

Г. Ламб

Гидродинамика

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 53
ББК 22.3
Г11

Г11 **Г. Ламб**
Гидродинамика / Г. Ламб – М.: Книга по Требованию, 2021. – 929 с.

ISBN 978-5-458-25582-0

ISBN 978-5-458-25582-0

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2021

© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2021

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.



Серия Книжный Ренессанс

www.samizday.ru/reprint

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава I

Уравнения движения

- § 1, 2. Основные свойства жидкости (13).— § 3. Две формы исследования (14).— § 4—9. Эйлерова форма уравнений движения (15).— Динамические уравнения. Уравнение неразрывности. Уравнение физического состояния жидкости. Граничные условия (20).— § 10. Уравнение энергии (22).— § 10а. Перенос количества движения (24).— § 11. Мгновенно вызванное движение (25).— § 12. Уравнения, отнесенные к подвижной системе координат (27).— § 13, 14. Динамические уравнения движения и уравнение неразрывности в форме Лагранжа (28).— § 15, 16. Преобразование Вебера (29).— § 16а. Уравнения в полярных координатах (31).

Глава II

Интегрирование уравнений движения в частных случаях

- § 17. Потенциал скоростей. Теорема Лагранжа (32).— § 18, 19. Физические и кинематические свойства функции φ (34).— § 20. Интегрирование уравнений для потенциального движения. Уравнение давления (35).— § 21—23. Установившееся движение. Вывод уравнения давления из принципа энергии. Предельное значение скорости (36).— § 24. Истечение жидкости; сжатие струи (39).— § 24а, 25. Истечение газов (42).— § 26—29. Примеры вращающейся жидкости. Равномерное вращение. Вихрь Ранкина. Электромагнитные вращения (45).

Глава III

Безвихревое движение

- § 30. Анализ бесконечно малого движения элемента жидкости при деформации и вращении (48).— § 31, 32. Поток и циркуляция. Теорема Стокса (50).— § 33. Независимость циркуляции от времени (51).— § 34, 35. Безвихревое движение в односвязной области; однозначность потенциала скорости (54).— § 36—39. Несжимаемая жидкость; трубка тока. Функция φ не имеет максимума и минимума. Скорость не имеет максимума. Среднее значение функции φ на сферической поверхности (55).— § 40, 41. Условия, определяющие функцию φ (59).— § 42—46. Теорема Грина; динамическая интерпретация. Формула для кинетической энергии. Теорема Кельвина о минимуме энергии (62).— § 47, 48. Многосвязные области; замкнутые кривые и сечения (68).— § 49—51. Безвихревое движение в многосвязных областях; многозначность потенциала скорости; циклические постоян-

ные (70). — § 52. Случай несжимаемой жидкости. Условия, определяющие функцию φ (73). — § 53—55. Обобщение Кельвина для теоремы Грина; динамическая интерпретация; энергия безвихревого движения жидкости в циклической области (74). — § 56—58. Источники и стоки. Дублеты. Замена безвихревого движения жидкости источниками, распределенными по поверхности (78).

Глава IV

Плоское движение несжимаемой жидкости

- § 59. Функция тока Лагранжа (83). — § 60, 60a. Соотношение между функцией тока и потенциалом скорости. Источник в плоскости. Электрические аналогии (85). — § 61. Кинетическая энергия (88). — § 62. Связь с теорией функций комплексного переменного (88). — § 63, 64. Простейшие случаи циклического и нециклического движения. Изображение источника относительно окружности. Потенциал скорости нескольких источников (91). — § 65, 66. Формулы преобразования. Конфокальные кривые. Истечение из отверстий (95). — § 67. Общая формула. Метод Фурье (93). — § 68. Движение цилиндра без циркуляции; линии тока (99). — § 69. Движение цилиндра с циркуляцией. Подъемная сила. Траектория при постоянной силе (101). — § 70. Замечание к более общей задаче. Методы преобразований. Задача Кутта (104). — § 71. Методы преобразования. Поступательное движение цилиндра. Случай эллиптического цилиндра. Обтекание наклонной пластинки. Результирующая давления жидкости (107). — § 72. Движение жидкости, вызванное вращением твердого тела. Вращение призматического сосуда произвольного сечения. Вращение эллиптического цилиндра в безграничной жидкости; общий случай движения с циркуляцией (111). — § 72a. Представление эффекта движущегося цилиндра в жидкости диполем (115). — § 72b. Формула Блазиуса для силы воздействия потенциального потока при обтекании цилиндра. Применения; теорема Жуковского; сила, создаваемая источником (117). — § 73. Струйное течение. Метод Шварца при конформном преобразовании (120). — § 74—78. Насадок Борда. Истечение жидкости из прямоугольного отверстия. Коэффициент сжатия. Удар струи о перпендикулярную и наклонную пластинку. Вычисление сопротивления. Задача Бобылева (123). — § 79. Разрывные движения (133). — § 80. Обтекание поверхности (135).

Глава V

Безвихревое движение жидкости: трехмерные задачи

- § 81, 82. Специальные функции. Теория Максвелла о полюсах (137). — § 83. Уравнение Лапласа в полярных координатах (140). — § 84, 85. Зональные функции. Гипергеометрические ряды. (141). — § 86. Тессеральные и секториальные функции (145). — § 87, 88. Сопряженные поверхностные функции. Обобщения (147). — § 89. Символическая запись уравнения Лапласа. Решение в форме определенного интеграла (149). — § 90, 91. Приложение специальных функций к гидродинамике. Импульсивное давление на сферической поверхности. Условие для скорости по нормали. Энергия возникшего движения (150). — § 91a. Примеры: Сжатие сферического воздушного пузырька. Расширение сферической полости под действием внутреннего давления (152). — § 92, 93. Движение сферы в безграничной жидкости. Присоединенная масса. Сфера в жидкости с концентрической сферической границей (154). — § 94—96. Стоксовы функции тока. Выражение в сферических функциях. Линии тока на сфере. Замена сферы диполем.

Распределение давления по сфере (157). — § 97. Обратный метод Ранкина (162). — § 98, 99. Движение двух сфер в жидкости; кинематические условия. Присоединенные массы (163). — § 100, 101. Цилиндрические функции. Решение уравнения Лапласа в бесселевых функциях. Обобщение на произвольные функции (168). — § 102. Гидродинамические примеры. Истечение из круглого отверстия. Присоединенная масса круглого диска (171). — § 103—106. Эллипсоидальные функции для эллипсоида вращения. Решения уравнения Лапласа. Применение к движению эллипсоида вращения в жидкости (175). — § 107—109. Функции для сплюсненного эллипсоида. Истечение из круглого отверстия. Линии тока при обтекании круглого диска. Поступательное и вращательное движения сплюсненного эллипсоида (180). — § 110. Движение жидкости в эллипсоидальной полости (184). — § 111. Общее выражение для $\Delta\phi$ в ортогональных координатах (186). — § 112. Софокусные поверхности второго порядка; эллиптические координаты (187). — § 113. Истечение из эллиптического отверстия (189). — § 114—115. Поступательное и вращательное движение эллипсоида в жидкости. Коэффициент присоединенной массы (191). — § 116. Отношение к другим задачам. (196). — *Добавление к главе V.* Гидродинамические уравнения, отнесенные к общим ортогональным координатам (197).

Глава VI

Движение твердых тел в жидкости. Динамическая теория

- § 117, 118. Кинематические условия в случае одного тела (200). — § 119. Теория импульсов (202). — § 120. Уравнения движения жидкости в системе координат, связанной с телом (204). — § 121, 121а. Кинетическая энергия. Коэффициент присоединенной массы. Представление движения жидкости вдали от тела диполем (204). — § 122, 123. Компоненты импульса. Обратные формулы (207). — § 124. Выражение для гидродинамических сил. Три постоянных направления движения; устойчивость (210). — § 125. Возможные случаи установившегося движения. Движение от импульсивной пары (213). — § 126. Гидрокинетическая симметрия (215). — § 127—129. Движение тела вращения. Устойчивость движения, параллельного оси симметрии. Влияние вращения. Другие случаи установившегося движения (218). — § 130. Движение винтовой поверхности (224). — § 131. Коэффициент присоединенной массы жидкости, заключенной в движущейся твердой оболочке (224). — § 132—134. Циклическое движение жидкости через отверстия в теле. Установившееся движение кольца; условия устойчивости (225). — § 135, 136. Уравнения Лагранжа в обобщенных координатах. Принцип Гамильтона. Применение в гидродинамике (233). — § 137, 138. Примеры. Движение сферы вблизи твердой стенки. Движение двух сфер по линии их центров (237). — § 139—141. Изменение уравнений Лагранжа в случае циклического движения; игнорирование координатами. Уравнения для вращающейся системы (241). — § 142, 143. Кинетостатика. Гидродинамические силы, действующие на тело, обтекаемое ускоренным потоком (246). — § 144. Замечание к интуитивному распространению принципов динамики (251).

Глава VII

Вихревое движение

- § 145. Вихревая линия и вихревая нить. Кинематические свойства (251). — § 146. Постоянство вихрей. Доказательство Кельвина. Уравнения Коши, Стокса и Гельмгольца. Движение жидкости в неподвижном эллипсоидальном сосуде с постоянной угловой скоростью в

каждой точке (253). — § 147. Условия, определяющие вихревое движение (259). — § 148, 149. Выражение скорости через компоненты вихря; электромагнитные аналогии. Случай изолированного вихря (260). — § 150. Потенциал скорости, создаваемый вихрями (265). — § 151. Вихревой слой (267). — § 152, 153. Количество движения и энергия вихревой системы (269). — § 154, 155. Прямолинейные вихри. Линии тока вихревой пары. Другие примеры (27). — § 156. Исследования устойчивости одинарного и двойного вихревого ряда. Вихревая дорожка Кармана (281). — § 157. Теоремы Кирхгофа для параллельных вихрей (288). — § 158, 159. Устойчивость вихревых колец. Эллиптический вихрь Кирхгофа (290). — § 159а. Движение твердого тела во вращающейся жидкости (293). — § 160. Вихри в криволинейном слое жидкости (298). — § 161—163. Круговые вихри. Потенциал скорости и функция тока изолированного вихревого кольца. Линии тока. Импульс и энергия; скорость движения вихревого кольца (299). — § 164. Взаимное влияние вихревых колец. Изображение вихревого кольца относительно сферы (305). — § 165. Общие условия для установившегося движения жидкости. Цилиндрические и сферические вихри (307). — § 166. Ссылки на другие работы (310). — § 166а. Теоремы Бьеркнеса (311). — § 167. Преобразование Клебша уравнений гидродинамики (312).

Глава VIII

Приливные волны

- § 168. Общая теория малых колебаний, главные колебания, вынужденные колебания (314). — § 169—174. Свободные волны в прямолинейном канале; скорость распространения волны; эффект начальных условий; физический смысл различных приближений; энергия системы волн (320). — § 175. Установившееся движение (328). — § 176. Наложение волновых систем; отражение (330). — § 177—179. Эффект возмущающих сил; свободные и вынужденные колебания в ограниченном канале (331). — § 180—184. Каналовая теория приливов. Потенциал возмущающих сил. Приливы в экваториальном канале и канале, параллельном экватору; полусуточные и суточные приливы. Канал, совпадающий с меридианом. Изменение среднего уровня. Двухнедельный прилив. Экваториальный канал конечной длины. Продолжительность приливов (336). — § 185, 186. Волны в канале произвольного сечения. Примеры свободных и вынужденных колебаний. Увеличение прилива в мелких морях и лиманах (344). — § 187, 188. Волны конечной амплитуды. Изменение вида прогрессивной волны. Приливы второго порядка (350). — § 189, 190. Движение волны в двух горизонтальных направлениях; общее уравнение. Колебание в прямоугольном бассейне (355). — § 191, 1 2. Колебания в круглом бассейне. Функции Бесселя; эллиптический бассейн; приближение к медленному течению (358). — § 193. Случай произвольной глубины. Круглый бассейн (365). — § 194—197. Распространение возмущений от центра; функции Бесселя второго рода. Волны, вызванные местным периодическим давлением. Общая формула для расходящихся волн. Примеры на неустановившемся местном возмущении (367). — § 198—201. Колебание тонкого сферического слоя воды; свободные и вынужденные волны. Эффект взаимного притяжения воды. Приложение к случаю океана, ограниченного меридианами и параллелями (378). — § 202, 203. Уравнения движения динамической системы относительно вращающихся осей (385). — § 204—205а. Малые колебания вращающейся системы; устойчивость обыкновенная и вековая. Влияния малой степени вращения на тип и частоту нормальных видов колебаний (388). — § 205b. Приближенное вычисление частот (393). — § 206. Вынужденные

колебания (396). — § 207, 208. Гидродинамические примеры; приливные колебания вращающегося тонкого слоя воды; волны в сужающемся канале (398). — § 209—211. Вращающийся круглый бассейн постоянной глубины; свободные и вынужденные колебания (402). — § 212. Круглый бассейн произвольной глубины (409). — § 212а. Примеры приближенных решений (412). — § 213, 214. Приливные колебания на вращающемся земном шаре. Кинетическая теория Лапласа (414). — § 215—217. Симметричные колебания. Приливы длинных периодов (419). — § 218—221. Суточные и полусуточные приливы. Рассмотрение решений Лапласа (428). — § 222, 223. Исследования Hough'a; цитаты и результаты (437). — § 223а. Исследования Гальдсброу (443). — § 224. Изменение кинетической теории для действительной конфигурации океана; вопрос фазы (444). — § 225, 226. Устойчивость океана. Замечания относительно общей теории кинетической устойчивости (447). Приложение: Силы, вызывающие приливы (449).

Глава IX

Поверхностные волны

- § 227. Двухмерные задачи; условия на поверхности (455). — § 228. Стоячие волны; линии тока (456). — § 229, 230. Прогрессивные волны; траектории частиц. Скорость волны; числовая таблица. Энергия гармонической волны (458). — § 231. Колебания границы раздела двух жидкостей (463). — § 232. Неустойчивость границы двух потоков (467). — § 233, 234. Стационарные прогрессивные волны (470). — § 235. Волны в неоднородной жидкости (473). — § 236, 237. Групповая скорость. Передача энергии (476). — § 238—240. Задача Коши-Пуассона; волны, вызванные начальным местным возвышением жидкости или местным импульсом (481). — § 241. Приближенная формула Кельвина для эффекта местного возмущения в середине прямой линии. Графические построения (494). — § 242—246. Поверхностные возмущения в потоке. Случай конечной глубины. Влияние неровностей дна (498). — § 247. Волны, возникающие при погружении цилиндра в жидкость (513). — § 248, 249. Общая теория волн, возникающих при подвижном возмущении. Волновое сопротивление (516). — § 250. Волны конечной высоты. Волны постоянного вида. Предельные формы (521). — § 251. Волны Герстнера (526). — § 252, 253. Одиночные волны. Колебательные волны Korteweg'a и De Vries (528). — § 254. Динамические условия Гельмгольца для волн постоянного вида (534). — § 255, 256. Распространение волн в горизонтальной плоскости. Влияние местного возмущения. Влияние перемещающегося давления на возмущение в жидкости; формы волн (537). — § 256а, 256б. Перемещающиеся возмущения другого вида. Корабельные волны. Волновое сопротивление. Влияние конечной глубины на форму волны (546). — § 257—259. Стоячие волны в ограниченной массе воды. Распространение колебаний в канале треугольного сечения и в канале круглого сечения (550). — § 260, 261. Продольные колебания; канал треугольного сечения; гребень волны (556). — § 262—264. Колебание жидкого шара, линии тока. Сферический океан постоянной глубины (563). — § 265. Капиллярность. Условия на поверхности (568). — § 266. Капиллярные волны. Групповая скорость (570). — § 267, 268. Волны под действием силы тяжести и капиллярности. Минимум скорости волны. Волны на поверхности раздела двух потоков (573). — § 269. Волны, вызванные местным возмущением. Эффект движущегося источника возмущения; волны и рябь (578). — § 270—272. Возмущение на поверхности потока; формальные исследования. Формы волны (580). — § 273, 274. Колебания цилиндрического столба жидкости. Неустойчивость струи (588). — § 275. Колебание жидкого шара и тора (591).

Глава X

Звуковые волны

- § 276—280. Плоские волны; скорость звука; энергия системы волн (593). — § 281—284. Плоские волны конечной амплитуды; методы Римана и Earnshaw. Условия стоячих волн; исследования Ранкина. Волны уплотнения (600). — § 285, 286. Сферические волны. Решение при начальных условиях (611). — § 287, 288. Общее уравнение звуковых волн. Уравнение энергии (616). — § 289. Простые гармонические колебания. Источники и диполи. Распространение энергии (620). — § 290. Применение Гельмгольца теоремы Грина. Потенциал скорости, выраженный через потенциалы источников, распределенных по поверхности. Формула Кирхгофа (623). — § 291. Периодические возмущающие силы (627). — § 292. Приложение сферических функций. Общее уравнение (629). — § 293. Колебание воздуха в сферическом сосуде. Колебание сферического слоя (633). — § 294. Распространение волн от сферической поверхности. Уменьшение амплитуды повторного движения (636). — § 295. Влияние воздуха на колебания маятника, поправка на момент инерции шарика; затухания во времени (638). — § 296—298. Рассеивание звуковых волн сферическим препятствием. Удары волн о подвижную сферу; случай синхронности (640). — § 299, 300. Диффракция длинных волн плоским диском, отверстием в плоском экране и препятствием произвольной формы (647). — § 301. Решение уравнения звука в сферических функциях. Условия на фронте волны (654). — § 302. Звуковые волны в двух измерениях. Эффект перемещающегося источника; сравнение с одномерным и трехмерным случаем (657). — § 303, 304. Простые гармонические колебания; решение в функциях Бесселя. Колебание цилиндра. Рассеивание волн цилиндрическим препятствием (660). — § 305. Приближенная теория диффракции длинных волн в двух измерениях. Диффракция острой кромкой и щелью в тонком экране (665). — § 306, 307. Отражение и передача звуковых волн решеткой (669). — § 308. Диффракция полуплоскостью (674). — § 309, 310. Вертикальное распространение волн в атмосфере; конвективный и изотермический закон (678). — § 311, 311a, 312. Теории длинных атмосферных волн (685). — § 313. Общее уравнение колебаний газа под действием постоянной силы (695). — § 314, 315. Колебание атмосферы в невращающемся шаре (698). — § 316. Атмосферные приливы во вращающемся шаре. Резонанс (699).

Глава XI

Вязкость

- § 317, 318. Теория диссипативных сил. Одна степень свободы; свободные и вынужденные колебания. Влияние трения на фазу колебаний (703). — § 319. Приложение к приливам в экваториальном канале; запаздывание приливов и приливы, относящиеся к трению (707). — § 320. Уравнения общей диссипативной системы; члены, зависящие от трения и вращения (710). — § 321. Колебание диссипативной системы около положения абсолютного равновесия (711). — § 322. Влияние гиростатических членов. Пример для двух степеней свободы; возмущающие силы длинного периода (713). — § 323—325. Вязкость жидкости; особенность напряжений; формулы преобразования (716). — § 326, 327. Напряжения как линейные функции скорости деформации. Коэффициент вязкости. Граничные условия; вопрос о скольжении (718). — § 328, 328a. Динамические уравнения. Уравнения Гельмгольца; диффузия вихря (722). — § 329. Рассеивание энергии в вязкой жидкости (725). — § 330, 330a. Течение жидкости между двумя

параллельными плоскостями. Эксперименты Хеле-Шоу. Теория смазки; пример (728). — § 331, 332. Течение в трубе круглого сечения. Закон Пуазейля; вопрос скольжения. Другие формы сечений (732). — § 333, 334. Случай установившегося движения. Практические ограничения (736). — § 334a. Примеры неустановившегося движения. Диффузия вихря. Влияние поверхностных сил на глубину воды (739). — § 335, 336. Медленное установившееся движение; общее решение в сферических функциях; формулы для напряжений (744). — § 337. Прямолинейное движение шара; сопротивление; ограничение скорости; линии тока. Случай жидкого шара и твердого со скольжением (748). — § 338. Метод Стокса; решение для функции тока (755). — § 339. Установившееся движение эллипсоида (758). — § 340, 341. Установившееся движение в поле постоянных сил (760). — § 342. Установившееся движение сферы; критика Озина и решение уравнений (764). — § 343, 343a. Установившиеся движения цилиндра; изучение методом Озина. Приложение к другим вопросам (772). — § 344. Рассеивание энергии в установившемся движении. Теоремы Гельмгольца и Кортвега. Обобщение Рэлея. (776). — § 345—347. Задачи периодического движения. Ламинарное движение; диффузия вихря. Колебания пластины. Периодические приливные силы; слабое влияние вязкости в быстром движении (779). — § 348—351. Эффект вязкости на волны в воде. Создание волн ветром. Успокаивающее действие масла на волны (784). — § 352, 353. Периодическое движение со сферическими границами; общее решение в сферических функциях (796). — § 354. Приложения; ослабление движения в сферическом сосуде, крутильные колебания сферы, наполненной жидкостью (802). — § 355. Влияние вязкости на колебания жидкого шара (805). — § 356. Влияние на вращательные колебания сферы и на колебания маятника (808). — § 357. Замечания к задачам в двух измерениях (811). — § 358. Вязкость газов; диссипативная функция (813). — § 359, 360. Уменьшение плоских звуковых волн от вязкости; сочетание вязкости с теплопроводностью (815). — § 360a. Волны постоянного вида, вызванные вязкостью (819). — § 360b. Поглощение звука пористыми стенками (821). — § 361. Эффект вязкости на расхождение волн (824). — § 362, 363. Влияние на рассеивание волн сферической неподвижной или свободной поверхности (829). — § 364. Затухание звуковых волн в сферическом сосуде (835). — § 365, 366. Турбулентное движение. Эксперименты Рейнольдса; критическая скорость воды в трубе; закон сопротивления. Вывод из теории размерности (837). — § 366a. Движение между двумя вращающимися цилиндрами (842). — § 366b. Коэффициент турбулентности; завихренность или молярная вязкость (843). — § 366c. Атмосферная турбулентность; изменение ветра с высотой (845). — § 367, 368. Теоретические исследования Рэлея и Кельвина (846). — § 369. Статистический метод Рейнольдса (852). — § 370. Сопротивление жидкости. Критика разрывных решений Кирхгофа и Рэлея (858). — § 370a. Формула Кармана для сопротивления (859). — § 370b. Поток с циркуляцией (861). — § 371. Формулы размерности. Соотношения между моделью и натурой (862). — § 371a, b, c. Пограничный слой. Замечания к теории крыла (864). — § 371d, e, f, g. Влияние сжимаемости. Недостаточность линий тока в потоке с большими скоростями (873).

Глава XII

Вращающиеся массы жидкости

- § 372. Формы относительного равновесия. Общие теоремы (880). — § 373. Формулы, относящиеся к притяжению эллипсоидами. Потенциальная энергия эллипсоидальных масс (884). — § 374. Эллипсоид Маклорена. Соотношения между эксцентриситетом, угловой скоростью

и моментом количества движения; числовые таблицы (887). — § 375. Эллипсоид Якоби. Вычисление формы эллипсоида равновесия с помощью рядов. Числовые результаты (890). — § 376. Другие формы относительного равновесия. Вращающееся кольцо (893). — § 377. Общая задача относительного равновесия; исследование Пуанкаре. Ряды, определяющие формы равновесия; предельные формы и разветвленные формы. Перемена устойчивости (897). — § 378–380. Приложения к вращающимся системам. Вековая устойчивость эллипсоидов Маклорена и Якоби. Равновесие фигуры грушевидной формы (900). — § 381. Малые колебания масс вращающихся эллипсоидов. Метод Пуанкаре. Ссылка (904). — § 382. Исследование Дирихле, конечные гравитационные колебания жидкого эллипсоида при отсутствии вращения. Колебания вращающегося эллипсоида вращения (907). — § 383. Эллипсоид Дедекинда. Невращающийся эллипсоид. Вращающийся эллиптический цилиндр (910). — § 384. Свободные и вынужденные колебания вращающегося эллипсоида, наполненного жидкостью. Прецессия (913). — § 385. Прецессия жидкого эллипсоида (918).

Именной указатель	922
Предметный указатель	925

ГЛАВА ПЕРВАЯ

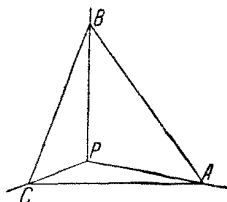
УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

§ 1. Все исследования этой книги основываются на предположении, что изучаемое вещество можно рассматривать практически непрерывным и однородным, т. е. что свойства наименьших частей, на которые мы можем мыслить вещество разделенным, являются такими же, как и свойства всей массы.

Основное свойство жидкости состоит в следующем: в напряженном состоянии жидкость не может быть в равновесии, если силы, действующие между двумя смежными частями жидкости, расположены наклонно к их общей поверхности. Гидростатика основывается на этом свойстве жидкости, и последнее подтверждается полным согласием между теорией и опытом. Однако непосредственное наблюдение показывает, что в движущихся жидкостях могут иметь место косо направленные напряжения. Пусть, например, сосуд, имеющий форму круглого цилиндра и содержащий воду (или другую жидкость), вращается около своей оси, направленной вертикально. Если угловая скорость сосуда постоянна, то мы очень скоро увидим, что жидкость с сосудом вращаются как одно твердое тело. Если затем привести сосуд в состояние покоя, то движение жидкости еще будет продолжаться некоторое время, становясь постепенно все более медленным, и, наконец, прекратится; мы увидим, что в течение этого процесса частицы жидкости, которые более удалены от оси, будут отставать от частиц, находящихся ближе к оси, и скорее потеряют свое движение. Это явление указывает на то, что между смежными частями жидкости возникают силы, одна из компонент которых направлена тангенциально к их общей поверхности. В самом деле, если бы силы взаимодействия между частицами жидкости были направлены нормально к их общей поверхности, то ясно, что момент количества движения относительно оси сосуда каждой части жидкости, ограниченной поверхностью вращения около этой оси, был бы постоянен. Далее мы заключаем, что тангенциальные силы отсутствуют, пока жидкость движется как твердое тело; они появляются только тогда, когда имеет место изменение формы частиц жидкости и эти силы направлены так, что они стремятся помешать изменению формы.

§ 2. Однако принято сначала совершенно опускать из рассмотрения тангенциальные напряжения. Их действие во многих практических случаях очень мало и, независимо от этого, целесообразно расчленив довольно значительные трудности нашей задачи путем рассмотрения сначала лишь действий одних нормальных напряжений. В соответствии с этим дальнейшие исследования тангенциальных напряжений мы откладываем до XI главы.

Если напряжение, приложенное к какому-нибудь элементу поверхности, проходящему через точку P жидкости, направлено нормально к этому элементу, то величина этого напряжения (на единицу площади) не зависит от направления этого элемента поверхности. Докажем эту теорему сейчас, чтобы потом иметь возможность на нее ссылаться. Проведем через точку P три взаимно перпендикулярные прямые PA , PB , PC ; пусть плоскость, лежащая бесконечно близко к точке P и имеющая с указанными



Фиг. 1.

прямыми направляющие косинусы l , m , n , пересекает эти прямые в точках A , B , C . Пусть будут p , p_1 , p_2 , p_3 напряжения ¹⁾ для граней ABC , PBC , PCA , PAB тетраэдра $PABC$. Если мы обозначим площадь первого треугольника через Δ , то площади остальных треугольников будут соответственно равны $l\Delta$, $m\Delta$, $n\Delta$. Отсюда, составляя уравнение движения тетраэдра параллельно PA , получим

$$p_1 \cdot l\Delta = pl \cdot \Delta;$$

мы пренебрегли здесь как членами, представляющими изменение количества движения, так и компонентами внешних сил, так как эти величины пропорциональны массе тетраэдра и потому являются бесконечно малыми третьего порядка, тогда как оставленные нами члены суть второго порядка малости. Отсюда следует, что $p = p_1$ и аналогично $p = p_2 = p_3$, что и доказывает нашу теорему.

§ 3. Уравнения движения жидкости можно представить в двух различных формах соответственно двум способам, которые можно предложить при исследовании движения жидкой массы под действием данных сил и при определенных граничных условиях. Именно, или мы можем сделать предметом нашего исследования определение для любого момента времени скорости, давления и плотности во всех точках пространства, наполненного жидкостью, или же мы можем стремиться определить историю каждой отдельной жидкой частицы. Уравнения, которые получаются этими двумя способами, называются

¹⁾ Напряжения считаются положительными в случае давления и отрицательными, если имеет место растяжение. Однако большинство жидкостей при обыкновенных условиях может испытывать только очень малое растяжение, так что p почти всегда положительно.