У. Рудин

Основы математического анализа

2-е издание

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 51
ББК 22.1
У11

У. Рудин
У11 Основы математического анализа: 2-е издание / У. Рудин – М.: Книга по Требованию, 2024. – 318 с.

ISBN 978-5-458-28896-5

Книга представляет собой современный курс математического анализа, написанный известным американским учёным. По стилю и содержанию она отличается от имеющихся традиционных курсов. Помимо обычно включаемого материала, книга содержит основы теории метрических пространств, теорию интегрирования дифференциальных форм на поверхностях, теорию интеграла и т.д. В конце каждой главы приводятся удачно подобранные упражнения (общим числом около 200). Среди них есть как простые примеры, иллюстрирующие теорию, так и трудные задачи, существенно дополняющие основной текст книги. Книга У. Рудина может служить учебным пособием для студентов математических и физических факультетов университетов, педагогических институтов и некоторых втузов. Она будет полезна аспирантам и преподавателям этих учебных заведений, а также инженерам, желающим расширить свои знания по математическому анализу.

ISBN 978-5-458-28896-5

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта книга задумана как руководство по курсу анализа, который обычно проходят студенты в конце первого этапа обучения или в первый год второго этапа [1]).

Основное различие между настоящим и первым (вышедшим 10 лет назад) изданием состоит в том, что теперь гораздо более подробно изложена теория функций многих переменных.

Это изменение сделано в ответ на многочисленные пожелания читателей. Глава 9 теперь начинается с рассмотрения некоторых основных понятий, относящихся к векторным пространствам; затем определяются производные отображений как линейные отображения; далее формулируются и доказываются (без использования определителей) теорема об обратной функции и некоторые ее важнейшие следствия; устанавливаются свойства дифференциальных форм (в связи с отображениями пространства); глава заканчивается довольно общим вариантом теоремы Стокса — n-мерным аналогом основной теоремы интегрального исчисления.

В связи с этим мы включили теперь в главы 2 и 4 больше сведений об евклидовых пространствах и о метрических пространствах, чем раньше. Однако эта дополнительная общность не вызывает дополнительных трудностей. Теоремы, изложенные здесь в этой новой постановке, не труднее, чем соответствующие теоремы на прямой или на плоскости.

Остальные главы оставлены без значительных изменений, но многое переписано заново и некоторые детали (как надеется автор) улучшены.

Первая часть главы 1, в которой с помощью сечений в множестве рациональных чисел построены вещественные числа, может быть при первом чтении опущена; если поступить так, то для логического обоснования остальной части книги можно принять за посту-

---

[1]) Различие между студентами первого этапа обучения (undergraduate students) и студентами второго этапа (graduate students) в университетах США соответствует примерно различию между нашими студентами младших курсов и студентами старших курсов, уже избравшими кафедру и имеющими научного руководителя.— *Прим. ред.*

лат теорему Дедекинда. Главы с первой по седьмую следует изучать в том порядке, в каком они написаны, тогда как три последние главы почти не зависят друг от друга.

Число задач возросло, теперь их около 200. Некоторые из них не требуют почти ничего, кроме непосредственного применения результатов, полученных в тексте; другие рассчитаны на изобретательность лучших студентов. Большинство трудных задач снабжено указаниями.

Уолтер Рудин

ГЛАВА 1

СИСТЕМЫ ВЕЩЕСТВЕННЫХ И КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

Введение

Изучение основных понятий анализа (таких, как сходимость, непрерывность, дифференцирование и интегрирование) должно основываться на точно определенном понятии числа. Мы, однако, не будем вступать в обсуждение аксиом, которым подчиняется арифметика целых чисел, а будем исходить из системы рациональных чисел.

Мы предполагаем, что читатель знаком с арифметикой рациональных чисел (т. е. чисел вида n/m, где n и m — целые, $m \neq 0$), и только напомним основные свойства этих чисел. Сумма, разность, произведение и частное любых двух рациональных чисел — рациональное число (деление на нуль исключается); выполняются законы коммутативности

$$p+q=q+p, \qquad pq=qp,$$

законы ассоциативности

$$(p+q)+r=p+(q+r), \qquad (pq)r=p(qr)$$

и закон дистрибутивности

$$(p+q)r=pr+qr;$$

определено отношение $<$, задающее порядок в множестве рациональных чисел. Отношение $<$ обладает тем свойством, что для любых рациональных чисел p и q либо $p=q$, либо $p<q$, либо $q<p$; оно транзитивно, т. е. если $p<q$ и $q<r$, то $p<r$. Кроме того, $p+q>0$ и $pq>0$, если $p>0$ и $q>0$.

Хорошо известно, что система рациональных чисел обладает многими недостатками. Например, не существует рационального числа p, такого, что $p^2=2$ (мы это вскоре докажем). Это делает необходимым введение так называемых «иррациональных чисел», которые часто записываются в виде бесконечных десятичных разложений, причем соответствующие конечные десятичные дроби считаются их приближениями. Так, последовательность

$$1;\ 1{,}4;\ 1{,}41;\ 1{,}414;\ 1{,}4142;\ \ldots$$

«стремится к $\sqrt{2}$». Но до тех пор, пока мы не определили иррациональное число $\sqrt{2}$, остается открытым вопрос: к чему же все-таки стремится эта последовательность?

Главная цель этой главы и состоит в том, чтобы дать необходимое определение.

1.1. Пример. Сначала покажем, что никакое рациональное число p не удовлетворяет уравнению

$$p^2 = 2. \tag{1}$$

Действительно, предположим, что это не так. Тогда существует удовлетворяющее уравнению (1) число $p = m/n$, где m, n — целые, причем хотя бы одно из них нечетно.

Подставляя в уравнение (1), получаем

$$m^2 = 2n^2. \tag{2}$$

Это показывает, что m^2 — четное число. Значит, m четно (если бы m было нечетным, то и m^2 было бы нечетным) и, следовательно, m^2 делится на 4. Поэтому правая часть равенства (2) делится на 4, так что n^2 четно, откуда следует, что и n четно.

Таким образом, предположение о том, что выполнено равенство (1), заставляет нас заключить, что оба числа m, n — четные, вопреки нашему выбору m и n. Значит, равенство (1) невозможно при рациональном p.

Исследуем теперь подробнее эту ситуацию. Пусть A — множество всех положительных рациональных p, таких, что $p^2 < 2$, и пусть множество B состоит из всех положительных рациональных p, таких, что $p^2 > 2$. Мы покажем, что A не содержит наибольшего числа, а B не содержит наименьшего.

Точнее, мы докажем, что для любого p из A можно найти рациональное число q из A, такое, что $p < q$, и для любого p из B мы можем найти рациональное число q из B, такое, что $q < p$.

Пусть p принадлежит A. Тогда $p^2 < 2$. Выберем рациональное h, такое, что

$$0 < h < 1 \quad \text{и} \quad h < \frac{2-p^2}{2p+1}.$$

Положим $q = p + h$. Тогда $q > p$ и

$$q^2 = p^2 + (2p+h)h < p^2 + (2p+1)h < p^2 + (2-p^2) = 2,$$

так что q находится в A. Этим доказана первая часть нашего утверждения.

Предположим теперь, что p принадлежит B. Тогда $p^2 > 2$. Положим

$$q = p - \frac{p^2-2}{2p} = \frac{p}{2} + \frac{1}{p}.$$

Тогда $0 < q < p$ и

$$q^2 = p^2 - (p^2 - 2) + \left(\frac{p^2-2}{2p}\right)^2 > p^2 - (p^2 - 2) = 2,$$

так что q принадлежит B.

1.2. Замечание. Цель приведенного выше рассуждения — показать, что в системе рациональных чисел имеются некоторые пробелы, несмотря на то что между любыми двумя рациональными числами находится третье [ибо $p < (p+q)/2 < q$, если $p < q$]. Сейчас мы опишем предложенный Дедекиндом процесс, который позволяет заполнить эти пробелы и приводит нас к вещественным числам. Чтобы не увеличивать объема книги, мы не везде будем проводить рассуждения во всех деталях. Полное изложение, начинающееся с целых чисел, можно найти в книге Ландау «Основы анализа», где речь идет только об этой числовой системе.

1.3. Обозначения. Если A — множество (элементами которого могут быть числа или любые другие объекты), то запись $x \in A$ означает, что x принадлежит (или является элементом) A. Если x не является элементом A, мы будем писать $x \notin A$.

Множество, не содержащее ни одного элемента, мы будем называть пустым множеством. Если множество содержит хотя бы один элемент, то оно называется непустым.

Дедекиндовы сечения

1.4. Определение. Множество α рациональных чисел называется *сечением*, если

(I) α содержит хотя бы одно рациональное число, но не всякое рациональное число;

(II) для $p \in \alpha$ и $q < p$ (q — рациональное число) имеем $q \in \alpha$;

(III) в α нет наибольшего числа.

В этом разделе мы будем употреблять буквы p, q, r, ... только для обозначения рациональных чисел; сечения будут обозначаться буквами α, β, γ, ... (за исключением случая, о котором говорится в определении 1.7).

1.5. Теорема. *Если $p \in \alpha$ и $q \notin \alpha$, то $p < q$.*

Доказательство. Если $p \in \alpha$ и $q \leqslant p$, то из (II) следует, что $q \in \alpha$.

Принимая во внимание эту теорему, элементы множества α иногда называют нижними числами сечения α, а рациональные числа, не принадлежащие α, называют верхними числами сечения α. Пример 1.1 показывает, что не всегда существует наименьшее верхнее число. Однако для некоторых сечений наименьшее верхнее число действительно существует.

1.6. Теорема. *Пусть r — рациональное число. Пусть множество α состоит из всех рациональных чисел p, таких, что $p < r$. Тогда α — сечение, а r — наименьшее верхнее число сечения α.*

Доказательство. Ясно, что α удовлетворяет условиям (I) и (II) определения 1.4. Что касается (III), то нужно лишь заметить, что для любого $p \in \alpha$ мы имеем

$$p < \frac{p+r}{2} < r,$$

поэтому $(p+r)/2 \in \alpha$.

Далее, $r \notin \alpha$. Поскольку неравенство $p < r$ влечет за собой включение $p \in \alpha$, то r — наименьшее верхнее число сечения α.

1.7. Определение. Сечение, построенное в теореме 1.6, называется *рациональным сечением*. Если мы захотим подчеркнуть, что α есть рациональное сечение, связанное с числом r указанным образом, то будем писать $\alpha = r^*$.

1.8. Определение. Пусть α, β — сечения. Мы будем писать $\alpha = \beta$, если из соотношения $p \in \alpha$ следует соотношение $p \in \beta$, а из $q \in \beta$ следует $q \in \alpha$, т. е. если эти два множества тождественно совпадают. В противном случае мы будем писать $\alpha \neq \beta$.

Замечание. Это определение на первый взгляд кажется излишним. Но равенство не всегда определяется как тождество. Например, если $p = a/b$ и $q = c/d$ — рациональные числа (a, b, c, d — целые), то $p = q$ по определению означает, что $ad = bc$, но не обязательно $a = c$ и $b = d$.

Введем теперь отношение порядка в множестве сечений.

1.9. Определение. Пусть α и β — сечения. Мы пишем $\alpha < \beta$ (или $\beta > \alpha$), если имеется рациональное число p, такое, что $p \in \beta$ и $p \notin \alpha$.

$\alpha \leqslant \beta$ означает, что $\alpha = \beta$ или $\alpha < \beta$.

$\alpha \geqslant \beta$ означает, что $\beta \leqslant \alpha$.

Если $\alpha > 0^*$, то мы будем говорить, что сечение α положительно, если $\alpha \geqslant 0^*$ — мы будем говорить, что оно неотрицательно. Аналогичным образом, если $\alpha < 0^*$, то α отрицательно; оно неположительно, если $\alpha \leqslant 0^*$.

Мы, конечно, будем продолжать пользоваться символом $<$ для рациональных чисел, так что этот символ (временно) будет нести двойную нагрузку. Однако из контекста всегда будет ясно, какой смысл следует ему приписать.

1.10. Теорема. *Пусть α, β — сечения. Тогда либо $\alpha = \beta$, либо $\alpha < \beta$, либо $\beta < \alpha$.*

Доказательство. Определения 1.8 и 1.9 ясно показывают, что если $\alpha=\beta$, то ни одно из двух других отношений не выполнено. Чтобы показать, что отношения $\alpha<\beta$ и $\beta<\alpha$ исключают друг друга, предположим, что оба эти отношения имеют место. Поскольку $\alpha<\beta$, имеется рациональное число p, такое, что

$$p\in\beta, \quad p\notin\alpha.$$

Поскольку $\beta<\alpha$, имеется рациональное число q, такое, что

$$q\in\alpha, \quad q\notin\beta.$$

По теореме 1.5 из того, что $p\in\beta$ и $q\notin\beta$, следует, что $q<p$. Так как неравенства $p<q$ и $q<p$ не могут одновременно выполняться для рациональных чисел, мы пришли к противоречию.

До сих пор мы доказали, что из трех отношений может выполняться самое большее одно. Предположим теперь, что $\alpha\neq\beta$. Тогда два эти множества не совпадают тождественно; это значит, что либо α содержит рациональное p, не содержащееся в β, и в этом случае $\beta<\alpha$, либо β содержит рациональное q, не содержащееся в α, и в этом случае $\alpha<\beta$.

1.11. Теорема. *Пусть α, β, γ — сечения. Если $\alpha<\beta$ и $\beta<\gamma$, то $\alpha<\gamma$.*

Доказательство. Поскольку $\alpha<\beta$, существует рациональное p, такое, что

$$p\in\beta, \quad p\notin\alpha.$$

Поскольку $\beta<\gamma$, существует рациональное q, такое, что

$$q\in\gamma, \quad q\notin\beta.$$

Теперь заметим, что из соотношений $p\in\beta$ и $q\notin\beta$ следует, что $p<q$; последнее вместе с соотношением $p\notin\alpha$ влечет за собой $q\notin\alpha$. Таким образом,

$$q\in\gamma, \quad q\notin\alpha.$$

Это значит, что $\alpha<\gamma$.

Последние две теоремы показывают, что отношение $<$ между сечениями (определение 1.9) действительно обладает теми свойствами, которые обычно связывают с понятием неравенства.

Теперь мы переходим к построению арифметики в множестве сечений.

1.12. Теорема. *Пусть α, β — сечения. Пусть γ — множество всех рациональных чисел r, таких, что $r=p+q$, где $p\in\alpha$, $q\in\beta$. Тогда γ — сечение.*

Доказательство. Мы покажем, что γ удовлетворяет трем условиям определения 1.4.

(I) Ясно, что γ непусто. Пусть $s \notin \alpha$, $t \notin \beta$, s и t — рациональные числа. Тогда $s+t>p+q$ при всех $p \in \alpha$, $q \in \beta$, так что $s+t \notin \gamma$. Значит, γ содержит не все рациональные числа.

(II) Пусть $r \in \gamma$, $s<r$, s — рациональное число. Тогда $r=p+q$ при некоторых $p \in \alpha$, $q \in \beta$. Выберем рациональное t так, что $s=t+q$. Тогда $t<p$, значит, $t \in \alpha$, поэтому $s \in \gamma$.

(III) Предположим, что $r \in \gamma$. Тогда $r=p+q$ при некоторых $p \in \alpha$, $q \in \beta$. Существует рациональное $s>p$, такое, что $s \in \alpha$. Значит, $s+q \in \gamma$ и $s+q>r$, так что r не является наибольшим рациональным числом в γ.

1.13. Определение. Сечение γ, построенное в теореме 1.12, обозначается через $\alpha+\beta$ и называется суммой α и β.

(Замечание, сделанное после определения 1.9, относится также и к символу $+$.)

1.14. Теорема. *Пусть* α, β, γ — *сечения. Тогда*

(a) $\alpha+\beta=\beta+\alpha$;

(b) $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$, *так что скобки можно опускать, не опасаясь двусмысленности*;

(c) $\alpha+0^*=\alpha$.

Доказательство. Для построения $\alpha+\beta$ нужно взять множество всех рациональных чисел вида $p+q$ ($p \in \alpha$, $q \in \beta$). Для построения $\beta+\alpha$ вместо $p+q$ нужно брать $q+p$. В силу закона коммутативности для сложения рациональных чисел, $\alpha+\beta$ и $\beta+\alpha$ — тождественные сечения, и свойство (a) доказано.

Аналогичным образом закон ассоциативности для сложения рациональных чисел влечет за собой равенство (b).

Чтобы доказать (c), выберем $r \in \alpha+0^*$. Тогда $r=p+q$ при некоторых $p \in \alpha$, $q \in 0^*$ (т. е. $q<0$). Значит, $p+q<p$, так что $p+q \in \alpha$ и $r \in \alpha$.

Теперь пусть $r \in \alpha$. Выберем рациональное число $s>r$, такое, что $s \in \alpha$. Положим $q=r-s$. Тогда $q<0$, $q \in 0^*$ и $r=s+q$, так что $r \in \alpha+0^*$.

Таким образом, сечения $\alpha+0^*$ и α совпадают.

1.15. Теорема. *Пусть* α — *сечение, и пусть задано рациональное число* $r>0$. *Тогда существуют рациональные* p, q, *такие, что* $p \in \alpha$, $q \notin \alpha$, q *не является наименьшим из верхних чисел сечения* α *и* $q-p=r$.

Доказательство. Выберем рациональное число $s \in \alpha$. Для $n=0, 1, 2, \ldots$ положим $s_n=s+nr$. Тогда имеется единственное целое m, такое, что $s_m \in \alpha$ и $s_{m+1} \notin \alpha$.

Если s_{m+1} не есть наименьшее из верхних чисел сечения α, то выберем $p = s_m$, $q = s_{m+1}$.

Если s_{m+1} — наименьшее из верхних чисел сечения α, то возьмем

$$p = s_m - \frac{r}{2}, \quad q = s_{m+1} + \frac{r}{2}.$$

1.16. Теорема. *Пусть α — сечение. Тогда существует одно и только одно сечение β, такое, что $\alpha + \beta = 0^*$.*

Доказательство. Сначала мы докажем единственность. Если $\alpha + \beta_1 = \alpha + \beta_2 = 0^*$, то теорема 1.14 показывает, что

$$\beta_2 = 0^* + \beta_2 = (\alpha + \beta_1) + \beta_2 = (\alpha + \beta_2) + \beta_1 = 0^* + \beta_1 = \beta_1.$$

Для доказательства существования обозначим через β множество всех рациональных p, таких, что $-p$ является верхним числом сечения α, но не наименьшим из верхних чисел. Мы должны проверить, что это множество β удовлетворяет трем условиям определения 1.4. Выполнение условия (I) очевидно.

(II) Если $p \in \beta$ и $q < p$ (q — рациональное), то $-p \notin \alpha$ и $-q > -p$, так что $-q$ есть верхнее число сечения α, но не наименьшее. Значит, $q \in \beta$.

(III) Если $p \in \beta$, то $-p$ есть верхнее число сечения α, но не наименьшее, так что имеется рациональное число q, такое, что $-q < -p$ и $-q \notin \alpha$. Положим

$$r = \frac{p+q}{2}.$$

Тогда $-q < -r < -p$, так что $-r$ есть верхнее число сечения α, но не наименьшее. Значит, мы нашли рациональное $r > p$, такое, что $r \in \beta$.

Показав, что β — сечение, мы должны теперь проверить, что $\alpha + \beta = 0^*$.

Предположим, что $p \in \alpha + \beta$. Тогда $p = q + r$ при некоторых $q \in \alpha$, $r \in \beta$. Значит, $-r \notin \alpha$, $-r > q$, $q + r < 0$, и $p \in 0^*$.

Предположим, что $p \in 0^*$. Тогда $p < 0$. По теореме 1.15 имеются рациональные числа $q \in \alpha$, $r \notin \alpha$ (причем r не является наименьшим из верхних чисел сечения α), такие, что $r - q = -p$. Поскольку $-r \in \beta$, мы имеем

$$p = q - r = q + (-r) \in \alpha + \beta.$$

Доказательство закончено.

1.17. Определение. Сечение, построенное в теореме 1.16, обозначается $-\alpha$.

1.18. Теорема. *Для любых сечений α, β, γ, таких, что $\beta < \gamma$, имеем $\alpha + \beta < \alpha + \gamma$. В частности (полагая $\beta = 0^*$), мы имеем $\alpha + \gamma > 0^*$, если $\alpha > 0^*$, $\gamma > 0^*$.*

Доказательство. Согласно определениям 1.9 и 1.13, $\alpha+\beta\leqslant\alpha+\gamma$. Если

$$\alpha+\beta=\alpha+\gamma,$$

то

$$\beta=0^*+\beta=(-\alpha)+(\alpha+\beta)=(-\alpha)+(\alpha+\gamma)=0^*+\gamma=\gamma$$

по теореме 1.14.

1.19. Теорема. *Пусть* α, β — *сечения. Тогда существует одно и только одно сечение* γ, *такое, что* $\alpha+\gamma=\beta$.

Доказательство. Единственность следует из того, что неравенство $\gamma_1\neq\gamma_2$ влечет за собой неравенство $\alpha+\gamma_1\neq\alpha+\gamma_2$ (теорема 1.18).

Положим $\gamma=\beta+(-\alpha)$. По теореме 1.14 мы имеем тогда

$$\alpha+\gamma=\alpha+[\beta+(-\alpha)]=\alpha+[(-\alpha)+\beta]=$$
$$=[\alpha+(-\alpha)]+\beta=0^*+\beta=\beta.$$

1.20. Определение. Сечение γ, построенное в теореме 1.19, обозначается через $\beta-\alpha$, т. е. мы пишем $\beta-\alpha$ вместо $\beta+(-\alpha)$.

1.21. Замечание. Нам совсем не потребуется в этой книге теория групп. Однако читатели, знакомые с понятием группы, могли заметить, что теоремы 1.12, 1.14 и 1.16 означают, что множество сечений есть коммутативная группа относительно сложения, введенного определением 1.13. Сейчас мы определим умножение и покажем, что множество сечений образует поле.

Остановившись подробно на сложении и вычитании, мы совсем кратко и без доказательства рассмотрим умножение и деление. Доказательства теорем, которые мы далее сформулируем, совершенно аналогичны доказательствам теорем о сложении и вычитании, за исключением того, что иногда необходимо рассмотреть несколько случаев в зависимости от знака сомножителей.

1.22. Теорема. *Пусть* α, β — *такие сечения, что* $\alpha\geqslant0^*$, $\beta\geqslant0^*$. *Пусть* γ *состоит из всех отрицательных рациональных чисел и всех рациональных* r, *таких, что* $r=pq$, *где* $p\in\alpha$, $q\in\beta$, $p\geqslant0$, $q\geqslant0$. *Тогда* γ — *сечение*.

1.23. Определение. Сечение, построенное в теореме 1.22, обозначается через $\alpha\beta$ и называется *произведением* сечений α и β.

1.24. Определение. Каждому сечению α сопоставим сечение $|\alpha|$, называемое *абсолютной величиной* α и определяемое следующим образом:

$$|\alpha|=\begin{cases}\alpha, & \text{если } \alpha\geqslant0^*,\\ -\alpha, & \text{если } \alpha<0^*.\end{cases}$$