

Штейнер Якоб

**Геометрические построения,
выполняемые с помощью
линии и неподвижного круга**

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 53
ББК 22.3
Я46

Я46 **Якоб Ш.**
Геометрические построения, выполняемые с помощью линии и неподвижно-
го круга / Штейнер Якоб – М.: Книга по Требованию, 2022. – 82 с.

ISBN 978-5-521-31648-9

ISBN 978-5-521-31648-9

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2022

© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2022

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.



Серия Книжный Ренессанс

www.samizday.ru/reprint

ВСТУПИТЕЛЬНАЯ СТАТЬЯ.

1. Вопрос о построениях при помощи линейки и циркуля занимал еще древних. Несмотря на выставленные некоторыми исследователями (например, Т. Л. Нейтх'ом, издавшим на английском языке «Начала» Евклида с обширными комментариями в трех томах) возражения, весьма веским является мнение, поддерживаемое таким знатоком греческой геометрии, как покойным Н. Зейтхен'ом, что постулаты (1-й, 2-й и 3-й) о возможности проведения прямой через две точки, ее бесконечного продолжения и черчения круга являются именно установлением положенных в основу построений, а следовательно, именно теми ограничениями области образов, изучаемых геометрией, которые позволяют назвать «Планиметрию» Евклида геометрией линейки и циркуля.

Этот взгляд подтверждается с большой убедительностью теми воззрениями, которые высказывает в начале своей «Геометрии» Р. Декарт, — он именно настаивает на допустимости в геометрии только таких построений, которые могут быть выполнены с помощью линейки и циркуля.

Но вслед за тем является вопрос, какие построения возможны с меньшими вспомогательными средствами. И здесь мы имеем: 1° пользование одною линейкой, 2° пользование одним циркулем и 3° пользование линейкой и одним наперед данным неизменным кругом.

Область последних построений (т. е. «построений Штейнера», которым и посвящена эта книжка) оказывается так же, как и область построений при помощи одного циркуля (так называемые «построения Маскерони»), одинаковою с областью построений при помощи линейки и циркуля.

Построения при помощи одной линейки, конечно, дают область более узкую, но интересно, что они объемлют именно область проективной геометрии. Синтетически и наиболее полно провел и разработал геометрию линейки Штаудт (G. Ch. Staudt) в «Geometrie der Lage», Nürnberg. 1847.

Построения, которыми занимается в предлагаемом сочинении Штейнер, кроме линейки, предполагают еще данным начерченный в плоскости некоторый круг вместе с его центром. Последнее добавление является, как оказывается, очень существенным. Гильберт (D. Hilbert) показал, что если дан только самый круг, а центр его не дан, то построить его центр при помощи одной линейки оказывается невозможным. Является вопрос, возможно ли построить центр, т. е. перейти к построениям Штейнера, если даны 2 или 3 круга (без центров), Сауер («Mathem. Ann.» 70, 1912) нашел, что построение невозможно, если данные два круга не имеют вещественных точек пересечения в конечном. Оно возможно, если данные круги имеют две вещественные точки пересечения или касаются, а также в том случае, когда данные круги будут концентрическими (т. е. когда точки пересечения — мнимые — удаляются в бесконечность). Если даны четыре (или даже три) круга, которые не подходят под предыдущие условия (т. е. не будут

концентрическими и не имеют вещественных точек пересечения), построение их центров при помощи одной линейки возможно, и мы приходим таким образом снова к построениям Штейнера.

Были предложены и другие основные построения. Так, возможно поставить требование, чтобы циркулем пользовались только для перенесения отрезков (гильбертовский «откладыватель отрезков»), может быть линейка с параллельными сторонами и т. д.

Построения при помощи одного циркуля обычно связываются с именем Маскерони, напечатанного в 1797 г. книжку «*Geometria del Compasso*», на которую и ссылается Штейнер. Но недавно обнаружено, что за 125 лет до Маскерони та же идея возникла у датского математика Георга Мора, опубликовавшего в 1672 г. на голландском и датском языках книгу «*Euclides Danicus*» («Датский Евклид»).

Но мы не будем на этом останавливаться и отошлем к книге Адлера (Adler) «*Theorie der geometrischen Konstruktionen*», переведенной на русский язык в издании Матезис и потом (не раз) переизданной. Ср. также E. Klein, *Vorträge über ausgewählte Fragen der Elementargeometrie* (переведено на русский язык под ред. Д. М. Синцова, 1899 г., изд. Казинского физико-математического общества), а также Th. Vahlen, *Konstruktionen und Approximationen*, Teubn, 1911.

2. Якоб Штейнер, один из величайших геометров нового времени, родился 18 мая 1795 г. в Уценсторфе, городке Бернского кантона, в простой крестьянской семье. До восемнадцати лет он помогал своим родителям в сельском хозяйстве, и образование его было также ограничено, как и всех его сверстников; как он сам писал впоследствии о себе, на девятнадцатом году он едва умел писать, в умственном счете приобрел известную ловкость, а также имел некоторые эмпирические сведения по астрономии, которая его тогда особенно увлекала, — он мог проводить целые ночи в созерцании звездного неба. К счастью для него и для науки, его стремление к знанию было замечено одним из учеников и помощников Песталоцци, который и постарался заинтересовать им знаменитого педагога, а также преодолеть сопротивление отца Штейнера, не желавшего терять сильного помощника. Песталоцци действительно принял Штейнера после месячного испытания бесплатно в свое знаменитое воспитательное заведение, перенесенное уже тогда в Иверден. Здесь Штейнер большую часть времени уделял изучению математики, этого главного предмета в системе преподавания у Песталоцци, возбуждавшего притом уже тогда живой интерес в Штейнере. «Применявшаяся в заведении Песталоцци методика делать математические истины предметом свободного размышления давала мне, как ученику этого заведения, повод изыскивать для установленных при преподавании предложений возможно более глубокие основания, чем те, которые устанавливали мои тогдашние учителя (Маурер и Ленцингер), и мне это часто удавалось, так что учителя предпочитали мои доказательства своим; благодаря этому, после полуторогодичного пребывания моего в этом заведении, мне решились доверить преподавание математики». Последние два года Штейнер преподавал также в заведении Krüsi. «Но так как там (в Ивердене) математические науки преподавались больше ради метода их, а не в их объективном систематическом объеме, метода же в конце концов определяется сама объективным объемом науки, то, возбужденный живым интересом к этой науке», Штейнер решился отправиться в университет, чтобы расширить свои познания в отношении математических фактов, что и привело его в Гейделсберг, — ближайший к Берну университетский центр.

«Штейнер во время своего пребывания в моем заведении показал отличные способности к математике и с железной энергией пробивает себе путь к самообразованию по этой специальности; успех его мне

представляется несомненным», — писал Песталоцци в свидетельстве, выданном на поощрение 23 августа 1818 г.

Но не только пробуждением любви к науке обязан был Штейнер заведению Песталоцци; проникнувшись его идеями в области преподавания, он, вместе с тем, приобрел дружбу тех молодых людей, которые в то время приезжали в Иверден учиться преподаванию у Песталоцци; таким образом завязались связи, оказавшие значительное влияние на дальнейшую судьбу Штейнера.

Гораздо меньшее влияние оказало, повидимому, на Штейнера его пребывание в Гейдельберге. Предоставленный собственным силам, он должен был большую часть времени отдавать частным урокам и за два с половиною года, проведенные им в Гейдельберге, не успел пополнить значительно ни своего общего, ни специально математического образования. Он слушал лекции по различным отделам чистой и прикладной математики у проф. Швейнса, но аналитический по преимуществу характер ее не заинтересовал Штейнера, уже тогда, вероятно, наиболее склонного к чисто геометрическим спекуляциям. Не пробыв и трех обязательных лет студентом, он бросает Гейдельберг по получении от одного из приобретенных в Ивердене друзей (Гельденмайера) известия об открывающемся месте преподавателя в Вердеровской гимназии в Берлине, и не списавшись с директором ее, в марте 1821 г. отправляется в Берлин. Здесь на первых же порах оказалось, что рекомендации Песталоцци и Швейнса недостаточно, чтобы занять место преподавателя в прусской гимназии. Штейнер должен был подвергнуться экзамену в испытательной комиссии. Сохранившийся протокол испытания рисует нам, какими знаниями и подготовкой обладал двадцатипятилетний Штейнер при прибытии своем в Берлин. Древний язык, истории и философии он не знал совершенно¹⁾, но и по специальности своей — математике Штейнер обнаружил сведения односторонние: письменная работа была представлена через 4 недели, отличалась основательностью и точностью, свидетельствуя об изобилательности и остроумии автора, давшего своеобразное изложение предмета; похвалы заслужил и пробный урок (об определении объема пирамид), хотя комиссия нашла неуместным применение принципа Кавальери в элементарной геометрии. Устный экзамен по высшему анализу, стереометрии и статике, начатый с представленной работы, обнаружил в экзаменуемом везде собственную работу мысли, но малый запас положительного знания — меньше всего по высшему анализу, хотя работа позволяла ожидать противного; хорошие познания были обнаружены по элементарной геометрии; по алгебре — не дальше уравнений второй степени; по плоской тригонометрии — мало навыка, сферическая тригонометрия отсутствовала совсем. В заключение комиссия дала Штейнеру право преподавания математики во всех классах, *concha secunda* (кроме стапогера), в уверенности, что проявленные им способности дадут ему возможность пополнить все недочеты. Таким образом, приезжая в Берлин, Штейнер привез с собой малый запас положительных сведений; его гений был поручою в том обязательстве, которое пришлось ему дать, чтобы получить право на преподавание. И это обязательство было покрыто с лихвою: через двенадцать лет этот кандидат на должность учителя, которому комиссия не начала возможным разрешить преподавание в старшем классе, покрывается академическими почестями, как признанный основатель новой геометрии.

Но в данный момент Штейнеру приходилось тяжело. Хотя и допущенный временно к преподаванию (у него было 19 недельных уроков),

¹⁾ Хотя в Гейдельберге и слушал всеобщую историю у Шюссера; интересно отметить, что экзаминатором по философии был сам Гегель.

он не получал содержания, и в ноябре того же 1821 г. ему пришлось подавать особое прошение о выдаче ему заработанного жалования. Но ему не долго привелось оставаться в гуманитарной Вердеровской гимназии, и уже в августе следующего года он должен был ее оставить, проработав в ней полтора года. Существовать ему пришлось на уроки в частных учебных заведениях: в школах Пламманна и Кауэра, которые велись в духе Песталоцци и в которых в числе преподавателей были старые знакомые Штейнера по Ивердену. Давал он и частные уроки, и в воспоминаниях одного из таких учеников сохранилась характеристика его оригинальной личности со своеобразным швейцарским говором, несмотря на трудные материальные обстоятельства бросающего урок, если ученик недостаточно внимателен к любимому его предмету. Более прочное положение получает Штейнер только благодаря счастливой случайности — открытию в Берлине в 1824 г. городского ремесленного училища (*Gewerbeschule*), которое по своей программе (отсутствие древних языков, главные предметы: естествоведение, математика и новые языки) явилось одним из старейших реальных училищ, а впоследствии и было преобразовано в реальное училище. Во главе его встал Ф. Клёден, такой же *self-made man*, как и Штейнер, пробивший себе дорогу в директора средней школы из золотых дел мастера, страстный приверженец идей Песталоцци, в течение многих лет применявший их на практике в школе Пламманна. В Штейнере он увидел родственную душу, и со второго же года (1825 г.) пригласил его к себе. С этих пор началась педагогическая деятельность Штейнера в этой школе сначала помощником учителя (*Hülfislehrer*), потом (с 1829 г.) — старшим учителем (*Oberlehrer*), вплоть до 1835 г. — до назначения его экстраординарным профессором университета.

Об этом периоде жизни Штейнера сохранилось довольно много документальных сведений благодаря тому, что директор власть по управлению школой разделял с попечительным советом, с бургомистром во главе, с которым и должен был сноситься по всем делам школы.

Первый год Штейнер преподавал арифметику во втором отделении. Небольшое число уроков позволило ему заняться окончанием учительского экзамена, — и в марте 1826 г. он получил право на преподавание математики во всех классах гимназии.

Это же время было и началом его научной карьеры и ученой деятельности. Основанный в том же 1826 г. журнал Крелля (*Journal für die reine und angewandte Mathematik*) наполнен в начале главным образом работами Штейнера¹⁾ и Абеля, жившего в 1825—1827 гг. в Берлине. На них и рассчитывал Крелль, основывая свой журнал; он в то же время сделался деятельным ходатаем за Штейнера, всегда готовым оказать ему поддержку.

Преподавательская деятельность Штейнера в школе с каждым годом расширялась: последовательно он получает преподавание алгебры, сначала в старшем отделении, на следующий год и в среднем, потом к нему переходит и геометрия, в 1829 г. он преподаёт уже почти всю математику. Паскальня программа 1830 г. содержит планы преподавания, проводимые J. Lange (I, с. 27). Особенно интересен план преподавания геометрии, значительно уклоняющийся от обычного. Все преподавание ведется по собственному эвристическому методу. В программу входят задача Аполлония о круге, касательном к трем данным кругам, и синтетическая теория конических сечений, — и это осуществлялось Штейнером 80 лет назад в средней школе.

Преподавание шло у него параллельно с научной деятельностью. Так, в вопросе о пересечении и касании кругов (в среднем отделении)

¹⁾ В первых трех томах журнала напечатано 15 различных мемуаров и заметок Штейнера, посвященных различным вопросам геометрии.

была им использована работа, которую он представлял в испытательную комиссию и о которой Клёден давал министерству блестящий отзыв. Неизвестно почему, Штейнер ограничился опубликованием только небольшой части, хотя вполне готова для печати вся первая часть была еще в том же 1826 г., и после смерти его найдена в его бумагах с заглавием «Теория прикосновения и пересечения кругов в плоскости шаров в пространстве и кругов на шаровой поверхности в систематическом ходе развития».

Штейнер проектировал еще вторую часть, содержание которой в тесной связи с первой должно было составить синтетическое исследование в общей форме всех кривых и поверхностей второй степени и вместе с тем дошедшие до нас от древности поризмы (как в первой части задача Аполлония) должны были представиться, как специальные моменты более объемлющего целого; Штейнер предполагал, что за второй должна последовать и третья часть, план которой еще не намечался. Получая, как помощник учителя, очень скудное содержание, он должен был уделять остающееся от преподавания в школе время частным урокам и отказываться от научных занятий, и потому он обратился в Министерство народного просвещения с просьбою о пособии, прилагая к прошению упомянутый выше отзыв Клёдена. Министр Альтенштейн запросил о его работах астронома Бесселя и, получив от него весьма благоприятный отзыв о таланте Штейнера, проявленном в работах в избранном им синтетическом направлении, обещал Штейнеру место в гимназии. Неудовлетворенный этим, Штейнер обратился с такою же просьбою о поддержке к Академии наук и, поддержанный всеми членами математического отделения, получил субсидию в 300 талеров. Таким образом Штейнер получил возможность существовать, не набирая большого числа частных уроков, до 1829 г., когда благодаря стараниям Клёдена он был сделан старшим учителем и, как упомянуто выше, стал преподавать почти всю математику.

Это было время наиболее напряженной его деятельности и в научном отношении, — на это время падает наибольшее число печатных его работ, наполняющих первый том академического издания его сочинений, и, в частности, обе книги: «Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander, mit Berücksichtigung der Arbeiten alter und neuer Geometer über Porismen, Projections-Methoden, Geometrie der Lage, Transversalen, Dualität und Reciprocität etc.», 1. Theil, Berlin 1832 г.¹⁾, посвященная В. ф. Гумбольдту, в семье которого он давал уроки, и через год: «Geometrische Constructionen etc.», в которой ясна связь между преподавательской и научной деятельностью у Штейнера.

На это же время падают и высшие академические почести. Сначала министерство, по представлении им своего большого труда, дает ему предикат профессора, а несколько недель спустя Штейнер получает известие, что философский факультет Кенигсбергского университета возвел его в степень доктора философии honoris causa, «чтобы выразить этим признание крупного таланта в человеке, стоящем во главе тех, кто выдвинул в новейшее время геометрию на небывалую дотоле высоту», как писали в своем представлении Якоби, Бессель и Фр. Нейман. В 1834 г. состоялось избрание Штейнера в члены Академии наук по представлению Крелля и Дирихле. Но была и оборотная сторона медали. Мягкостью характера Штейнер от природы не отличался; теперь, утомленный напряженной научной работой, он должен был особенно

¹⁾ Систематическое развитие зависимости геометрических образов одного от другого, с учетом работ старых и новых геометров о поризмах, методах проектирования, геометрии положения секущих, двойственности и взаимности и пр., ч. 1, Берлин, 1832. Перепечатано в «Собрании сочинений», т. I и VI, в «Ostwald's Klassikern».

раздражаться непонятливостью учеников, среди которых его эвристическая система преподавания, требовавшая живости и сообразительности, должна была давать известную часть неуспевающих. На этой почве начались трения между ним и директором Клёденом и попечительным советом, болезненно отзывавшиеся на самолюбии Штейнера, который стал стремиться вон из школы и впоследствии неохотно о ней вспоминал. Он усиленно стал добиваться профессуры в Берлинском университете при деятельной поддержке неизменно к нему расположенного Крелля. Осуществить это, однако, удалось только в 1835 г., после смерти проф. Ольтмана, и с тех пор и до самой смерти в 1863 г. Штейнер состоял экстраординарным профессором Берлинского университета.

За это время он читал следующие курсы:

1. Объяснения новейших методов синтетической геометрии с приложением их к различным задачам, главным образом по «Systematische Entwicklung etc.» (объявлено 21 раз).

2. Существеннейшие свойства конических сечений в синтетическом и элементарном изложении (объявлено 17 раз).

3. О максимальных и минимальных соотношениях фигур в плоскости, на шаре и в пространстве в геометрическом изложении (объявлено 5 раз в 1833—1841 и в 1847 гг.).

Кроме этих трех главных курсов, он читал еще 5 раз, с 1848 г. до 1855 г. о поверхностях второй степени, дважды — курс стереометрии вместе с так называемой начертательной геометрией, и каждый семестр 2 часа, позднее 1 час, посвящая геометрическим упражнениям по избранным главам элементарной геометрии.

Даже и в последние годы, когда силы Штейнера уже ослабели, лекции его имели волшебную привлекательность для студентов, по словам проф. E. Lampe; они носили характер полусеминара; Ште не стремился излагать в законченном виде, но требовал постоянного деятельного сотрудничества слушателей, — он обращался к ним с вопросами, давал теоремы для доказательства и требовал выполнения построений. Все это привлекало студентов к его лекциям и заставляло их усердно к ним готовиться.

Первые курсы были, уже после смерти Штейнера, изданы в 1867 г. в обработке первый Шрётера, второй — Гейзера. Третий совпал, вероятно, по содержанию с представленной автором в 1841 г. в Парижскую Академию наук работой «Sur le maximum et le minimum des figures dans le plan, sur sphère et dans l'espace en général», немецкий текст которой отпечатан во втором томе собрания Штейнера.

Этим, однако, не исчерпывается научная продукция Штейнера за время его профессорства. Его работы (по синтетической геометрии по преимуществу¹⁾) носят крайне сжатый характер; это большую часть перечень теорем, даже без намеков на ход доказательства. Обещанной второй части «Systematische Entwicklung» он не написал и не опубликовал даже уже готовой к печати работы о касании шаров. Таким образом, те надежды, которые он сам и Крелль возлагали на освобождение его от уроков в средней школе, оправдались далеко не вполне. Главною причиною было, конечно, то, что напряженная умственная работа в предыдущем периоде совершенно подорвала его здоровье. Уже в 1833 г. он брал отпуск для лечения почек. Во время профессорства он в сущности никогда не был здоров. Каждое лето он должен был отправляться на воды, периодически брал и более продолжительные отпуска (1843—1844 академические годы, 1848 г., двухлетний отпуск в 1856—1858 гг., после чего уже регулярно читал только зимний семестр,

¹⁾ Только три заметки относятся к комбинаторному анализу и теории чисел.

уезжая на летний семестр в Швейцарию). В 1862 г. он не вернулся из отпуска, и 1 апреля 1863 г. скончался одиноко в Берне от брейтовой болезни. Он похоронен был на кладбище Mompignon, которое в 1896 г. было закрыто, и прах Штейнера был перенесен в другое (Brennpargen). Берлинской Академии наук он завещал 8000 тал. ров. для учреждения премии за сочинения в области синтетической геометрии, а в своем родном городе учредил премию за умственный счет для учеников низшей школы.

В 1882 г. Берлинская Академия наук издала в двух томах собрание его сочинений. В него вошли, согласно решению Академии, только работы, напечатанные при жизни автора или оставшиеся после смерти в существенном в готовом для печати виде. В первый том, вышедший в 1881 г. (552 стр.), вошли 20 мемуаров, напечатанных в 1826—1831 гг., в том числе основные работы: «Systematische Entwicklung geom. Gest.», 1832 г., печатаемые нами «Geometrische Konstruktionen», 1833 г. и «Einige geometrische Betrachtungen Crelle Z.», Bd. I, 1826, переизданные позже в коллекции «Ostwald's Klassiker». Во второй том, вышедший в том же 1882 г., вошли 45 длинных ших мемуаров, напечатанных автором в годы 1833—1863, и только два мемуара, извлеченные из оставшихся после Штейнера рукописей и напечатанные проф. Гейзером в журнале Крелля, Bd. 66, 68.

В остальном, как говорит редактор издания К. Вейерштрасс со слов проф. Гейзера (племянника покойного геометра и обладателя рукописей, согласно завещанию), надежды на то, что второй том принесет ряд еще ненапечатанных работ Штейнера, не оправдались, — в этом рукописном материале оказались только подготовительные наброски, черновики уже напечатанных работ, оставшийся материал, который мог бы быть использован только в переработанном подобно изданной тем же проф. Гейзером элементарной синтетической теории конических сечений, и теория конических сечений, основанная на проективных свойствах, обработанная Шрётером, — вместе эти два курса представляют тот материал, который по первоначальному замыслу Штейнера должен был составлять пятую часть его «Systematische Entwicklung»; вторая часть должна была быть посвящена проективным плоскостям и пучкам лучей (в пространстве), третья — проективным пространствам и четвертая — корреляционным системам и сетям (с включением инволюционных систем и сетей).

Обработывавшаяся ранее теория касания кругов и шаров теперь в этом новом плане должна была следовать за пятой частью и после работы о точках и осях средних расстояний, трансверсалах и пр.

Интересна судьба этого произведения Штейнера. Особенно интенсивно работал он над вопросами касания и пересечения кругов и шаров в 1824 г., когда ему было 28 лет. К началу 1825 г. он настолько продвинулся, что мог начать уже систематическое изложение. Он завел журнал, в который, начиная с 7 января 1825 г., стал вносить систематически свои результаты с чрезвычайно ясною и наглядностью, почти без помяток, — в такой степени материал был им уже выношен. Последняя запись относится к 2 августа того же года. Вскоре он начал вторичную обработку и написал первую часть о круге — теории центров и осей подобия, — предполагая во второй части перейти к шару. Третья часть должна была трактовать о кругах на шаре и их пересечениях. Но и это изложение не удовлетворило автора, — он, по-видимому, почувствовал, что свойства круга и шара так тесно переплетаются, что нельзя их излагать отдельно, и Штейнер подверг свой труд новой переработке, вводя случаи вырождения кругов и шаров в точки, которым ранее отводился особый глава, в самый текст. В таком виде получилась готовая для печати рукопись, правда, не доведенная

до первоначально задуманного конца: третья часть — о пересечении кругов, расположенных на шаре, — осталась не написанной. И все же в печати работа не появилась.

Не следует, однако, думать, что сочинение Штейнера о касании кругов и шаров по содержанию элементарно. С любовью выношенное, оно построено удивительно. Начиная с самых простых исходных фактов почти без чертежей, принося очень удачные обозначения, Штейнер доходит без труда до сложнейших задач, обнаруживая поразительное мастерство геометрического изложения, — он не ограничивается элементарной геометрией кругов и шаров, а переходит и к более высоким проблемам: достаточно указать, что вводимая Штейнером предельная поверхность, огибающая двух систем сопряженных шаров, есть не что иное, как циклида Дюпэна.

Повидимому, после смерти Штейнера далеко не все оставшиеся после него рукописи поступили к проф. Гейзеру. Значительная часть их не была, однако, потеряна, как предполагалось, а была, должно быть, ликвидатором передана в библиотеку общества естествоиспытателей в Берне, и там лежала в ящике в кладовой на каменном полу, подвергаясь действию непогоды, пока их не обнаружил в 1896 г., перед приближающимся столетием рождения Штейнера, проф. Граф и поручил разборку д-ру Bützenberger'у, преподавателю в кантональном техникуме в Бургдорфе.

И вот к радостному изумлению среди них оказалось это сочинение, долго считавшееся утерянным, в блестящей обработке, со старательным разбором случаев мнимых пересечений.

Однако при всем интересе, который возбудила находка, только через 35 лет удалось ее опубликовать, — большую часть средств дало Escher — Abegg — Stilling für wissenschaftliche Forschung при Цюрихском университете.

Интересен собственный обзор этого периода, сделанный Штейнером и найденный Бюценбергером в бумагах Штейнера. Приводим его дословно.

«Родившись в Уцисдорфе, кантон Берн, сын простых поселян, я получил воспитание тиховых. Только на девятнадцатом году стремление к образованию стало для меня потребностью, и привело меня к Песталоцци, который принял меня к себе бесплатно. После полугодового участия во взыденном там обучении меня сочли способным преподавать и поручили мне преподавание элементов математики. Три года спустя, в 1818 г., я поступил в университет в Гейдельберге; по этому случаю Песталоцци дал мне прилагаемый отзыв. Из Гейдельберга, где я занимался математическими науками, приобретая средства к жизни частными уроками, я был вызван через 2½ года директором здешней (берлинской) Вердэровской гимназии д-ром Циммерманом, но не мог в ней удержаться, ибо не мог положить в основу преподавания составленный им учебник математики. С марта 1821 г. нахожусь я в Берлине, и с осени 1822 г. вынужден с величайшим трудом добывать средства к существованию частными уроками.

Таков внешний ход моей до сего времени жизни; что касается внутреннего, то я полагаю, что периоды моей юности, проведенного в родительском доме, я могу коснуться лишь постольку, поскольку сельскохозяйственная работа, которой я занимался тогда, соприкосновение с внешней природой, к которому она приводила, доставляло более широкие картины, чем могло бы дать городское ремесло.

Рассмотрение звездного неба и живой поверхности земли вознесло во мне стремление к установлению и объединению представлений и с ростом этого стремления потребность быть принятым в заведение

Песталоцци; ибо там я надеялся получить прайила, которые бы удовлетворили этому стремлению.

Даваемое здесь математическое обучение всецело эвристическое и выходило везде, поскольку допускало искусство учителей, из рассмотрения необходимости, определяющей эту науку. Это рассмотрение выявляло мне человека законодателем природы, и меня захватила при этом прежде всего не абстрактная наука, не объективная экономия ее предложений, но способность человека наперед определить законы внешнего содержания, т. е. синтетическая, и так превосходно отвечала тому стремлению, благодаря которому я поступил в это учреждение.

Уже ученику, когда я ознакомился с несколькими учебниками геометрии, навязывались представления случайности порядка, проистекавшей от потребности увязывания отдельных представлений как таковых; я искал нечто произвольное в том, чтобы необходимость науки доказывать из ее материального содержания, вместо того, чтобы по смутно оживлявшему меня чувству все многообразие материи выводить из общего единства ее и соответственно этому исчерпывать. Мне стало очевидным, что, пока системагический метод будет искать в этой внешней случайной связи отдельных предложений, ученику внушается представление, будто цель науки составляют отдельные предложения, и этим так затмевается ее общее систематическое единство, что он научится понимать его очевидность только в связи с определенными предложениями, и никогда не научится представлять в ее первичности. Как преподаватель я ставил себе поэтому задачу каждую дисциплину рассматривать как единую мысль, и отдельные предложения выводить на своем месте только как результаты развития этой единой мысли.

Почти бессознательно я пришел таким образом к собственно геометрическому способу рассмотрения, как оно должно было быть присуще геометрии древности, но я находился в случае, противоположном им. Мне было дано множество разрешимых задач и предложений, и мне приходилось заниматься не фиксацией отдельных предложений, а установлением того свойства общих законов систематического построения, что из них вытекают все открытия подобного рода, и их соответственным образом «исчерпать».

3. Печатаемое теперь небольшое сочинение Штейнера также является результатом его интереса к вопросам преподавания начал геометрии и представляет результат применения к вопросам геометрическим построениям идей и методов его основного сочинения «Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten».

Но если Штейнер не опубликовал сам произведения своей молодости, то интерес, который он питал к этим вопросам, отразился на его преподавании.

Ю. Ланге в своей статье «Jacob Steiner's Lebensjahre in Berlin 1821—1863», изданной к 75-летию Friedrich Werderschen Oberrealschule (первоначально с 1824 г. — ремесленное уч. лице), где Штейнер преподавал с 1825 г. до назначения его экстраординарным профессором Берлинского университета в 1836 г., приводит программы Штейнера.

Приведем его программы по геометрии.

Termin — 3 часа (курс двухгодичный).

Подробный синтетический курс. Рассмотрения взаимного положения прямых линий, образующих в плоскости определенные фигуры, главным образом, в отношении углов.

Условия, при которых все части фигуры определены, как основание для предположений о совместимости фигур. Форма или вид фигур; условия, при которых они определены; вывод отсюда предположений о подобии; упражнения со сложными фигурами, применение к землемерию и употреблению инструментов; о площади прямолинейных фигур;

равенство и отношение площадей различных фигур. Преобразование и деление фигур по их площади. Излагаемый на уроке по собственному эвристическому методу материал будет записываться и составляться учениками.

Secundum — 3 часа (курс также двухгодичный).

Преобразование и деление фигур повторяется, но более подробно; равным образом и учение о подобии. Применения счисления к геометрическим предложениям и задачам.

Учение о круге; хорды и касательные; вписанные и описанные многоугольники; пропорции.

Учение о прикосновении и пересечении кругов; о точках и линиях подобия (т. е. о центрах и осях подобия); о степени в отношении круга. Краткий обзор тригонометрии. По собственному эвристическому методу. Primum — (два года). Летний семестр 3 часа, зимний — 2 часа.

Плоская тригонометрия с приложениями. Точки и оси среднего расстояния, рассмотрение которых позволяет очень легко доказать целый ряд геометрических истин. Точка наименьшего расстояния. Плоские (геометрические) места, рассматриваемые при помощи координат, а именно: уравнение первой степени или рассмотрение прямых линий; уравнение второй степени или рассмотрение конических сечений совместно с синтетическим изысканием. Стереометрия.

Таким образом, не только курс дополнен задачами касания кругов, в связи с упомянутыми выше исследованиями, но и вводится начала аналитической геометрии. Вряд ли когда-либо ранее в курс средней школы входила подобная задача о касании кругов, и до сих пор средняя школа ждет введения метода координат. Интересно, что эта попытка связывается именно с именем великого геометра.

При переводе я пользуюсь как оригинальным изданием 1833 г., так и его перепечаткой в «Собрании сочинений» Штейнера, т. I, 1882 г., и в коллекции «Ostwald's Klassiker» №60, а при составлении вводной статьи лит. патурой.

J. Lange, Jacob Steiners Lebensjahre in Berlin, 1821—1863, Nach seinen Personalakten dargestellt, Berlin 1899.

Dr. J. N. Graf, Der Briefwechsel zwischen J. Steiner u. L. Schläfli, Bern 1896.

J. Steiner's, Gesammelte Werke, Bd. I, II, 1882.

J. Steiner's, Vorlesungen über Synthetische Geometrie Th. II, Die Theorie der Kegelschnitte gestützt auf projektivische Eigenschaften, bearb. von Dr. H. Schröter, Leipzig 1857.

J. Steiner, Allgemeine Theorie über das Berühren u. Schneiden der Kreise u. der Kugeln, Or. Füssli, Leipzig u. Zürich 1931.

Dr. F. Büttenberger, Zum 100 sten Geburtstage Jakob Steiners, «Zeitschr. f. math. u. natur. Unterricht.», Bd. 27, 1896, S. 161—171.

E. Lampe, Zur Biographie von Jacob Steiner, «Bibl. math.» (3), Bd. I, S. 129—141, u. «Naturw. Rundschau» XII.

В настоящем издании внимательно пересмотрен текст перевода 1910 года и переработана вступительная статья.

Д. Синцов.