$+1{,}03:[10{,}3\cdot(x-1)]=11.$

49. $\left(\frac{2}{11\cdot 13}+\frac{2}{13\cdot 15}+\frac{2}{15\cdot 17}+\frac{2}{17\cdot 19}+\frac{2}{19\cdot 21}\right)\times$
$\times 432-[2{,}04:(x+1{,}05)]:0{,}12=19.$

II. Делимость чисел

50. Найти наименьшее число, которое при делении на 2 дает остаток 1, при делении на 3—2, на 4—3, на 5—4, на 6—5, на 7—6, на 8—7, на 9—8, на 10—9.

51. Найти наибольшее трехзначное число, при делении которого на 4 получается в остатке 3, а при делении на 5 — в остатке 4, а при делении на 6 — в остатке 5.

52. Найти все числа, большие 25 000, но меньшие 30 000, которые как при делении на 131, так и при делении на 1965 дают в остатке 125.

53. Найти все числа, большие 10 000, но меньшие 15 000, которые как при делении на 393, так и при делении на 655 дают в остатке 210.

54. При делении данного числа на 225 в остатке получилось 150. Разделится ли данное число нацело на 75 и почему?

55. На складе имеются ножи и вилки. Число тех и других больше 300, но меньше 400. Если ножи и вилки вместе считать десятками или дюжинами, то в обоих случаях получается целое число десятков и целое число дюжин. Сколько было ножей и вилок на складе, если ножей было на 160 меньше, чем вилок?

56. Изменятся ли при делении с остатком частное и остаток, если делимое и делитель увеличить в 3 раза? (Ответ подтвердить примером.)

57. При делении одного числа на другое получилось в частном 18 и в остатке 24. Как изменится частное и как остаток, если делимое и делитель уменьшить в 6 раз? (Ответ подтвердить двумя примерами.)

58. Доказать, что если сумма двух чисел есть число нечетное, то произведение этих чисел всегда будет числом четным.

59. Докажите, что если даны три каких-нибудь числа, из которых ни одно не делится на три, то или сумма

всех этих чисел, или сумма двух каких-нибудь из них должна делиться на 3.

60. Даны три последовательных натуральных числа, из которых первое — четное. Докажите, что произведение их кратно 24.

61. Для устройства елки купили орехов, конфет и пряников — всего 760 штук; орехов взяли на 80 штук больше, чем конфет, а пряников на 120 штук меньше, чем орехов. Какое наибольшее число одинаковых подарков для детей можно сделать из этого запаса?

62. Три автобуса в 6 *ч* утра отправились с одной и той же станции по трем различным маршрутам и совершают рейс туда и обратно: первый автобус — за 1 *ч* 30 *мин*, второй — за 1 *ч* 50 *мин* и третий — за 1 *ч* 10 *мин*.

По совершении каждого рейса автобусы через 10 *мин* отправляются в следующий рейс по тому же маршруту. Через сколько часов: 1) первый автобус отправится одновременно со вторым, 2) второй автобус — с третьим и 3) все три автобуса одновременно отправятся с конечной станции?

63. Отец и сын решили перемерить шагами расстояние между двумя деревьями, для чего отошли одновременно от одного и того же дерева. Длина шага отца — 70 *см*, сына — 56 *см*. Найти расстояние между этими деревьями, если известно, что следы их совпали 10 раз.

64. Если сложить несократимую дробь с единицей, то вновь полученная дробь будет также несократима. Почему?

65. Если правильная дробь несократима, то дробь, дополняющая ее до 1, также несократима. Почему?

66. Доказать, что из любых 11 чисел всегда можно выбрать два таких числа, разность которых кратна 10.

67. Доказать, что произведение НОД и НОК двух данных чисел равно произведению этих чисел.

68. Наименьшее общее кратное двух чисел, не делящихся друг на друга, равно 630, а наибольший общий делитель их равен 18. Найти эти числа.

69. Даны дроби $\frac{35}{396}$ и $\frac{28}{297}$. Найти наименьшее из всех чисел, при делении которого на каждую из данных дробей получатся целые числа.

70. Даны дроби $\frac{8}{15}$ и $\frac{18}{35}$. Найти наибольшее из всех чисел, при делении на которое каждой из данных дробей получаются целые числа.

71. Делимое разделили на удвоенный делитель и получили 13,375. Когда же делимое разделили на удвоенное частное, то получили 4. Найти делимое и делитель.

72. К числу 10 справа и слева приписать по одной цифре так, чтобы получилось число, кратное 36.

73. К числу 13 справа и слева приписать по одной цифре так, чтобы получилось число, кратное 45.

III. Метрическая система мер в задачах

74. Медный кубик, ребро которого 0,5 *см*, весит 1,1 *г*. Сколько весит медный куб, ребро которого равно 800 *мм*? (Ответ округлить до 0,1 *т*.)

75. Из соснового дерева сделан кубик весом 8 *г*. Ребро кубика равно 2,5 *см*. Какой объем занимают 4,8 *г* соснового дерева? (Ответ округлить до 0,1 *куб. м*.)

76. Длина ребра куба полметра. Этот куб разрезали на кубики, длина ребра каждого из них равна 2 *мм*. Кубики затем уложили в один сплошной ряд. Чему равна его длина?

77. Ребро куба равно 2 *дм*. Этот куб разрезали на кубические миллиметры, а затем выложили их в один сплошной ряд. Какой длины получился этот ряд?

78. В летний дождь выпало 5 *мм* осадков. Сколько стоила бы искусственная поливка таким количеством воды поля в 725 *га*, если стоимость 1 *л* при искусственной поливке равна 0,0005 коп?

79. Тюк прессованного сена имеет длину 86 *см*, ширину 4 *дм* и высоту 35 *см*. Какая часть грузоподъемности 50-тонного железнодорожного вагона используется при погрузке сена, если в него вмещается 650 тюков и если 1 *куб. м* прессованного сена весит 3,5 *ц*? (Ответ дать с точностью до 0,01 вагона.)

80. Высчитано, что 1 *кв. м* овсяного поля в течение лета испаряет около 240 *л* воды. Сколько это составляет кубических метров на 1 *га*? Сколько времени могла бы течь эта вода струей по 1 *л* в секунду?

81. Средний вес дождевой капли $\frac{1}{12}$ *г*. Определить число капель дождя, упавших на 1 *кв. м* земли, если дождь дал слой воды толщиной 2,2 *мм*.

IV. Задачи на части

82. От города *A* до города *B* 590 *км*. Часть этого пути идет в гору, часть — горизонтально и часть — под гору.

Путь под гору в 4 раза меньше горизонтального и на 110 *км* меньше, чем в гору. Найти длину пути в гору, горизонтально и под гору.

83. Группа туристов проехала на пароходе, на автобусе и прошла пешком — всего 475 *км*. На пароходе туристы проехали на 160 *км* больше, чем прошли пешком, а на автобусе — в 5 раз больше, чем прошли пешком. Сколько километров проехали туристы на пароходе, сколько на автобусе и сколько прошли пешком?

84. Сумма двух чисел 495. Одно из чисел оканчивается нулем. Если этот нуль зачеркнуть, то получится второе число. Найти эти числа.

85. Сумма двух чисел 37,75. Если первое слагаемое увеличить в 5 раз, а второе слагаемое — в 3 раза, то новая сумма окажется равной 154,25. Найти эти числа.

86. Матери было 28 лет, когда у нее родился сын. Сколько лет матери и сколько лет будет сыну в 1972 году, если в 1966 году сын был моложе матери в 4,5 раза?

87. Сестра моложе брата на 9 лет. Сколько лет будет сестре и сколько брату в 1978 году, если в 1970 году брат был в 2,5 раза старше сестры?

88. В двух ящиках было 43,25 *кг* сахара. После того как из первого ящика переложили во второй 4,75 *кг*, в первом осталось 0,73 того, что стало во втором. Сколько сахара было первоначально в каждом ящике?

89. На двух складах было 60 *т* угля. На первый склад еще доставили 7,5 *т* угля. После того количество угля на втором складе составило 0,875 того, что стало на первом складе. Сколько угля было первоначально на каждом складе?

90. Тремя тракторами вспахано 116 *га*. 0,75 площади, вспаханной первым, равны $\frac{2}{3}$ площади, вспаханной вто-

рым; третьим вспахано в полтора раза больше, чем первым. Сколько гектаров вспахано каждым трактором?

91. В двух корзинах 140 яблок. Сколько яблок в каждой корзине, если 0,3 количества яблок в первой корзине в три раза меньше, чем 0,36 количества яблок во второй корзине?

92. За 8 альбомов, 3 линейки и 4 циркуля заплатили 2,7 руб. Альбом в 4 раза дороже линейки, а 5 линеек стоят столько же, сколько 2 циркуля. Найти цену альбома, линейки и циркуля.

93. На 19,8 руб. купили 9 *кг* яблок, 8 *кг* груш и 5 *кг* слив. Цена яблок в $1\frac{1}{2}$ раза меньше цены груш, а 3 *кг* яблок стоят столько же, сколько 4 *кг* слив. Найти цену 1 *кг* яблок, груш и слив.

94. В два сосуда A и B одинакового веса налита вода, причем вес сосуда A с водой составляет $\frac{4}{5}$ веса сосуда B с водой.

Если содержимое сосуда B перелить в A, то вес последнего вместе с водой превысит вес сосуда B в 8 раз. Найти вес каждого сосуда и количество воды в каждом из них, зная, что в B первоначально было на 50 *г* больше воды, нежели в A.

95. Пионеры школы собрали за два дня 630 *кг* металлолома. Сколько лома собрано в каждый день, если 0,45 того, что собрано в первый день, равны 0,36 того, что собрано во второй?

96. За две книги уплатили 1 руб. 35 коп. Сколько стоит каждая книга, если 0,35 цены первой книги равны 0,28 цены второй книги? (Решение проверить.)

97. Два мотоцикла вышли из города B в одном направлении: первый — в 8 *ч* утра, второй — в 10 *ч* 50 *мин.* После того как второй мотоцикл догнал первый, они еще продолжали путь в течение $2\frac{1}{2}$ *ч.* В момент остановки оказалось, что второй мотоцикл обогнал первый на 30 *км.* В котором часу второй мотоцикл догнал первый и какое расстояние прошли мотоциклы до этого, если скорость первого мотоцикла равна 0,6 скорости второго.

98. Два мальчика решили купить конструктор. Число денег второго составляло $\frac{5}{6}$ числа денег первого.

У первого недоставало $\frac{3}{8}$ суммы денег, которую надо было заплатить за конструктор, а у обоих вместе было на 1,4 руб. больше, чем стоил конструктор. Сколько стоил конструктор?

99. Какое число нужно вычесть из числителя дроби $\frac{52\,367}{47\,633}$ и прибавить к знаменателю этой дроби, чтобы после сокращения получить $\frac{17}{83}$?

100. Дана дробь $\frac{14\,157}{117\,843}$. Какое число надо вычесть из знаменателя и прибавить к числителю, чтобы после сокращения получить $1\frac{1}{5}$?

101. Сумма числителя и знаменателя дроби равна 4140. После ее сокращения получилось $\frac{7}{13}$. Какова дробь до ее сокращения? (Решение проверить.)

102. Знаменатель дроби на 3521 больше числителя. После сокращения дроби получилось $\frac{4}{11}$. Какова была дробь до ее сокращения? (Решение проверить.)

103. Разность двух чисел равна 0,7. Если большее из них увеличить в 5 раз, а меньшее оставить без изменения, то разность будет 75,1. Найти эти числа.

104. Разность двух чисел равна $44\frac{1}{2}$. Если меньшее из них увеличить в 7 раз, то разность будет $10\frac{3}{14}$. Найти эти числа.

105. Среднее арифметическое двух чисел равно 10,01. Найти каждое из них, если одно из них в 5,5 раза меньше другого.

106. Сумма двух чисел равна 0,25. Частное тех же чисел также равно 0,25. Найти эти числа.

107. Разность двух чисел равна 0,6. Частное от деления меньшего на большее также равно 0,6. Найти эти числа.

V. Задачи на движение

а) Встречное движение

108. В 9 *ч* 25 *мин* утра пешеход отправился из *А* в *Б*. Идя с одинаковой скоростью, он прибыл в *Б* в 13 *ч* 15 *мин*. На следующий день в 11 *ч* утра он отправился