

Г. И. Запорожец

**Руководство к решению задач
по математическому анализу**

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 50
ББК 22
Г11

Г11 **Г. И. Запорожец**
Руководство к решению задач по математическому анализу / Г. И. Запорожец –
М.: Книга по Требованию, 2013. – 456 с.

ISBN 978-5-458-28753-1

«Руководство» предназначено для студентов высших технических учебных заведений и особенно для тех, кто самостоятельно, без повседневной квалифицированной помощи преподавателя, изучает математический анализ и желает приобрести необходимые навыки в решении задач. В начале каждого раздела помещены определения, теоремы, формулы и другие краткие сведения по теории и методические указания, необходимые для решения последующих задач; затем приводятся подробные примерные решения типичных задач с краткими пояснениями теоретических положений; в конце каждого раздела содержится достаточное количество методически подобранных задач для самостоятельного решения с ответами к ним и необходимыми разъяснениями. Содержание этого пособия соответствует программе по математическому анализу для машиностроительных, приборостроительных, механических, энергетических и строительных специальностей. Это пособие вполне пригодно также и для студентов технологических специальностей, которые могут опустить те разделы и задачи, которые не входят в их программу по курсу математического анализа. Задачи, отмеченные звездочкой, не входят в обязательный минимум, необходимый для усвоения курса. Они предназначены для студентов, желающих глубже изучить предмет, но не превышают требований программы. Автор просит извинить недостаточно подробное разъяснение некоторых вопросов и надеется, что будет иметь возможность устранить этот недостаток в следующем издании.

ISBN 978-5-458-28753-1

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2013

© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2013

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.



Серия Книжный Ренессанс

www.samizday.ru/reprint

§ 5. Масса, центр тяжести и моменты инерции	281
§ 6. Тройной интеграл, его вычисление трехкратным интегрированием	286
§ 7. Вычисление величин посредством тройного интеграла	293
§ 8. Криволинейные интегралы, их вычисление и условие независимости от линии интегрирования	301
§ 9. Вычисление величин посредством криволинейных интегралов	307
§ 10. Нахождение функции по ее полному дифференциалу	311
§ 11. Интегралы по поверхности, их вычисление сведением к двойным интегралам	313
§ 12. Вычисление величин посредством поверхностных интегралов	322
Глава VIII. Элементы теории поля	328
§ 1. Скалярное поле. Производная по направлению. Градиент	328
§ 2. Векторное поле. Поток и дивергенция поля	333
§ 3. Циркуляция и вихрь векторного поля	338
Глава IX. Ряды	342
§ 1. Числовые ряды сходящиеся и расходящиеся. Необходимый признак сходимости ряда. Достаточные признаки сходимости рядов с положительными членами	342
§ 2. Абсолютная и неабсолютная сходимость знакопеременного ряда. Признак сходимости знакопеременного ряда	347
§ 3. Функциональные ряды	350
§ 4. Ряды Тейлора	354
§ 5. Действия со степенными рядами. Применение рядов к приближенным вычислениям	358
§ 6. Числовые и степенные ряды с комплексными членами	365
§ 7. Ряды Фурье	369
§ 8. Интеграл Фурье	382
Глава X. Дифференциальные уравнения	386
§ 1. Дифференциальные уравнения, их порядок, общий и частные интегралы	386
§ 2. Уравнения с разделяющимися переменными	389
§ 3. Однородные уравнения первого порядка	391
§ 4. Линейные уравнения первого порядка и уравнения Бернулли	393
§ 5. Уравнения в полных дифференциалах	396
§ 6. Уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка	397
§ 7. Линейные однородные уравнения высших порядков с постоянными коэффициентами	400
§ 8. Линейные неоднородные уравнения высших порядков с постоянными коэффициентами	403
§ 9. Смешанные задачи на интегрирование уравнений разных типов	411
§ 10. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям	411
§ 11. Метод Эйлера приближенного интегрирования уравнений первого порядка	425
§ 12. Интегрирование уравнений при помощи рядов	427
§ 13. Системы линейных дифференциальных уравнений	431
§ 14. Уравнения математической физики	435
Ответы	443

ПРЕДИСЛОВИЕ

«Руководство» предназначено для студентов высших технических учебных заведений и особенно для тех, кто самостоятельно, без повседневной квалифицированной помощи преподавателя, изучает математический анализ и желает приобрести необходимые навыки в решении задач.

В начале каждого раздела помещены определения, теоремы, формулы и другие краткие сведения по теории и методические указания, необходимые для решения последующих задач; затем приводятся подробные примерные решения типичных задач с краткими пояснениями теоретических положений; в конце каждого раздела содержится достаточное количество методически подобранных задач для самостоятельного решения с ответами к ним и необходимыми разъяснениями.

Содержание этого пособия соответствует программе по математическому анализу для машиностроительных, приборостроительных, механических, энергетических и строительных специальностей. Это пособие вполне пригодно также и для студентов технологических специальностей, которые могут опустить те разделы и задачи, которые не входят в их программу по курсу математического анализа.

Задачи, отмеченные звездочкой, не входят в обязательный минимум, необходимый для усвоения курса. Они предназначены для студентов, желающих глубже изучить предмет, но не превышают требований программы.

Автор просит извинить недостаточно подробное разъяснение некоторых вопросов и надеется, что будет иметь возможность устранить этот недостаток в следующем издании.

ГЛАВА I

ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

Предметом математического анализа является изучение переменных величин и зависимостей между ними.

Понятия о функции и о пределе переменной величины составляют основу математического анализа.

§ 1. Переменные величины и функции, их обозначение

Интервалом от a до b называется совокупность всех чисел x , удовлетворяющих одному из следующих двойных неравенств:

1) $a \leq x \leq b$; 2) $a < x < b$; 3) $a \leq x < b$; 4) $a < x \leq b$.

Закрытый интервал 1 называется отрезком и обозначается $[a, b]$; открытый интервал 2 обозначается (a, b) ; полуоткрытые интервалы 3 и 4 обозначаются соответственно $[a, b)$ и $(a, b]$.

Переменной называется величина, принимающая различные числовые значения.

Областью изменения переменной называется совокупность всех принимаемых ею числовых значений. Она может состоять из одного или нескольких интервалов и из отдельных точек.

Взаимосвязанное изменение переменных называется функциональной зависимостью.

При изучении функциональной зависимости между двумя переменными полагают, что одна из них является независимой переменной, которой можно придавать произвольные значения из области ее изменения, а другая — зависимой от нее. Независимая переменная называется аргументом, а зависимая — функцией.

Н. И. Лобачевскому принадлежит следующее определение понятия функции: *переменная y называется функцией переменной x , если каждому значению x , из области ее изменения, соответствует определенное значение y .*

Для сокращения записей употребляется символическое обозначение функций: $y = f(x)$, $S = \varphi(t)$, $u = F(v)$, ...

Если функция от x обозначена символом $P(x)$, то $P(a)$ обозначает частное значение этой функции при $x = a$.

Так, если $P(x) = x^2 + 2x - 5$, то

$$P(3) = 3^2 + 2 \cdot 3 - 5 = 10; P(0) = -5; P(a) = a^2 + 2a - 5.$$

Основными элементарными функциями называются: 1) степенная функция $y = x^n$; 2) показательная функция $y = a^x$, $a > 0$; 3) логарифмическая функция $y = \log_a x$, $a > 0$; 4) тригонометрические функции $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$, $y = \sec x$, $y = \operatorname{cosec} x$; 5) обратные тригонометрические функции $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arccotg} x$.

Функции, заданные одной формулой посредством конечного числа арифметических действий и операций, определяемых основными элементарными функциями, называются элементарными. Например:

$$y = 5x^3 \sin 2x; y = \lg \frac{1 + \operatorname{tg} \sqrt{x}}{x - \operatorname{ctg}^2 x}.$$

Все остальные функции называются неэлементарными. Например, неэлементарной является функция, определяемая несколькими различными формулами для различных интервалов изменения аргумента:

$$y = \begin{cases} x^3 & \text{при } x \leq 0 \\ x + 2 & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

Функция $f(x)$, обладающая свойством $f(x) = f(-x)$, называется *четной*, например x^2 , $\cos x$, а обладающая свойством $f(x) = -f(-x)$, называется *нечетной*, например x^3 , $\sin x$. Многие функции не являются ни четными, ни нечетными, например a^x , $\sqrt{x}$.

1. Определить и построить на числовой оси области изменения переменных x , t и α , заданные следующими неравенствами:

$$1) x^2 \leq 4; 2) |t - 2| > 3; 3) -9 \leq 1 - 2\alpha < 5.$$

Решение. 1) Извлекая квадратный корень из обеих частей первого неравенства, получим $|x| \leq 2$. Отсюда следует, что $-2 \leq x \leq 2$. Эти неравенства и определяют собой область изменения переменной x , т. е. совокупность принимаемых ею числовых значений. Она представляет закрытый интервал или отрезок $[-2; 2]$. Построим этот отрезок на числовой оси Ox (черт. 1); он будет симметричен относительно начальной точки $x = 0$.



Черт. 1



Черт. 2

2) Избавляясь от знака абсолютной величины в неравенстве, содержащем t , получим два неравенства: $t-2 < -3$ и $t-2 > 3$. Разрешая их относительно t , найдем $t < -1$ и $t > 5$. Следовательно, область изменения переменной t (черт. 2) состоит из двух бесконечных открытых интервалов $(-\infty; -1)$ и $(5; +\infty)$.

3) Решаем неравенства, содержащие α . Вычитая из всех частей неравенств по единице и затем деля их на -2 , получим

$$-10 \leq -2\alpha < 4, \quad -2 < \alpha \leq 5.$$

Следовательно, область изменения переменной α (черт. 3) представляет полуоткрытый интервал $(-2; 5]$.

2. Вычислить частное значение функции:



Черт. 3

1) $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 4}$

а) при $x=0$; б) при $x=a+1$;

2) $\varphi(x) = 2 \arcsin x + \arctg 2x$ при $x = -\frac{1}{2}$;

3) $y = x^2 \arccos \frac{x}{2} - 3x \operatorname{arctg} x$ при $x = -1$.

Решение. 1а) Подставляя значение $x=0$, получим соответствующее частное значение функции $f(x)$:

$$f(0) = \sqrt{0^2 - 5 \cdot 0 + 4} = \sqrt{4} = 2.$$

Здесь взято арифметическое значение корня, а не ± 2 . Вообще в математическом анализе рассматриваются только однозначные функции, которые могут иметь только одно значение при каждом значении аргумента.

1б) При $x=a+1$ частное значение функции $f(x)$ будет

$$f(a+1) = \sqrt{(a+1)^2 - 5(a+1) + 4} = \sqrt{a^2 - 3a}.$$

2) Частное значение функции $\varphi(x)$ при $x = -\frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} \varphi\left(-\frac{1}{2}\right) &= 2 \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + \arctg(-1) = 2\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \\ &+ \left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{7}{12}\pi. \end{aligned}$$

Здесь учтено, что $\arcsin x$ и $\arctg x$ — однозначные функции, изменяющиеся между $-\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2}$. При $x > 0$ их значения берутся в первой четверти, а при $x < 0$ — в четвертой.

* $-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin x \leq \frac{\pi}{2}$; $-\frac{\pi}{2} < \arctg x < \frac{\pi}{2}$.

3) При $x = -1$ частное значение функции y будет

$$y(-1) = (-1)^2 \operatorname{arccos} \left(-\frac{1}{2} \right) - 3(-1) \operatorname{arcsctg}(-1) = \\ = \frac{2}{3}\pi + \frac{9}{4}\pi = \frac{35}{12}\pi,$$

так как $\operatorname{arccos} x$ и $\operatorname{arcsctg} x$ — однозначные функции, изменяющиеся от 0 до π^* . При $x > 0$ их значения берутся в первой четверти, а при $x < 0$ — во второй.

3. Найти корни x_1 и x_2 функции $F(x) = x^2 + 10x + 9$ и вычислить ее частные значения при x , равном среднему арифметическому и среднему геометрическому этих корней.

Решение. Корнями функции называются значения аргумента, которые обращают ее в нуль.

Определим корни функции $F(x)$, приравняв ее нулю:

$$x^2 + 10x + 9 = 0, \text{ откуда } x_1 = -9, x_2 = -1.$$

Среднее арифметическое корней x_1 и x_2 равно их полусумме $\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-9 - 1}{2} = -5$, а среднее геометрическое — квадратному корню из их произведения $\sqrt{x_1 x_2} = \sqrt{9} = 3$. Искомые частные значения функции $F(x)$ будут:

$$F(-5) = (-5)^2 + 10(-5) + 9 = -16;$$

$$F(3) = 3^2 + 10 \cdot 3 + 9 = 48.$$

4. Дана функция $P(x) = x^2 - 2x + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}$. Показать, что $P\left(\frac{1}{x}\right) = P(x)$.

Решение. Найдем $P\left(\frac{1}{x}\right)$, подставляя $\frac{1}{x}$ вместо x в данное аналитическое выражение функции $P(x)$,

$$P\left(\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{1}{x}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)^2} - \frac{2}{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} + x^2 - 2x.$$

Следовательно, $P\left(\frac{1}{x}\right) = P(x)$ при любом значении x . Например,

$$P\left(\frac{1}{2}\right) = P(2) = -\frac{3}{4}; \quad P(-10) = P(-0,1) = 120,21.$$

* $0 \leq \operatorname{arccos} x \leq \pi; \quad 0 < \operatorname{arcsctg} x < \pi$

5. Определить, какая из данных функций является четной, нечетной или не четной и не нечетной:

$$1) f(x) = \frac{x^2}{\sin 2x}; \quad 2) \varphi(x) = 4 - 2x^4 + \sin^2 x;$$

$$3) u(x) = x^3 + 2x - 1; \quad 4) y(x) = \frac{1 + a^{kx}}{1 - a^{kx}}.$$

Решение. Чтобы определить, будет ли некоторая функция $Q(x)$ четной или нечетной, необходимо найти $Q(-x)$.

Заменяя x через $-x$, получим:

$$1) f(-x) = \frac{(-x)^2}{\sin 2(-x)} = \frac{x^2}{-\sin 2x} = -\frac{x^2}{\sin 2x},$$

т. е. $f(-x) = -f(x)$, значит, функция $f(x)$ нечетная;

$$2) \varphi(-x) = 4 - 2(-x)^4 + \sin^2(-x) = 4 - 2x^4 + \sin^2 x,$$

т. е. $\varphi(-x) = \varphi(x)$, следовательно, функция $\varphi(x)$ четная;

$$3) u(-x) = (-x)^3 + 2(-x) - 1 = -x^3 - 2x - 1,$$

здесь $u(-x) \neq u(x)$ и $u(-x) \neq -u(x)$, поэтому функция $u(x)$ не четная и не нечетная;

$$4) y(-x) = \frac{1 + a^{-kx}}{1 - a^{-kx}} = \frac{a^{kx} + 1}{a^{kx} - 1}$$

(числитель и знаменатель первой дроби умножены на a^{kx}), т. е. $y(-x) = -y(x)$, следовательно, функция $y(x)$ нечетная.

6. Построить на числовой оси области изменения переменных, заданные следующими неравенствами:

$$1) |x| < 4; \quad 2) (y-1)^2 \geq 9; \quad 3) -3 < z+1 \leq 4; \quad 4) 2|x|+3 > 5.$$

$$7. f(x) = x^2 + 3x - 1; \text{ вычислить: } f(0), f(2), f(-1), f(a+1), f(a)+1, f(a^2), [f(a)]^2.$$

$$8. F(x) = \frac{3x+4}{x^2+1}; \text{ найти } F(0), F(2), F\left(\frac{a}{2}\right), F\left(\frac{1}{x}\right), \frac{1}{F(x)}, F(b)-F(1)+7F(-1).$$

$$9. \varphi(t) = t^2; \text{ найти: } 1) \frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{b-a}; \quad 2) \frac{\varphi(a+h)-\varphi(a-h)}{2h}.$$

$$10. f(x) = x^2, \quad \varphi(x) = x^3; \text{ показать, что } f[\varphi(2)] = \varphi[f(2)]; \varphi[1+f(1)] = 2f[1+\varphi(1)].$$

11. Определить, какая из данных функций четная, нечетная или не четная и не нечетная:

$$1) y = 3x - 2\sqrt[3]{x}; \quad 2) z = 5x \sin 3x; \quad 3) u = |t| - t^3;$$

$$4) v = |x| \operatorname{ctg}^2 x; \quad 5) w = \alpha^2 + |\alpha + 2|; \quad 6) x = \frac{a^{2v} - 1}{a^2}.$$

§ 2. Область определения (существования) функции

Областью определения функции называется совокупность всех точек числовой оси, в которых она имеет определенные действительные значения.

Очевидно, для многих функций областью определения будет не вся числовая ось, а только некоторая ее часть. Так, для функции $y = \sqrt{x}$ областью определения является полуоткрытый интервал $0 \leq x < +\infty$; для функции $z = \frac{1}{x-1}$ область определения состоит из двух интервалов: $-\infty < x < 1$ и $1 < x < +\infty$.

Основные элементарные функции имеют следующие области определения:

степенная функция $y = x^n$ с рациональным положительным показателем $n = \frac{\alpha}{\beta}$ при нечетном β определена на всей числовой оси $-\infty < x < +\infty$, а при четном β определена в интервале $0 \leq x < +\infty$ *;

показательная функция $y = a^x$, $a > 0$ определена на всей числовой оси;

логарифмическая функция $y = \log_a x$, $a > 0$ определена в интервале $0 < x < +\infty$;

тригонометрические функции $y = \sin x$, $y = \cos x$ определены на всей числовой оси; $y = \operatorname{tg} x$, $y = \sec x$ определены на всей числовой оси, исключая точки $x_k = (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$; $y = \operatorname{ctg} x$, $y = \operatorname{cosec} x$ определены на всей числовой оси, исключая точки $x_k = k\pi$;

обратные тригонометрические функции $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$ определены на отрезке $-1 \leq x \leq 1$; $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$ определены на всей числовой оси.

При нахождении области определения элементарной функции, заданной формулой $y = f(x)$, нужно обращать внимание на следующие элементы формулы:

1) на радикалы четной степени — функция будет определена только для тех значений x , при которых их подкоренные выражения будут неотрицательны;

2) на знаменатели дробных выражений — функция будет определена только для тех значений x , при которых знаменатели отличны от нуля;

3) на трансцендентные функции $\log v$, $\operatorname{tg} v$, $\operatorname{ctg} v$, $\sec v$, $\operatorname{cosec} v$, $\arcsin v$, $\arccos v$, которые определены не всюду, а только при указанных выше значениях своего аргумента v .

Если эти перечисленные элементы отсутствуют в формуле $y = f(x)$, то областью определения функции y будет вся число-

* При $\beta = 1$ показатель n будет целым числом.

вая ось (исключая те случаи, когда область определения функции ограничивается специальными условиями задачи).

12. Найти область определения каждой из следующих функций:

$$1) y = \sqrt{1-x^2}; \quad 2) u = \frac{x-1}{x^2-5x+6} + \sqrt[3]{2x+1};$$

$$3) v = \arccos \frac{1-2x}{3}; \quad 4) p = \frac{x}{\sin x}; \quad 5) q = \log_2(x^2-9).$$

Решение. 1) Поскольку аргумент x содержится под радикалом четной степени, то функция y будет иметь вещественные значения только при тех значениях x , при которых подкоренное выражение будет неотрицательно, т. е. $1-x^2 \geq 0$. Решая это неравенство, получим

$$x^2 \leq 1; \quad |x| \leq 1; \quad -1 \leq x \leq 1.$$

Следовательно, область определения функции y есть отрезок $[-1; 1]$.

2) Здесь аргумент x содержится в знаменателе дроби. Поэтому x не может иметь тех значений, которые обращают знаменатель в нуль, так как деление на нуль не имеет смысла. Приравняв знаменатель нулю, найдем эти значения x :

$$x^2 - 5x + 6 = 0; \quad x_1 = 2; \quad x_2 = 3.$$

Второе слагаемое в выражении функции u не накладывает никаких ограничений на значения x , поскольку показатель радикала нечетный. Следовательно, областью определения функции u является вся числовая ось, кроме точек $x=2$ и $x=3$.

3) Функция v будет определена только для тех значений x , для которых $-1 \leq \frac{1-2x}{3} \leq 1$. Решив эти неравенства, получим

$$-\frac{4}{3} \leq -\frac{2}{3}x \leq \frac{2}{3}; \quad -1 \leq x \leq 2.$$

Отрезок $[-1; 2]$ и является областью определения функции v .

4) Найдем значения x , которые обращают знаменатель функции p в нуль: $\sin x = 0$; $x_k = k\pi$; $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

При этих значениях x функция p не имеет никаких значений.

Областью определения функции p является вся числовая ось, кроме точек x_k .

5) Логарифмическая функция q определена только для положительных значений своего аргумента (логарифмируемого выражения), поэтому $x^2 - 9 > 0$.

Решая это неравенство, получим $|x| > 3$, откуда следует, что $-\infty < x < -3$ и $3 < x < +\infty$, т. е. область определения функции q состоит из двух бесконечных интервалов $(-\infty; -3)$ и $(3; +\infty)$.

13. Найти области определения функций и построить их на числовой оси:

- 1) $y = \frac{\sqrt{x-1}}{x^2-4}$;
- 2) $z = \sqrt{1+i} - 2\sqrt[4]{5-i}$;
- 3) $u = \frac{a^2+1}{1+\sqrt{a^2-9}}$;
- 4) $r = \sqrt{\sin \varphi}$;
- 5) $v = \frac{1-\sqrt[3]{x}}{\sqrt{3 \cos 2x}}$;
- 6) $v = \lg(x-1) + \arcsin \frac{x}{2}$.

§ 3. Построение графика функции по точкам

Наглядное графическое изображение функциональной зависимости между двумя переменными x и y можно получить, рассматривая значения этих переменных как координаты точек на плоскости.

Графиком функции, заданной уравнением $y = f(x)$, называется совокупность всех точек плоскости, координаты которых удовлетворяют этому уравнению.

Обычно график функции представляет некоторую плоскую линию.

Построение графика аналитически заданной функции по точкам выполняется в следующем порядке:

1) по данному аналитическому выражению функции составляется таблица соответствующих друг другу значений переменных;

2) выбирается система координат с подходящими единицами масштаба для каждой переменной.

Обычно применяется прямоугольная система координат и одна общая единица масштаба для обеих координатных осей;

3) строятся точки, координатами которых являются соответствующие друг другу значения аргумента и функции, содержащиеся в таблице;

4) полученные точки соединяются плавной линией.

Построенный этим способом график функции будет тем точнее, чем больше значений переменных содержится в таблице, чем больше точек будет нанесено на координатную плоскость.

Построение графика функции упрощается, если она является четной, нечетной или периодической. *График четной функции симметричен относительно оси Oy ; график нечетной функции симметричен относительно начала координат; график периодической функции получается путем повторения части ее графика, соответствующей одному периоду.*

14. Построить графики функций:

- 1) $y = x^2 - 2x - 1$ на отрезке $[-2; 4]$;
- 2) $y = -\frac{4x}{x^2+1}$ на отрезке $[-5; 5]$;
- 3) $y = 7x^2 - 100\sqrt{1+x^2}$ на отрезке $|x| \leq 7$;