

**O. Моргенштерн**

**Теория игр и экономическое поведение**

**Москва  
«Книга по Требованию»**

УДК 330  
ББК 65  
О-11

O-11      **О. Моргенштерн**  
Теория игр и экономическое поведение / О. Моргенштерн – М.: Книга по Требованию, 2024. – 708 с.

**ISBN 978-5-458-27547-7**

Монография является классическим, основополагающим трудом по теории игр. Большинство понятий и идей, разрабатываемых в настоящее время в теории игр, берут своё начало из этого труда. Многие направления теории игр, лишь намеченные в книге, не получили в дальнейшем по тем или иным причинам научного развития и к настоящему времени оказались в стороне от традиционной теоретико-игровой проблематики. Привлечение внимания к этим вопросам представляется весьма желательным. В качестве приложения помещён составленный редактором очерк "Развитие теории игр", в котором излагается история математических идей, приведших к созданию теории игр, комментируется содержание монографии, а также даётся краткий обзор развития теории игр как математической дисциплины за время, прошедшее с момента опубликования книги Дж. фон Неймана и О. Моргенштерна. К книге приложен список литературы, составленный редактором перевода.

**ISBN 978-5-458-27547-7**

© Издание на русском языке, оформление  
«YOYO Media», 2024  
© Издание на русском языке, оцифровка,  
«Книга по Требованию», 2024

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригиналe, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.



17.6. Доказательство основной теоремы . . . . .	176
17.7. Сравнение подходов для чистых и для смешанных стратегий . . . . .	179
17.8. Исследование полной определенности в общем случае . . . . .	181
17.9. Дальнейшие свойства оптимальных стратегий . . . . .	183
17.10. Ошибки и их следствия. Перманентная оптимальность . . . . .	185
17.11. Перемена ролей игроков. Симметрия . . . . .	188
<b>Г л а в а IV. Игры двух лиц с нулевой суммой. Примеры . . . . .</b>	<b>192</b>
§ 18. Некоторые элементарные игры . . . . .	192
18.1. Простейшие игры . . . . .	192
18.2. Подробное количественное рассмотрение этих игр . . . . .	193
18.3. Качественное описание . . . . .	196
18.4. Обсуждение некоторых конкретных игр (обобщения игры в «орлянку») . . . . .	198
18.5. Рассмотрение несколько более сложных игр . . . . .	201
18.6. Случай и неполная информация . . . . .	205
18.7. Интерпретация этого результата . . . . .	207
§*19. Покер и блеф . . . . .	208
*19.1. Описание покера . . . . .	208
*19.2. Блеф . . . . .	210
*19.3. Описание покера (продолжение) . . . . .	211
*19.4. Точная формулировка правил . . . . .	213
*19.5. Описание стратегий . . . . .	213
*19.6. Формулировка задачи . . . . .	217
*19.7. Переход от дискретной задачи к непрерывной . . . . .	218
*19.8. Математическое построение решения . . . . .	221
*19.9. Детальный анализ решения . . . . .	225
*19.10. Интерпретация решения . . . . .	226
*19.11. Более общие формы покера . . . . .	229
*19.12. Дискретные расклады . . . . .	230
*19.13. $m$ возможных ставок . . . . .	231
*19.14. Чередующиеся ставки . . . . .	232
*19.15. Математическое описание всех решений . . . . .	237
*19.16. Интерпретация решений. Заключение . . . . .	239
<b>Г л а в а V. Игры трех лиц с нулевой суммой . . . . .</b>	<b>241</b>
§ 20. Предварительный обзор . . . . .	241
20.1. Общие соображения . . . . .	241
20.2. Коалиции . . . . .	242
§ 21. Простая мажоритарная игра трех лиц . . . . .	243
21.1. Описание игры . . . . .	243
21.2. Анализ игры. Необходимость «соглашений» . . . . .	244
21.3. Анализ игры. Коалиции. Роль симметрии . . . . .	245
§ 22. Дальнейшие примеры . . . . .	246
22.1. Несимметричное распределение. Необходимость компенсаций . . . . .	246
22.2. Коалиции различной силы. Обсуждение . . . . .	248
22.3. Одно неравенство. Формулы . . . . .	250
§ 23. Общий случай . . . . .	251
23.1. Исчерпывающее обсуждение. Несущественные и существенные игры . . . . .	251
23.2. Окончательные формулы . . . . .	252
§ 24. Обсуждение одного возражения . . . . .	254
24.1. Случай полной информации и его значимость . . . . .	254
24.2. Детальное обсуждение. Необходимость компенсаций между тремя или более игроками . . . . .	255
<b>Г л а в а VI. Общая теория. Игры <math>n</math> лиц с нулевой суммой . . . . .</b>	<b>258</b>
§ 25. Характеристическая функция . . . . .	258
25.1. Мотивировка и определение . . . . .	258
25.2. Обсуждение введенного понятия . . . . .	260
25.3. Фундаментальные свойства . . . . .	260
25.4. Непосредственные математические следствия . . . . .	262
§ 26. Построение игры с заданной характеристической функцией . . . . .	263
26.1. Построение . . . . .	263
26.2. Резюме . . . . .	265

§ 27. Стратегическая эквивалентность. Несущественные и существенные игры . . . . .	265
27.1. Стратегическая эквивалентность. Редуцированная форма . . . . .	265
27.2. Неравенства. Величина $\gamma$ . . . . .	268
27.3. Несущественность и существенность . . . . .	269
27.4. Различные критерии. Неаддитивные полезности . . . . .	270
27.5. Неравенства в случае существенности . . . . .	272
27.6. Векторные операции над характеристическими функциями . . . . .	273
§ 28. Группы, симметрия и безобидность . . . . .	274
28.1. Подстановки, их группы и их воздействие на игру . . . . .	274
28.2. Симметрия и безобидность . . . . .	278
§ 29. Повторное рассмотрение игры трех лиц с нулевой суммой . . . . .	279
29.1. Качественные рассмотрения . . . . .	279
29.2. Количественные рассмотрения . . . . .	281
§ 30. Точная форма общих определений . . . . .	283
30.1. Определения . . . . .	283
30.2. Обсуждение и обзор результатов . . . . .	284
*30.3. Понятие насыщенности . . . . .	285
30.4. Три непосредственных цели . . . . .	290
§ 31. Первые следствия . . . . .	291
31.1. Выпуклость, линейность и некоторые критерии доминирования . . . . .	291
31.2. Система всех дележей. Одноэлементные решения . . . . .	297
31.3. Изоморфизм, соответствующий стратегической эквивалентности . . . . .	299
§ 32. Нахождение всех решений существенной игры трех лиц с нулевой суммой . . . . .	301
32.1. Математическая формулировка задачи. Графический метод . . . . .	301
32.2. Нахождение всех решений . . . . .	303
§ 33. Выводы . . . . .	306
33.1. Множественность решений. Дискриминация и ее смысл . . . . .	306
33.2. Статика и динамика . . . . .	307
<b>Г л а в а VII. Игры четырех лиц с нулевой суммой . . . . .</b>	<b>308</b>
§ 34. Предварительный обзор . . . . .	308
34.1. Общая точка зрения . . . . .	308
34.2. Формализация существенной игры четырех лиц с нулевой суммой . . . . .	308
34.3. Перестановки игроков . . . . .	310
§ 35. Обсуждение некоторых специальных точек куба $Q$ . . . . .	312
35.1. Вершина I (и V, VI, VII) . . . . .	312
35.2. Вершина VIII (и II, III, IV). Игра трех лиц и «болвана» . . . . .	315
35.3. Некоторые замечания, касающиеся внутренности $Q$ . . . . .	318
§ 36. Рассмотрение главных диагоналей . . . . .	320
36.1. Участок, примыкающий к вершине VIII. Эвристическое описание . . . . .	320
36.2. Участок, примыкающий к вершине VIII. Точное описание . . . . .	322
*36.3. Другие участки главной диагонали . . . . .	327
§ 37. Центр и его окрестности . . . . .	328
37.1. Первоначальная ориентировка в отношении условий около центра . . . . .	328
37.2. Две альтернативы и роль симметрии . . . . .	329
37.3. Первая альтернатива в центре . . . . .	330
37.4. Вторая альтернатива в центре . . . . .	331
37.5. Сравнение двух центральных решений . . . . .	332
37.6. Несимметричные центральные решения . . . . .	333
§*38. Семейство решений для окрестности центра . . . . .	335
*38.1. Преобразование решения, принадлежащего первой альтернативе в центре . . . . .	335
*38.2. Строгое рассмотрение . . . . .	337
*38.3. Интерпретация решений . . . . .	342
<b>Г л а в а VIII. Некоторые замечания, касающиеся <math>n \geq 5</math> участников . . . . .</b>	<b>344</b>
§ 39. Число параметров в различных классах игр . . . . .	344
39.1. Ситуация для $n = 3, 4$ . . . . .	344
39.2. Ситуация для всех $n \geq 3$ . . . . .	344
§ 40. Симметричная игра пяти лиц . . . . .	346

40.1. Формализация симметричной игры пяти лиц . . . . .	346
40.2. Два крайних случая . . . . .	346
40.3. Связь между симметричной игрой пяти лиц и 1, 2, 3-симметричными играми четырех лиц . . . . .	348
<b>Г л а в а IX. Композиция и разложение игр . . . . .</b>	<b>352</b>
<b>§ 41. Композиция и разложение . . . . .</b>	<b>352</b>
41.1. Поиски игр $n$ лиц, для которых можно найти все решения . . . . .	352
41.2. Первый тип. Композиция и разложение . . . . .	353
41.3. Точные определения . . . . .	354
41.4. Анализ разложимости . . . . .	356
41.5. Желательность модификации . . . . .	358
<b>§ 42. Модификация теории . . . . .</b>	<b>358</b>
42.1. Неполный отказ от условия равенства суммы нулю . . . . .	358
42.2. Стратегическая эквивалентность. Игры с постоянной суммой . . . . .	359
42.3. Характеристическая функция в новой теории . . . . .	361
42.4. Дележи, доминирование, решения в новой теории . . . . .	362
42.5. Существенность, несущественность и разложимость в новой теории . . . . .	364
<b>§ 43. Разлагающее разбиение . . . . .</b>	<b>365</b>
43.1. Разлагающие множества. Компоненты игры . . . . .	365
43.2. Свойства совокупности всех разлагающих множеств . . . . .	366
43.3. Описание совокупности всех разлагающих множеств. Разлагающее разбиение . . . . .	367
43.4. Свойства разлагающего разбиения . . . . .	370
<b>§ 44. Разложимые игры. Дальнейшее развитие теории . . . . .</b>	<b>371</b>
44.1. Решение разложимой игры и решения ее компонент . . . . .	371
44.2. Композиция и разложение дележей и множеств дележей . . . . .	372
44.3. Композиция и разложение решений. Основные возможности и предположения . . . . .	373
44.4. Обобщение теории. Внешние источники . . . . .	375
44.5. Эксцесс . . . . .	377
44.6. Ограничения на эксцесс. Неизолированный характер игры в новой теории . . . . .	379
44.7. Рассмотрение новых понятий $E(e_0)$ , $F(e_0)$ . . . . .	379
<b>§ 45. Ограничения на эксцесс. Структура обобщенной теории . . . . .</b>	<b>381</b>
45.1. Нижняя граница эксцесса . . . . .	381
45.2. Верхняя граница эксцесса. Исключенные и вполне исключенные дележи . . . . .	382
45.3. Рассмотрение двух грациц $ \Gamma _1$ , $ \Gamma _2$ . Их отношение . . . . .	385
45.4. Исключенные дележи и различные решения. Теорема, связывающая $E(e_0)$ и $F(e_0)$ . . . . .	387
45.5. Доказательство теоремы . . . . .	389
45.6. Подведение итогов и заключение . . . . .	393
<b>§ 46. Нахождение всех решений в разложимой игре . . . . .</b>	<b>395</b>
46.1. Элементарные свойства разложений . . . . .	395
46.2. Разложение и его связь с решениями. Первоначальные результаты относительно $F(e_0)$ . . . . .	397
46.3. Продолжение . . . . .	399
46.4. Продолжение . . . . .	401
46.5. Окончательный результат для $F(e_0)$ . . . . .	404
46.6. Окончательный результат для $E(e_0)$ . . . . .	406
46.7. Графическое представление части результатов . . . . .	408
46.8. Интерпретация: нормальная зона. Наследование различных свойств . . . . .	409
46.9. «Болваны» . . . . .	411
46.10. Погружение игры . . . . .	411
46.11. Важность нормальной зоны . . . . .	414
46.12. Первое возникновение явления передачи: $n = 6$ . . . . .	415
<b>§ 47. Существенные игры трех лиц в новой теории . . . . .</b>	<b>416</b>
47.1. Необходимость рассмотрения этого вопроса . . . . .	416
47.2. Предварительные замечания . . . . .	416
47.3. Рассмотрение шести случаев. Случай (I) — (III) . . . . .	419
47.4. Случай (IV). Первая часть . . . . .	419
47.5. Случай (IV). Вторая часть . . . . .	421

47.6. Случай (V) . . . . .	424
47.7. Случай (VI) . . . . .	426
47.8. Интерпретация результатов. Кривые (одномерные части) в решении . . . . .	427
47.9. Продолжение. Области (двумерные части) в решении . . . . .	428
<b>Г л а в а X. Простые игры . . . . .</b>	<b>430</b>
§ 48. Выигрывающие и проигрывающие коалиции и игры, в которых они встречаются . . . . .	430
48.1. Второй случай п. 41.1. Решения, принимаемые коалициями . . . . .	430
48.2. Выигрывающие и проигрывающие коалиции . . . . .	431
§ 49. Характеризация простых игр . . . . .	433
49.1. Общие понятия выигрывающих и проигрывающих коалиций . . . . .	433
49.2. Особая роль одноэлементных множеств . . . . .	435
49.3. Характеризация семейств $W$ и $L$ в реальных играх . . . . .	436
49.4. Точное определение простоты . . . . .	438
49.5. Некоторые элементарные свойства простоты . . . . .	438
49.6. Простые игры и их $W$ и $L$ . Минимальные выигрывающие коалиции $W^m$ . . . . .	439
49.7. Решения простых игр . . . . .	440
§ 50. Мажоритарные игры и главное решение . . . . .	441
50.1. Примеры простых игр. Мажоритарные игры . . . . .	441
50.2. Однородность . . . . .	443
50.3. Более прямое использование понятия дележка при образовании решений . . . . .	445
50.4. Обсуждение описанного прямого подхода . . . . .	446
50.5. Связь с общей теорией. Точная формулировка . . . . .	447
50.6. Переформулирование полученного результата . . . . .	450
50.7. Интерпретация полученного результата . . . . .	452
50.8. Связь с однородными мажоритарными играми . . . . .	453
§ 51. Методы перечисления всех простых игр . . . . .	454
51.1. Предварительные замечания . . . . .	454
51.2. Метод насыщения. Перечисление посредством $W$ . . . . .	455
51.3. Основание для перехода от $W$ к $W^m$ . Трудности использования $W^m$ . . . . .	457
51.4. Измененный подход. Перечисление посредством $W^m$ . . . . .	459
51.5. Простота и разложение . . . . .	461
51.6. Несущественность, простота и композиция. Рассмотрение эксцесса . . . . .	463
51.7. Критерий разложимости в терминах $W^m$ . . . . .	464
§ 52. Простые игры для небольших значений $n$ . . . . .	466
52.1. Случай $n = 1, 2$ интереса не представляют. Описание случая $n = 3$ . . . . .	466
52.2. Процедура для $n \geq 4$ . Двухэлементные множества и их роль в классификации $W^m$ . . . . .	466
52.3. Разложение в случаях $C^*, C_{n-2}, C_{n-1}$ . . . . .	468
52.4. Простые игры, отличные от $[1, \dots, 1, n - 2]_h$ (с «болванами»). Случай $C_k$ , $k = 0, 1, \dots, n - 3$ . . . . .	470
52.5. Описание случаев $n = 4, 5$ . . . . .	470
§ 53. Новые возможности для простых игр при $n \geq 6$ . . . . .	472
53.1. Закономерности, обнаруженные для $n < 6$ . . . . .	472
53.2. Шесть основных контрпримеров (для $n = 6, 7$ ) . . . . .	472
§ 54. Нахождение всех решений в соответствующих играх . . . . .	479
54.1. Основания для рассмотрения в простых играх решений, отличных от главного решения . . . . .	479
54.2. Перечисление тех игр, для которых все решения известны . . . . .	480
54.3. Основания для рассмотрения простой игры $[1, \dots, 1, n - 2]_h$ . . . . .	481
§*55. Простая игра $[1, \dots, 1, n - 2]_h$ . . . . .	482
*55.1. Предварительные замечания . . . . .	482
*55.2. Доминирование. Главный игрок. Случай (I) и (II) . . . . .	482
*55.3. Описание случая (I) . . . . .	483
*55.4. Случай (II). Нахождение $V$ . . . . .	486
*55.5. Случай (II). Нахождение $\bar{V}$ . . . . .	489
*55.6. Случай (II). $\mathcal{A}$ и $S_*$ . . . . .	491
*55.7. Случай (II') и (II''). Описание случая (II') . . . . .	492

*55.8. Случай (II'), $\mathcal{A}$ и $V'$ . Доминирование . . . . .	494
*55.9. Случай (II"). Нахождение $V'$ . . . . .	495
*55.10. Описание случая (II") . . . . .	501
*55.11. Другая формулировка полного результата . . . . .	503
*55.12. Интерпретация полученного результата . . . . .	505
 Г л а в а XI. Общие игры с ненулевой суммой . . . . .	510
§ 56. Распространение теории . . . . .	510
56.1. Постановка задачи . . . . .	510
56.2. Фиктивный игрок. Расширение до игры с нулевой суммой $\bar{\Gamma}$ . . . . .	511
56.3. Вопросы, касающиеся свойств $\bar{\Gamma}$ . . . . .	512
56.4. Ограничения в использовании $\bar{\Gamma}$ . . . . .	514
56.5. Две возможные процедуры . . . . .	516
56.6. Дискриминирующие решения . . . . .	517
56.7. Альтернативные возможности . . . . .	518
56.8. Новое построение . . . . .	520
56.9. Возвращение к случаю, когда $\Gamma$ является игрой с нулевой суммой . . . . .	521
56.10. Анализ понятия доминирования . . . . .	524
56.11. Строгие рассуждения . . . . .	528
56.12. Новое определение решения . . . . .	530
§ 57. Характеристическая функция и связанные с ней понятия . . . . .	531
57.1. Характеристическая функция. Расширенная и ограниченная формы . . . . .	531
57.2. Основные свойства . . . . .	532
57.3. Нахождение всех характеристических функций . . . . .	534
57.4. Устранимые множества игроков . . . . .	537
57.5. Стратегическая эквивалентность. Игры с нулевой и постоянной суммой . . . . .	539
§ 58. Интерпретация характеристической функции . . . . .	542
58.1. Анализ определения . . . . .	542
58.2. Желание выиграть или нанести ущерб . . . . .	543
58.3. Обсуждение . . . . .	544
§ 59. Общие рассмотрения . . . . .	546
59.1. Обсуждение программы . . . . .	546
59.2. Редуцированная форма. Неравенства . . . . .	547
59.3. Различные вопросы . . . . .	550
§ 60. Решения всех общих игр для $n \leq 3$ . . . . .	552
60.1. Случай $n = 1$ . . . . .	552
60.2. Случай $n = 2$ . . . . .	552
60.3. Случай $n = 3$ . . . . .	554
60.4. Сравнение с играми с нулевой суммой . . . . .	556
§ 61. Экономическое истолкование результатов для $n = 1, 2$ . . . . .	558
61.1. Случай $n = 1$ . . . . .	558
61.2. Случай $n = 2$ . Рынок двух лиц . . . . .	558
61.3. Рассмотрение рынка двух лиц и его характеристической функции . . . . .	559
61.4. Обоснование точки зрения, высказанной в § 58 . . . . .	561
61.5. Делимые продукты. «Маргинальные пары» . . . . .	562
61.6. Цена. Обсуждение . . . . .	565
§ 62. Экономическая интерпретация результатов для $n = 3$ ; частный случай . . . . .	567
62.1. Случай $n = 3$ , частный случай. Рынок трех лиц . . . . .	567
62.2. Предварительное обсуждение . . . . .	568
62.3. Решения. Первый подслучай . . . . .	568
62.4. Решения. Общая форма . . . . .	570
62.5. Алгебраическая форма результата . . . . .	571
62.6. Обсуждение . . . . .	573
§ 63. Экономическая интерпретация результатов для $n = 3$ ; общий случай . . . . .	574
63.1. Делимые товары . . . . .	574
63.2. Анализ неравенств . . . . .	576
63.3. Предварительное обсуждение . . . . .	578
63.4. Решения . . . . .	578
63.5. Алгебраическая форма результата . . . . .	580
63.6. Обсуждение . . . . .	581

§ 64. Общий рынок . . . . .	583
64.1. Постановка задачи . . . . .	583
64.2. Некоторые частные свойства. Монополия и монопсония . . . . .	584
<b>Г л а в а XII. Обобщения понятий доминирования и решения . . . . .</b>	<b>587</b>
§ 65. Обобщение. Частные случаи . . . . .	587
65.1. Постановка задачи . . . . .	587
65.2. Общие замечания . . . . .	588
65.3. Упорядочения, транзитивность, ацикличность . . . . .	589
65.4. Решения для симметричного отношения и для линейного упорядо- чения . . . . .	591
65.5. Решения для частичного упорядочения . . . . .	592
65.6. Ацикличность и строгая ацикличность . . . . .	594
65.7. Решения для ациклического отношения . . . . .	597
65.8. Единственность решений, ацикличность и строгая ацикличность . . . . .	599
65.9. Применение к играм. Дискретность и непрерывность . . . . .	602
§ 66. Обобщение понятия полезности . . . . .	603
66.1. Обобщение. Два этапа теоретического исследования . . . . .	603
66.2. Обсуждение первого этапа . . . . .	604
66.3. Обсуждение второго этапа . . . . .	605
66.4. Желательность унификации двух этапов . . . . .	607
§ 67. Обсуждение примера . . . . .	608
67.1. Описание примера . . . . .	608
67.2. Решение и его интерпретация . . . . .	610
67.3. Обобщение; различные дискретные шкалы полезностей . . . . .	612
67.4. Выводы о соглашении . . . . .	614
<b>П р и л о ж е н и е. Аксиоматическое построение теории полезности . . . . .</b>	<b>616</b>
A.1. Постановка задачи . . . . .	616
A.2. Выводы из аксиом . . . . .	617
A.3. Заключительные замечания . . . . .	626
<b>Д о б а в л е н и е. Развитие теории игр (Н. Н. Воробьев) . . . . .</b>	<b>631</b>
Введение . . . . .	633
<b>Г л а в а I. До монографии . . . . .</b>	<b>634</b>
§ 1. Неопределенность исхода игры и ее источники . . . . .	634
§ 2. Комбинаторные игры . . . . .	636
§ 3. Азартные игры . . . . .	639
§ 4. Стратегические игры. Работы Э. Бореля . . . . .	642
§ 5. К теории стратегических игр . . . . .	645
<b>Г л а в а II. Теория игр и экономическое поведение . . . . .</b>	<b>650</b>
§ 1. Постановка экономической проблемы . . . . .	650
§ 2. Общее формальное описание стратегических игр . . . . .	654
§ 3. Игры двух лиц с нулевой суммой. Теория . . . . .	656
§ 4. Игры двух лиц с нулевой суммой. Примеры . . . . .	658
§ 5. Игры трех лиц с нулевой суммой . . . . .	660
§ 6. Формулировка общей теории. Игры $n$ лиц с нулевой суммой . . . . .	661
§ 7. Игры четырех лиц с нулевой суммой . . . . .	663
§ 8. Некоторые замечания, касающиеся случая $n \geq 5$ участников . . . . .	664
§ 9. Композиция и разложение игр . . . . .	664
§ 10. Простые игры . . . . .	666
§ 11. Общие игры с нулевой суммой . . . . .	666
§ 12. Обобщение понятий доминирования и решения . . . . .	668
<b>Г л а в а III. Теория игр — раздел математики . . . . .</b>	<b>670</b>
§ 1. Матричные игры . . . . .	670
§ 2. Бесконечные антагонистические игры . . . . .	674
§ 3. Кооперативная теория . . . . .	679
§ 4. Бескоалиционные и коалиционные игры . . . . .	687
§ 5. Динамические игры . . . . .	690
<b>Б и б л и о г р а ф и я . . . . .</b>	<b>695</b>
<b>Предметный указатель . . . . .</b>	<b>703</b>

# ОТ РЕДАКТОРА РУССКОГО ПЕРЕВОДА

Настоящий перевод сделан по последнему (третьему) американскому изданию монографии. В него включены почти полностью все три авторских предисловия, входящие в оригинал, а также специальное предисловие к русскому изданию, любезно написанное одним из авторов книги, О. Моргенштерном.

К переводу приложен написанный редактором очерк «Развитие теории игр», в котором излагается история математических идей, приведших к созданию теории игр, комментируется содержание данной монографии, а также дается краткий обзор развития теории игр как математической дисциплины за время, прошедшее с момента опубликования книги Дж. фон Неймана и О. Моргенштерна. Перевод снабжен также библиографией, составленной редактором.

Авторы склонны сопровождать написанные на языке формул математические построения параллельным чисто словесным изложением существа дела. Это достигается ими ценой известной тяжеловесности оборотов, которая неизбежно сохранилась и в переводе ввиду стремления переводчиков и редактора добиться наибольшей близости его к оригиналу.

Этим же стремлением объясняются и отдельные терминологические особенности текста. Некоторые употребляемые авторами теоретико-игровые термины за последнее время в английском языке изменились. Для соответствующих понятий нами введены в переводе русские термины, отличающиеся от принятых в отечественной литературе в той же мере, в какой авторская терминология отличается от современной английской.

Ввиду перегруженности текста авторскими сносками было принято решение отказаться от подстрочных примечаний переводчиков и редактора. Некоторые обширные авторские сноски по техническим причинам были перенесены в соответствующие места текста, набраны петитом и снабжены заголовком «Замечание». Все комментарии, касающиеся отдельных мест книги, приведены в заключающем данное издание очерке редактора. Разделы текста, обозначенные в оригинале одним числом, названы в переводе «параграфами». Разделам, обозначенным двумя или тремя числами, приписано название «пункт».

Перевод монографии выполнили А. А. Корбут (предисловия и главы I и II), В. В. Малинников (§§ 12—14 из главы III и глава V), Л. И. Горьков (глава IV), Л. А. Петросян (§§ 15—17 из главы III), А. С. Михайлова (глава VI), Е. Б. Яновская (главы VII и VIII), А. Н. Ляпунов (глава IX), А. И. Соболев (§§ 48—53 из главы X), И. Н. Врублевская (§§ 54 и 55 из главы X) и О. Н. Бондарева (главы XI, XII и Приложение).

Н. Н. Воробьев

# ПРЕДИСЛОВИЕ К РУССКОМУ ПЕРЕВОДУ

С большим удовольствием принимаю я переданное мне профессором Н. Н. Воробьевым любезное предложение написать небольшое введение к русскому изданию этой книги. Перевод «Теории игр и экономического поведения» на русский язык следует всячески приветствовать; его можно рассматривать как важный шаг в области международного научного сотрудничества и обмена идеями.

Основой для перевода послужило третье издание, опубликованное в Принстоне в 1953 г. Джон фон Нейман и я написали к нему новое предисловие; в остальном — помимо исправления некоторых опечаток — оно тождественно со вторым изданием, вышедшим в 1947 г. В этом предисловии мы отмечали, что за шесть лет, прошедших между двумя изданиями, появилось столько публикаций по теории игр, что мы вынуждены были ограничиться простым перечислением книг по данному вопросу. За 16 ми-нувших с тех пор лет во многих странах и на многих языках появилась целая лавина публикаций.

1. 8 февраля 1957 г. после длительной болезни фон Нейман скончался, будучи еще сравнительно молодым. Невозможно оценить сейчас, каким был бы его собственный дальнейший вклад в теорию игр. Эта область была особенно близка его сердцу, и в ней он добился некоторых из наиболее важных научных достижений в своей жизни — жизни, в течение которой он обогатил много отраслей чистой и прикладной математики, построил излагаемую дисциплину, дал математические основания квантовой механики и изложил логические основы теории электронных вычислительных машин и автоматов. Я опубликовал краткий некролог о покойном друге в «Экономическом журнале» (*The Economic Journal* 68, March 1958). Полная оценка работ фон Неймана со стороны многих специалистов дана в специальном выпуске «Бюллетеня Американского математического общества» (*The Bulletin of the American Mathematical Society* 64, May 1958); там же приведена полная библиография его работ. Его труды собраны в шеститомнике *Collected works* (A. H. Taub, ed.), Pergamon Press, New York — London, 1961—1963.

2. Здесь было бы уместно дать детальный обзор развития теории игр с 1953 г. Однако это задача такого объема и сложности, что для меня невозможно выполнить ее адекватным образом при имеющихся у меня сроках и объеме. Одна из основных трудностей состоит в том, что литература по теории игр проникла в столь разнообразные области — от алгебраической топологии до приложений даже к таким дисциплинам, как биология и метеорология, — что мало кто может свободно ориентироваться во всех этих областях. Поэтому, следуя примеру предыдущего предисловия, я ограничусь перечислением — по возможности с максимальной полнотой — лишь книг по теории игр, появившихся с 1953 г., снабжая каждое название книги краткими комментариями относительно ее цели и содержания. Затем последует небольшой раздел, описывающий

некоторые принципиальные тенденции в развитии теории игр и рассматривающий несколько широких областей, которые в настоящее время можно выделить.

В этом библиографическом обзоре я, естественно, опускаю работы, выполненные в Советском Союзе и восточноевропейских странах. Любая попытка такого рода была бы с моей стороны необоснованной, ибо я, к сожалению, незнаком с соответствующими языками, а на английский язык переведено далеко не столько этих книг и статей, как того хотелось бы. Кроме того, это было бы излишним, так как означало бы попросту «привозить сов в Афины». Библиография этих работ (в основном русских), составленная в США в июне 1964 г., насчитывает 74 названия, и с тех пор этот список, без сомнения, существенно вырос. Названия этих работ указывают на тот широкий диапазон интересов, о котором мне еще придется сказать. Разумеется, некоторые из этих работ уже хорошо известны на Западе, в частности важные результаты, полученные редактором этого перевода профессором Н. Н. Воробьевым, а также О. Н. Бондаревой и другими авторами. Очевидно, с тех пор в Советском Союзе выполнено много дальнейших важных работ; как показало мне мое участие в Международном конгрессе математиков в Москве в августе 1966 г., эти исследования интенсивно проводятся и сейчас.

3. Следующий список книг, опубликованных после 1953 г., упорядочен хронологически, хотя, по-видимому, можно было бы разделить их на теоретические и прикладные, произведя дальнейшее подразделение внутри этих классов. Одной из причин предпочтения нами хронологического порядка является сильная взаимозависимость между чисто математическими и прикладными работами. Это само по себе является весьма характерным: новые вопросы, возникающие из стремления приложить теорию игр (например, к экономике) и в связи с попытками согласовать теорию игр с классической теорией экономического равновесия, породили новые и весьма интересные математические теоремы. С другой стороны, новые математические результаты открыли возможности новых приложений. Я считаю, что подобное взаимодействие имеет огромное значение и характерно для развития любой полноценной математико-прикладной дисциплины. Это может быть не вполне очевидно из названий цитируемых ниже книг или комментариев к ним, хотя в некоторых случаях это взаимное оплодотворение теории и практики совершенно явственно.

Предлагаемый список содержит только книги, которые полностью или в большей своей части посвящены теории игр. Имеется много других книг, особенно учебников по экономике, линейному программированию, управлению, статистике и т. п., в которые включены главы по теории игр вводного характера; несмотря на всю полезность этих изданий, мы исключили их из нашего списка по соображениям экономии места. Хотя некоторые из указываемых книг уже хорошо известны в Советском Союзе, мы тем не менее сочли удобным привести эту библиографию.

Blackwell D., Girshik M. A., Theory of games and statistical decisions, London, 1954, xi + 355 стр.<sup>1)</sup>.

Это первая книга, в которой авторы, следуя А. Вальду, излагают и используют теорию игр в качестве основы для теории статистических решений, ограничиваясь дискретными распределениями.

<sup>1)</sup> Русский перевод: Д. Блэквелл, М. Гиршик, Теория игр и статистических решений, М., ИЛ, 1958.—Прим. ред.

Decision processes. Ed. by R. M. Thrall C. H. Coombs, R. L. Davis, New York, 1954, viii + 332 стр.

Сборник содержит 18 докладов, представленных на семинаре в 1952 г.; многие доклады посвящены теории игр. Особо выделяется доклад Джона Милнора «Игры против природы», в котором он исследует относительную приложимость критериев Вальда (использовавшего минимакс), Лапласа, Сэвиджа, Гурвица и формулирует ряд приемлемых с точки зрения здравого смысла аксиом, которым ни один из этих подходов не удовлетворяет.

Braithwaite R. B., Theory of games as a tool for the moral philosopher, Cambridge, 1955, 76 стр.; 2-е изд., 1963.

Философское исследование полезности теории игр для справедливого разрешения общечеловеческих конфликтных ситуаций.

Linear inequalities and related systems. Ed. by H. W. Kuhn and A. W. Tucker, Princeton, 1956, xxi + 322 стр.<sup>1)</sup>.

Проблематика собранных здесь 18 статей достаточно тесно связана с теорией игр, чтобы оправдать включение книги в настоящий список. Эта связь осуществляется посредством известной эквивалентности игр двух лиц с нулевой суммой и пар двойственных задач линейного программирования, а также путем изучения модели расширяющейся экономики фон Неймана, которой посвящено несколько статей. Имеется библиография, содержащая 298 названий.

Berge C., Théorie générale des jeux à  $n$  personnes, Paris, 1957, 144 стр.<sup>2)</sup>.

Строго математическое и весьма сжатое руководство с отчетливо выраженной теоретико-множественной ориентацией, суммирующее известные к тому времени результаты. В последующих работах Берже развил теорию графов и разработал ее приложения к специальным задачам теории игр и родственных областей.

Luce R. D., Raiffa H., Games and decisions: Introduction and critical survey, New York, 1957, xix + 509 стр.<sup>3)</sup>.

По-видимому, это наиболее известный общий вводный труд по теории игр. Книга в большей части нематематична, но тем не менее требует от читателя высокого уровня сосредоточенности. Она является примером того, сколь далеко можно развить словесные описания без чрезмерных уступок популярности. Изложение весьма полно и ведет от теории полезности к новым формам устойчивости решений игр  $n$  лиц (введение  $\Phi$ -устойчивости, рассмотрение «ядра» и т. п.). Имеется обширная библиография.

Contributions to the theory of games III, ed. by M. Dresher, A. W. Tucker, Ph. Wolfe, Princeton, 1957, 435 стр.; IV, ed. by A. W. Tucker and R. D. Luce, Princeton, 1959.

Следуя традиции, установленной I и II томами серии, эти две книги содержат некоторые из наиболее фундаментальных работ,

<sup>1)</sup> Русский перевод: Линейные неравенства и смежные вопросы, М., ИЛ, 1959.—*Прим. ред.*

<sup>2)</sup> Русский перевод: К. Берж, Общая теория игр нескольких лиц, М., Физматгиз, 1961.—*Прим. ред.*

<sup>3)</sup> Русский перевод: Р. Д. Льюис, Х. Раифа, Игры и решения, М., ИЛ, 1961.—*Прим. ред.*