И. Ньютон

Математические работы

Серия "Классики естествознания"

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 51
ББК 22.1
И11

И. Ньютон
И11 Математические работы: Серия "Классики естествознания" / И. Ньютон – М.: Книга по Требованию, 2024. – 484 с.

ISBN 978-5-458-50379-2

В настоящей книге собраны математические работы великого английского ученого Исаака Ньютона (1643-1727), в которых разбираются такие вопросы, как анализ с помощью уравнений с бесконечным числом членов, метод флюксий и бесконечных рядов с приложением его к геометрии кривых, квадратура кривых, кривые третьего порядка, метод разностей. В конце книги приводятся отрывки из научной переписки Ньютона с математиками Г. Лейбницем и Дж. Валлисом. Книга будет полезна прежде всего историкам математики, а также студентам и преподавателям математических факультетов вузов и всем, кто интересуется историей науки.

ISBN 978-5-458-50379-2

ИСААК

НЬЮТОН

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ РАБОТЫ

ПЕРЕВОД С ЛАТИНСКОГО
ВВОДНАЯ СТАТЬЯ
И КОММЕНТАРИИ
Д. Д. МОРДУХАЙ-БОЛТОВСКОГО

ОБЪЕДИНЕННОЕ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО НКТП СССР
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1937 ЛЕНИНГРАД

Д. Д. МОРДУХАЙ-БОЛТОВСКОЙ

ВВОДНАЯ СТАТЬЯ

Настоящий перевод Ньютона сделан с латинского издания Кастильона[1] и снабжен мною обширными комментариями. После того как перевод был закончен, я сличил его в некоторых местах с французским и немецким переводами, которыми я располагал, а именно: перевод „Метода флюксий" — с переводом Бюффона[2], „Рассуждение о квадратуре кривых" и „Метод разностей" — с переводами Ковалевского[3].

Из первого тома „Opuscula" издания Кастильона я взял не все: я исключил его введение, затем биографию, недостаточно ярко написанную.

Я нашел также излишним помещать все письма Ньютона и выбрал только те из них, которые непосредственно относятся к математике и по своей конструкции приближаются к типу научной статьи. Таковы знаменитые два письма к Ольденбургу [Opusc. X, XI (III)] и очень важное письмо Валлиса (Opusc. XIII), дающее изложение мыслей Ньютона.

Наиболее значительной из помещенных в настоящей книге работ Ньютона является „Метод флюксий". Определить влияние „Метода флюксий" на развитие математической мысли того времени довольно трудно. Было бы неправильно ставить в тесную от нее зависимость необыкновенно быстрый прогресс анализа бесконечно малых, так как эта работа была опубликована только после смерти Ньютона, когда формальный аппарат диференциального и интегрального исчислений благодаря работам братьев Бернулли уже находился на ступени развития, значительно превышающей те совершенно элементарные операции, которые мы находим в „Методе флюксий" Ньютона. Но, с другой стороны, было бы большой ошибкой совершенно исключить эту работу из числа тех, которые руководили математической мыслью того времени. Прежде всего значительная часть содержания этой работы входит в книги, опубликованные уже во время Ньютона, так что теория флюксий стала известна раньше опубликования „Метода флюксий"; например, книга по теории флюксий Чейна[4] вышла раньше теории флюк-

---

[1] *Isaaci Newtoni*, Opuscula mathematica, philosophica et philologica, t. I, Lausannae et Genevae 1744. (Математике посвящен т. I.)

[2] *Newton*, La méthode des fluxions, 1740, trad. Buffon.

[3] *Newton*, Abhandlung über die Quadratur der Kurven, 1704. Üb. von G. Kowalewski, Leipzig 1908.

[3] *Newton, Cotes, Gauss, Jacobi*. Üb. von G. Kowalewski, Leipzig 1911.

[4] *George Cheyne*, Fluxionum methodus inversa, 1704.

сий самого Ньютона. О флюксиях, далее, можно было узнать из „Математических начал натуральной философии“ и из „Рассуждения о квадратурах“. Затем следует учесть и деятельную переписку Ньютона, которая содержала наиболее существенные элементы теории флюксий, а также то, что его письма не оставались тайной для многих математиков. Наконец, „Метод флюксий“ содержит, кроме формального аппарата анализа, в отношении которого можно действительно считать опубликование запоздавшим, еще богатый комплекс идей, с помощью которых обосновываются операции анализа и которые имели очень важное значение для эволюции основных понятий анализа бесконечно малых, представляя переходную ступень от точки зрения актуально бесконечно малых к точке зрения потенциально бесконечно малых, т. е. к теории пределов.

Последним главным образом и объясняется интерес к этой работе, вызванный во Франции переводом ее, сделанным Бюффоном.

Необходимо сказать несколько слов о судьбе этой работы. Ньютон, написавший ее в промежутке 1664—1671 гг., обнаружил крайнюю нерешительность в отношении ее опубликования. Что лежало в основе этой нерешительности? Сейчас трудно решить этот вопрос. Ньютон сперва намеревался поместить свою работу в исправленной, но не переизданной им „Алгебре“ голландского математика Кинкгуйзена. Много позже Пембертон получил у Ньютона согласие на напечатание „Метода флюксий“. Однако и этого не удалось осуществить. Смерть Ньютона наступила раньше, чем эта работа была опубликована. И все же судьба „Метода флюксий“ оригинальна. Ньютон, прекрасно владея латынью (как бакалавр словесных наук), пишет работу на латинском языке. В то время для знающих латынь было легче писать на латинском языке, так как именно на этом языке, а не на французском или английском, существовала хорошая, вполне фиксированная математическая терминология. Но это верно только для лиц, хорошо знающих латынь. Вышло же так, что рукопись Ньютона попала в руки Кользону, который недостаточно хорошо владел латынью, и хотя мог хорошо переводить с латинского на английский, но затруднялся переводить обратно с английского на латинский. Решив издать ценную работу Ньютона со своими большими комментариями, Кользон освободил себя от трудной работы перевода этих комментариев с английского на латинский и перевел книгу на английский язык.

Следующий издатель „Матода флюксий“ уже располагал не латинской рукописью Ньютона, а только английским переводом. Бюффон сделал перевод на французский язык не с латинского, а с английского языка. Кастильон перевел ее с английского опять на латинский. Однако нет никакого сомнения, что именно этот латинский, а не английский перевод, должен быть взят для перевода на русский язык, так как латинский перевод в некотором отношении является исправлением английского, именно вследствие указанной выше большей определенности и фиксированности латинской математической терминологии.

Главное содержание „Анализа с помощью уравнений с бесконечным числом членов“ входит целиком в „Метод флюксий“. Для историка эта маленькая работа представляет интерес как первоначальная форма, в которой появилась теория флюксий, а также и для изучения хода мысли самого Ньютона. И эта работ, так же как и „Метод флюксий“, не была во-время опубликована. Написав „Метод флюксий“, Ньютон уже не считал нужным опубликовывать эту работу. Издана она была в 1711 г.

* * *

Говоря о математических работах Ньютона, нельзя не коснуться их общего характера.

Как ни велики заслуги Ньютона в чистой математике, но они меньше, чем в прикладной. У Ньютона на первом плане стояло исследование природы, и уже на втором — абстрактная наука. Наибольшей его заслугой в области чистой математики является открытие исчисления бесконечно малых, которое он разделил с Лейбницем.

Было бы неправильно приписывать Ньютону все основные идеи анализа. Конечную величину как сумму бесконечного числа бесконечно малых уже рассматривал Кеплер, а конечная величина как отношение бесконечно малых мыслилась Декартом, Ферма и Паскалем.

Под исчислением бесконечно малых мы должны разуметь не эти основные идеи анализа, которые могут быть использованы без диференцирования и интегрирования, а именно исчисление, технику вычислений, основанную на этих идеях.

Эта могучая техника, позволяющая на клочке бумаги решить, например, архимедову задачу об определении площади сегмента параболы — одну из труднейших задач античной математики, — начинается с момента приведения определения предела суммы бесконечно малых, выражающей площадь, к задаче, обратной диференцированию, или на современном (не ньютоновском) языке, — с момента установления зависимости определенного интеграла

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

от неопределенного интеграла, определяющейся формулой

$$\int_a^b f(x)\,dx = [\omega(x)]_a^b,$$

где

$$\omega(x) = \int f(x)\,dx.$$

Можно сказать, что эта простая идея является центральной и наиболее важной в теории флюксий Ньютона. До него площадь и длину дуги рассматривали только как суммы бесконечно малых (конечно, актуальных).

Суммы эти старались определить, пользуясь искусственными методами суммирования. Ньютон же избегал этого суммирования, заменяя его нахождением первообразной функции, а задача эта в простейших случаях решается просто с помощью таблицы производных простейших функций.

Техника нахождения по флюэнтам флюксий и по флюксиям флюэнт, т. е. диференцирования и интегрирования, представляется у Ньютона в сравнении с эйлеровскими[1] методами очень примитивной. Но тем не менее она представляет большой шаг вперед по сравнению с методом, которым пользовались математики до Ньютона.

[1] *L. Euleri,* Institutiones Calculi Integralis, 1768—1770.

Здесь следует отметить некоторую невязку в его обосновании тех или иных операций и некоторых его идей, в которых частично предвосхищается современное исчисление потенциально бесконечно малых. Производная y по x, которая у Ньютона является отношением флюксий $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$, т. е. скоростей изменения $\dot{y}$ и $\dot{x}$ $\left(\text{по нашему производных } \frac{dy}{dt} \text{ и } \frac{dx}{dt}\right)$, находится заменой в уравнении, связующем y и x, y через $y+\dot{y}o$, x через $x+\dot{x}o$, где o означает момент времени. В уравнении, получаемом после вычитания данного уравнения и после разделения на o, просто вычеркиваются члены, содержащие еще o. Собственно говоря, эти операции вполне аналогичны тем, которые встречаются, скажем, у Ферма, и обоснованы они тем же принципом исчезновения бесконечно малого перед конечным. Но у Ферма нет производной (по Ньютону — флюксии), и поэтому у Ферма нельзя еще видеть диференцирования. Операции Ферма, можно сказать, случайны. Они не выводятся из общих понятий. Только Ньютон определенным образом сознает приводимость основных задач геометрии и механики к задачам о нахождении флюксий (производных) и флюэнт (первообразных) и намечает общую схему дальнейших исследований анализа бесконечно малых.

Проблему интегрирования Ньютон не ставит как проблему интегрирования с помощью элементарных трансцендентных функций, так как их еще нет в современном анализе. Даже логарифм определяется чисто геометрически, и символа его нет среди символов, которыми оперирует анализ. Ньютон и его современники стараются выразить интегралы только алгебраически. У них нет уверенности и в том, что $\int \frac{dx}{x}$ не выражается алгебраически, но, не будучи в состоянии выразить его алгебраически, они, полагая $x=a+y$, выражают его с помощью разложения по степеням y.

Следует отметить, что конструктивная точка зрения вообще чужда Ньютону, чего нельзя сказать о Лейбнице. Первый так же мало интересуется построением интеграла с помощью алгебраических функций, как и решением уравнений в радикалах.

Можно отметить три эпохи, которым отвечают различные точки зрения на анализ. У Ньютона и его современников, для которых чистая математика является орудием вычисления, причем грубого, примитивного, не ставящего вопроса о степени приближения этого вычисления, — выдвигается чисто вычислительная точка зрения и требуется определение разложения, дающего последовательные приближения функции для данного значения переменного. Эта точка зрения у Эйлера заменяется вполне определенно другой, при которой вычисления и вывод сочетаются со сведением более сложных функций к более простым. Это — конструктивная точка зрения. Наконец, в современную эпоху выступает чисто функциональная точка зрения, при которой весь интерес сосредоточивается на общих свойствах функций, определяемых из сходящихся и асимптотических разложений. Ньютон доволен, когда интеграл диференциального уравнения выражен степенным разложением, с помощью которого он его и вычисляет. Эйлер ищет выражения его в конечном виде в элементарных трансцендентных функциях или в квадратурах. Он приготовляет выражение, которое давало бы возможность и вычислить и определить законы чисто числового характера. А Пуанкаре исследует особенные точки интеграла, он интересуется не числовыми законами, но общим характером различных изучаемых объектов и не только метрического, но и топологического рода. Исследуется ли определение площади или просто решается уравнение, определяющее y через x, Ньютон везде пользуется разложением y в ряд по степеням x. Метод разложения, правда, не вполне совпадает со способом неопределенных коэфициентов. Подстановка в

$$f(x, y) = 0 \tag{1}$$

вместо y разложения

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots \tag{2}$$

и приравнивание нулю коэфициентов в результате: $A_0 + A_1x + A_2x^2 + \ldots = 0$ для определения a_0, a_1, a_2, $\ldots$, — можно сказать, вполне соответствует духу Ньютона. В настоящее время все это представляется очень простым. Если уравнение (1) не удовлетворяется разложением вида (2), если нельзя получить a_i так, чтобы $A_i = 0$, то приходится это разложение заменять другим, уже с дробными степенями. Это Ньютон вполне сознает и дает метод определения показателя, т. е. целых чисел μ, ν в разложении

$$y = x^{\frac{\mu}{\nu}} \left(a_0 + a_1^{\frac{1}{\nu}} + a_2^{\frac{2}{\nu}} + \ldots \right), \tag{3}$$

известный под названием параллелограма Ньютона. Каждому математику хорошо знакомо, какую роль сыграл этот параллелограм в теории алгебраических функций (этим мы больше всего обязаны В. Пьюзэ), теории, которая лежит в основе одного из прекраснейших отделов анализа, — теории абелевых интегралов и абелевых функций, связанной с разнообразными и внешне, как будто, совершенно от нее оторванными отделами анализа.

Но ньютонов способ разложения в ряды заключает в себе больше чем одну вычислительную технику. Здесь мы должны видеть наряду с двумя первыми принципами еща третий принцип анализа. Величина конечная мыслится иногда как отношение бесконечно малых, иногда как сумма бесконечно большого числа бесконечно малых. Но ее можно еще мыслить как сумму бесконечного числа убывающих конечных величин, так что только бесконечно удаленные слагаемые будут бесконечно малы. Если нельзя сказать, что Архимед мыслил именно так, то все же его метод исчерпывания в применении к определению площади сегмента параболы выявляет точку зрения, которая по создании алгебраического аппарата должна была привести к бесконечным рядам. Архимед имеет дело с последовательным сложением убывающих по величине площадей некоторых вписываемых в сегменты треугольников. Это сложение дает последовательные приближения и, исходя из него, с помощью апагогического доказательства метода исчерпывания, можно получить точное значение площади. Именно ряды больше всего подводят математическую мысль к потенциально бесконечно малому. Ньютон им еще не овладел вполне, но подошел к нему близко. Разности между величиной, определяемой рядом и суммой членов этого ряда, у него нет, но она готова уже сделаться таким бесконечно малым. И ближе всего к этому Ньютон подходит в своем методе решения уравнений. От грубого приближения $x_1 = a$ для корня уравнения $f(x) = 0$ он идет к лучшим, полагая $x_2 = a + y$ и отбрасывая в уравнении

$$b_0 + b_1 y + b_2 y^2 + \ldots = 0$$

все члены высшего, чем первый, порядка, т. е. члены $b_2 y^2 + b_3 y^3 + \ldots$ Формула Тэйлора, еще неизвестная Ньютону, позволяет представить метод Ньютона в обычной для нас форме.

Я уже говорил, что понятие предела выросло из ньютоновых идей. Конечно, было бы большой ошибкой утверждать, что у Ньютона уже имелось понятие предела в современном смысле. Это понятие возникло в полной своей определенности только в середине XVIII в. Но бесспорно, что у Ньютона есть кое-что, чего нет в философско-математической мысли рационалистов XVII в. В этом отношении он идет дальше Лейбница, у которого понятие предела выступает лишь в чисто метафизическом смысле[1]. Прежде всего у него выступает понятие переменного, хотя и изменяющегося только во времени. Универсальным переменным является, таким образом, время. Еще смутная идея предела и приближающейся к нему переменной в сочетании с актуальной бесконечностью, крепко продолжающей владеть умами этой эпохи, порождают понятие предела, но не в форме Даламбера, а в особой форме, которая у Ньютона подвергается математизации. Некоторый объект, причем вовсе не обязательно величина, изменяется. Конечный результат изменения A достигается в бесконечном во времени процессе. При этом то время, в продолжение которого совершается этот процесс, мыслится как актуально бесконечный промежуток времени. Предел A мыслится достигнутым. A и рассматривается как одна из форм, последняя форма изменяющегося. С этой идеей может быть связано и основное свойство пределов, именно сохранение в пределе тех свойств, которые остаются в наличности при всех изменениях переменной, выраженное Лейбницем еще в метафизической форме: „Если данные известным образом упорядочены, то таким же образом упорядочены и искомые“, что им выводится из его принципа непрерывности: „природа не делает скачков“.

Читатель увидит в „Методе флюксий“, а также в „Рассуждении о квадратурах кривых“ зарождение идеи предела именно в этой чуждой нам форме. Является необыкновенно интересным проследить ее историю вплоть до Даламбера, дающего пределу определение, если не вполне совпадающее, то близкое к тому, которое мы употребляем, так сказать, в первом концентре обучения анализу бесконечно малых.

Ньютон сыграл очень важную роль также в истории арифметизации математики, которая шла вместе с расширением понятия числа. Здесь следует указать на его „Универсальную арифметику“, содержащую много оригинального, но в общем представляющую для того времени нечто в роде больших курсов алгебры настоящего времени.

У Эвклида математическое отношение не есть число. Это один из видов арифметического отношения. Эвклид дает ему определение: „Некая взаимная зависимость

[1] См. мою работу „Генезис и история теории пределов“, „Известия СКГУ“, 1928, 3 (15).