

Г. В. Колосов

**Применение комплексных
диаграмм и теории функций
комплексной переменной к
теории упругости**

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 51
ББК 22.1
Г11

Г11 **Г. В. Колосов**
Применение комплексных диаграмм и теории функций комплексной переменной к теории упругости / Г. В. Колосов – М.: Книга по Требованию, 2021. – 226 с.

ISBN 978-5-458-57000-8

ISBN 978-5-458-57000-8

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2021

© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2021

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.



Серия Книжный Ренессанс

www.samizday.ru/reprint

*Памяти друга
проф. С. И. Белзевского
посвящает свое исследование автор.*

ПРЕДИСЛОВИЕ.

Предметом настоящего исследования является краткое изложение новых идей в теории упругости, получивших развитие в последнее время (главным образом благодаря трудам русских ученых). Мы разумеем применение к ней *комплексных диаграмм и теории функций комплексной переменной*, обещающее внести много приемов не только для решения задач теории упругости, но и сопротивления материалов и оптического метода определения напряжений.

Как известно, в последнем большую роль играют экспериментально определяемые изоклинические и изохроматические линии, представляющие линии постоянного аргумента и постоянного модуля комплексной величины

$$2X_y + i(X_x - Y_y),$$

где X_x , X_y , Y_y три напряжения плоской задачи, непосредственно связанные с двумя функциями комплексной переменной, играющими основную роль в плоской задаче теории комплексной переменной, а линии постоянного поверхностного расширения являются линиями постоянства величины вещественной части одной из этих функций [формула (31)].

Применение комплексной переменной распространяется не только на плоскую задачу теории упругости (как это имеет место в плоской задаче гидродинамики), но и на целый ряд вопросов трех измерений: задачу Сен-Венана и ее распространение на случай кривых брусьев, задачи Клебша, В. А. Стеклова и вообще на изучение равновесия цилиндрических тел, где по аналогии с задачей двух измерений применение комплексной переменной может оказаться полезным.

Попытки применения в теории упругости комплексной переменной известны довольно давно; Клебш в § 31 своего курса теории упругости (1862) при изложении задачи Сен-Венана пользуется комплексной переменной, но сравнительно мало и формально. Следуя Клебшу, П. А. Шифф в своих лекциях по теории упругости также вводит функции комплексной переменной, а Лове в курсе теории упругости при изложении плоской задачи, с целью сокращения письма, пользуется простейшими формальными свойствами функции комплексной переменной, однако нигде не вдаваясь в их более глубокие свойства (теорему Коши, голоморфность, конформное отображение и т. д.). Немногим больше затронут этот вопрос в только что вышедшем курсе С. П. Тимошенко (1934).

Сильный толчок к применению комплексной переменной был вызван точной формулировкой плоской задачи Морисом Леви в 1898 г., выяснившим, что она не является простейшей задачей общей теории упругости, как это имеет, например, место в кинематике и в других отделах механики, где „плоское“ движение является не только простейшим, но иногда и самым распространенным случаем движения (например в теории механизмов). Не то в теории упругости, где „плоское“ распределение усилий не сопровождается, вообще говоря, плоским перемещением его частиц, а последнее сопровождается усилиями, перпендикулярными к плоскости перемещения.

На плоскую задачу никак поэтому нельзя смотреть как на простейшую задачу общей теории упругости, и она развилась главным образом при приближенном исследовании распределения напряжений в задачах трех измерений, где одно из них мало сравнительно с двумя другими, например в тонких пластинках, арках, где для упрощения анализа приходится приближенно пренебрегать их толщиной, а также вообще в тех случаях, где вследствие сложности задачи в трех измерениях ее сводят к двум измерениям.

Задача, поставленная и решенная русским ученым проф. Х. Г. Головиным в 1880 г., о равновесии круглой арки, на основании формул теории упругости, явилась первой плоской задачей теории упругости и дана ранее исследований Мориса Леви (1898). Известный астроном Эри предложил еще в 1862 г. метод решения плоской за-

дачи при помощи функции, называемой функцией Эри, но он не обратил внимания, что она должна удовлетворять бигармоническому уравнению. Ту же ошибку повторил Иббетсон в своем курсе теории упругости (1887 г.), а Рибьер в 1889 г. хотя и получил правильное решение плоской задачи в рассмотренном им частном случае, но не обратил внимания, что распределение усилий в односвязном контуре не зависит от коэффициентов упругости.

Настоящим исследованием мы поставили себе целью дать возможно больше приемов для решения плоской задачи, не вдаваясь в теоретические тонкости самой задачи, таким образом совершенно не затронуты вопросы о существовании решений уравнений теории упругости, о их единственности и т. п. Из приемов решения плоской задачи мало внимания уделено методу, выработанному в последнее время Н. И. Мусхелишвили—интегралов, аналогичных интегралам Коши, в виду того, что этот прием довольно полно и с многочисленными примерами изложен Мусхелишвили в его последних исследованиях и только что вышедшем курсе.

Главной задачей исследования является плоская задача теории упругости, и она рассмотрена с совершенно новой точки зрения. Мы вводим новый основной принцип, названный нами принципом комплексного или гармонического уравнивания, который обещает в плоской задаче получить такое же значение, какое имеет принцип Дирихле в математической физике. От приложимости этого принципа к какому-нибудь контуру зависит успех решения для этого контура плоской задачи.

В частном случае он применим к тем контурам, для которых дано решение Н. И. Мусхелишвили и П. А. Соколовым (результаты которого, найденные при помощи рядов, мы непосредственно получаем сразу в замкнутой форме).

Применяя принцип комплексного уравнивания, мы выработали однообразный метод решения вопроса и даем следующую формулу для одной из двух основных функций комплексной переменной, определяющих плоскую задачу, а именно для функции, вещественной частью которой является поверхностное расширение:

$$\Phi(z) = 2S(P + iU) + C,$$

где C — комплексная постоянная, а S — вводимый нами символ, который мы назовем символом Шварца для данного контура, представляющим обобщение известного интеграла Шварца, определяющего функцию комплексной переменной, вещественная часть которой имеет на данном круге наперед заданные значения P и U , нормальная и касательная составляющие внешнего напряжения, приложенного в какой-нибудь точке контура.

Этот прием напоминает метод Н. И. Мусхелишвили, основанный на свойствах интегралов, которые он назвал „аналогичными“ интегралам Коши.

Таким образом получается метод, повидимому приложимый ко многим аналитическим контурам и в частности для алгебраических; мы применяем здесь формулу Шварца в форме, данной Д. А. Граве при решении задачи Дирихле для алгебраического контура.

Имея в виду важное значение интеграла Шварца для нашего метода, мы заимствуем из этой работы приведенные в ней примеры.

Заметим, что те интегралы, которыми мы пользуемся в символе Шварца, лучше назвать „аналогичными“ интегралу Шварца и не только потому, что они распространены на какой угодно контур (сам интеграл Шварца, как мы уже заметили, дан для круга), но и потому, что в подинтегральной функции вместо функции, представляющей заданные значения вещественной части функции комплексной переменной (и следовательно по существу вещественной) мы предполагаем какие угодно значения (как вещественные, так и мнимые).

Произвольная постоянная, входящая в S , чисто мнимая в интеграле Шварца, может быть здесь комплексной. Кроме этого метода читатель найдет немало исследований, появляющихся в печати впервые.

Так, наравне с эллипсоидом напряжения мы иллюстрируем распределение срезающих усилий особыми поверхностями шестого порядка, еще не встречавшимися в математике и т. п.

Ленинград, октябрь 1934 г.

Г. Колосов

ГЛАВА I.

ВВЕДЕНИЕ.

§ 1. Комплексные диаграммы при решении технических и математических вопросов.

За последнее время все чаще и чаще находят применение при решении разного рода теоретических и практических вопросов так называемые комплексные диаграммы ¹⁾. Они получили особенно широкое распространение в электротехнике (Штейнметц).

Чтобы дать простой и наглядный пример применения комплексных диаграмм к механике, возьмем вопрос, с которым часто приходится сталкиваться в сопротивлении материалов: изменение моментов инерции и произведений инерции плоских фигур вокруг каких-нибудь осей в плоскости этих фигур при условии, что начало этих осей не меняется, а сами оси поворачиваются в этой плоскости. Положение осей мы будем определять углом γ , образованным новым положением оси $O\xi$ со старым ее положением Ox (черт. 1). Для какой-нибудь точки M_k мы имеем старые координаты x_k, y_k , и новые координаты ξ_k, η_k ; формулы преобразования их будут:

$$\left. \begin{aligned} x_k &= \xi_k \cos \gamma - \eta_k \sin \gamma \\ y_k &= \xi_k \sin \gamma + \eta_k \cos \gamma, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

откуда

$$x_k + iy_k = (\xi_k + i\eta_k) e^{i\gamma} \quad (2)$$

Возвышая обе части (2) в квадрат, найдем

$$(x_k + iy_k)^2 = (\xi_k + i\eta_k)^2 e^{2i\gamma}$$

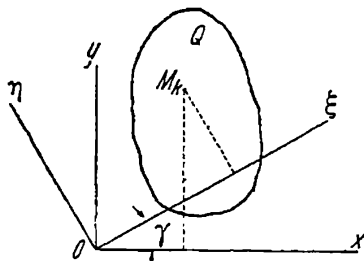
¹⁾ Для более обстоятельного ознакомления со свойствами комплексных чисел, их алгеброй и теорией функций комплексной переменной отсылаем к специальным руководствам, например проф. И. И. Привалов [69], Введение в теорию функций комплексной переменной, 1927; проф. В. И. Смирнов, Курс высшей математики для техникумов и физиков, т. II, III, 1933.

Умножая обе части этого равенства на m_k (массу точки M_k), раскрывая в нем скобки и взяв сумму по всем точкам m_k , прерывно или непрерывно заполняющим некоторую площадь Q , мы найдем

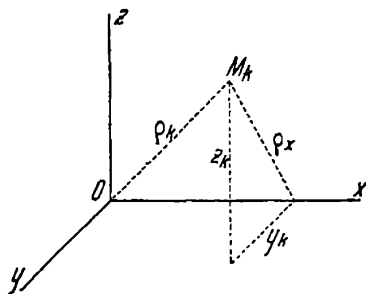
$$J_y - J_x + 2iJ_{xy} = (J_\eta - J_\xi + 2iJ_{\xi\eta})e^{2i\gamma}, \quad (3)$$

где

$$J_x = \sum m_k y_k^2, \quad J_y = \sum m_k x_k^2, \quad J_{xy} = \sum m_k x_k y_k \\ J_\xi = \sum m_k \eta_k^2, \quad J_\eta = \sum m_k \xi_k^2, \quad J_{\xi\eta} = \sum m_k \xi_k \eta_k.$$



Черт. 1.



Черт. 2.

Мы можем теперь несколько обобщить формулу (3).

Предположим, что массы m_k , а следовательно и соответствующие точки M_k , не лежат в одной плоскости xy , а каждая имеет свою ординату z_k (ось Oz перпендикулярна плоскости xy), J_{xy} и $J_{\xi\eta}$ от этого не изменяются, а моменты инерции J_x, J_y, J_ξ, J_η будут отличаться от старых на член $\sum m_k z_k^2$, одинаковый как для осей Ox, Oy, Oz , так и для осей $O\xi, O\eta, Oz$, так например (черт. 2):

$$\rho_x^2 = y_k^2 + z_k^2 \quad \text{и} \quad J_x = \sum m_k \rho_x^2 = \sum m_k y_k^2 + \sum m_k z_k^2,$$

и поэтому значения величин:

$$J_y - J_x + 2iJ_{xy} \quad \text{и} \quad J_\eta - J_\xi + 2iJ_{\xi\eta}$$

останутся неизменными и формула (3) останется такою же при новых условиях.

Формула (3) решает вопрос об определении J_{ξ} , J_{η} , $J_{\xi\eta}$ по данным J_x , J_y , J_{xy} , если прибавим к (3) очевидное соотношение

$$J_x + J_y = J_{\xi} + J_{\eta}, \quad (4)$$

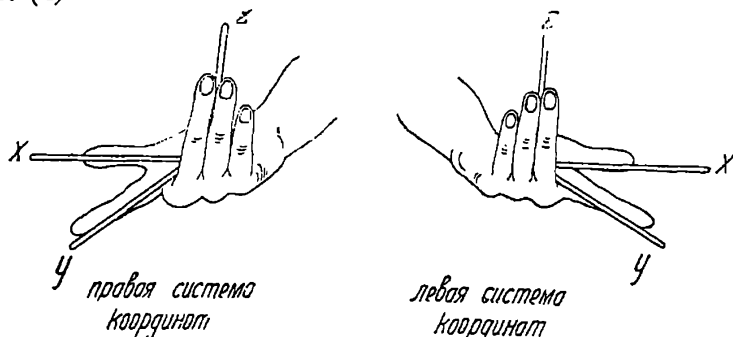
вытекающее из геометрического соотношения

$$\overline{OM}_k^2 = x_k^2 + y_k^2 + z_k^2 = \xi_k^2 + \eta_k^2 + z_k^2,$$

из которого следует:

$$\sum m_k x_k^2 + \sum m_k y_k^2 = \sum m_k \xi_k^2 + \sum m_k \eta_k^2,$$

т. е. (4).



Черт. 3.

Примечание. Мы всегда в дальнейшем будем пользоваться левым расположением осей координат, соответствующим расположению пальцев левой руки (черт. 3).

Чтобы отличать „левое“ расположение от „правое“ есть еще способ наблюдателя, расположенного по оси Oz и смотрящего по оси Ox , причем наблюдатель находится в первом октанте (Ампер). Если Ox соответствует левой руке, расположение левое и наоборот. Наконец, способ (английский) штопора: если при ввинчивании штопора в O по оси Oz переход от оси Ox к Oy соответствует движению штопора—правая система и левая—в противном случае.

§ 2. Графические построения, основанные на комплексном преобразовании.

1) Построение J_{ξ} , J_{η} , $J_{\xi\eta}$ по данным J_x , J_y , J_{xy} .

Будем комплексные выражения предыдущего параграфа изображать графически (черт. 4). Пусть M аффикс величины: $J_y - J_x + 2iJ_{xy}$, т. е.

$$ME = 2J_{xy}, \quad OE = J_y - J_x.$$

2) Построение $J_{\xi z}$ и $J_{\eta z}$ по данным J_{xz} и J_{yz} .

Мы имеем формулу преобразования:

$$\begin{aligned} J_{xz} + iJ_{yz} &= \sum m_k x_k z_k + i \sum m_k y_k z_k = \\ &= e^{i\gamma} \sum m_k (\xi_k + i\eta_k) z_k = e^{i\gamma} (J_{\xi z} + iJ_{\eta z}), \end{aligned} \quad (6)$$

из которой следует, что для построения $J_{\xi z}$, $J_{\eta z}$ по данным J_{xz} , J_{yz} мы можем воспользоваться диаграммой, аналогичной диаграмме черт. 4, только вместо 2γ надо взять γ .

§ 3. Обобщение предыдущих формул на целый класс случаев.

Построения § 2 применимы не только к моментам инерции, но и к целому ряду физических (в частности механических) понятий и величин. Для этого нужно, чтобы величина эта зависела от направления некоторого переменного вектора и представлялась однородной функцией второй степени от l , m , n , где l , m , n — косинусы углов, образованных указанным вектором с осями координат. В моментах инерции, например, таким вектором является ось, вокруг которой мы берем момент, т. е. вида

$$V = Al^2 + Bm^2 + Cn^2 + 2Dmn + 2Enl + 2Flm. \quad (7)$$

К таким величинам относятся:

1) $\frac{1}{\rho^2}$, где ρ — расстояние от начала координат O до какой-нибудь поверхности второго порядка (в частности линии второго порядка в одной из координатных плоскостей), так как очевидно из уравнения такой поверхности (или линии), представляющегося в виде:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dyz + 2Exz + 2Fxy = \text{const} = \Gamma$$

(где $x = \rho l$, $y = \rho m$, $z = \rho n$, а l , m , n косинусы углов, образованных ρ с Ox , Oy , Oz), что

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{1}{\Gamma} (Al^2 + Bm^2 + Cn^2 + 2Dmn + 2Enl + 2Flm),$$

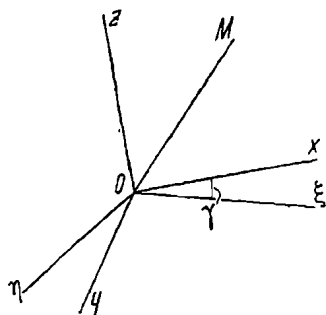
т. е. $\frac{1}{\rho^2}$ имеет характер $V(l, m, n)$. (7),

2) Моменты инерции J вокруг некоторой оси, образующей с осями координат косинусы углов l, m, n , так как известно из механики, что

$$J = J_x l^2 + J_y m^2 + J_z n^2 - 2J_{yz} mn + 2J_{xz} ln + 2J_{xy} lm.$$

Кроме того, мы укажем целый ряд других величин, удовлетворяющих вышеупомянутым условиям.

Покажем, что величины характера V действительно удовлетворяют условиям построения комплексных диаграмм, изложенных в § 1 и 2 для моментов инерции. Для этого повернем оси координат на угол γ (черт. 5) вокруг оси Oz . Формулы преобразования координат какой-нибудь точки M будут:



Черт. 5.

$$\begin{aligned} x_k &= \xi_k \cos \gamma - \eta_k \sin \gamma \\ y_k &= \xi_k \sin \gamma + \eta_k \cos \gamma \\ z_k &= z_k. \end{aligned}$$

Соответственно этому косинусы углов, образованных вектором $\overline{OM}$ с осями координат Ox, Oy, Oz , (l, m, n) и с новыми осями $O\xi$,

$O\eta, Oz$ (l_1, m_1, n_1), связаны соотношениями

$$\begin{aligned} l &= l_1 \cos \gamma - m_1 \sin \gamma \\ m &= l_1 \sin \gamma + m_1 \cos \gamma \\ n &= n_1 \end{aligned}$$

Подставив эти выражения в (7), мы найдем:

$$V = A_1 l_1^2 + B_1 m_1^2 + C_1 n_1^2 + 2D_1 m_1 n_1 + 2E_1 n_1 l_1 + 2F_1 l_1 m_1,$$

где

$$\begin{aligned} A_1 &= A \cos^2 \gamma + B \sin^2 \gamma + 2F \sin \gamma \cos \gamma \\ B_1 &= A \sin^2 \gamma + B \cos^2 \gamma - 2F \sin \gamma \cos \gamma \\ C_1 &= C \\ D_1 &= D \cos \gamma - E \sin \gamma \\ E_1 &= D \sin \gamma + E \cos \gamma \\ 2F_1 &= (B - A) \sin \gamma + 2F \cos 2\gamma, \end{aligned}$$