

Клейбер Макс

Курс проекционного черчения

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 82-3
ББК 84-4
М17

М17 **Макс К.**
Курс проекционного черчения / Клейбер Макс – М.: Книга по Требованию, 2024. – 181 с.

ISBN 978-5-519-89266-7

ISBN 978-5-519-89266-7

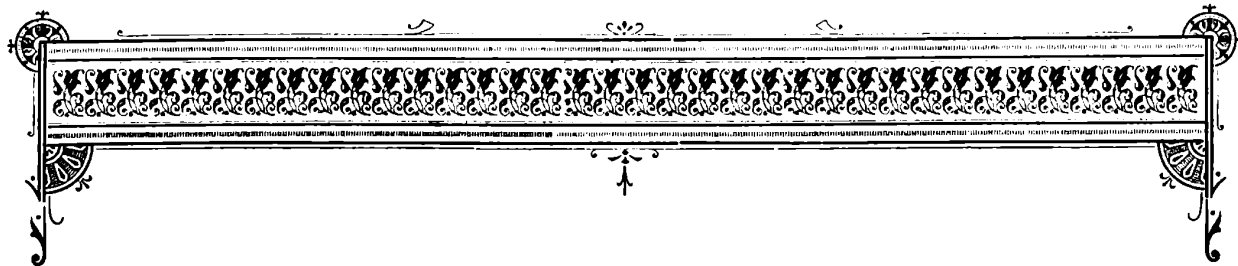
© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2024
© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2024

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первоизданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.



ВВЕДЕНИЕ.

Подъ словомъ «геометрія» разумѣютъ науку, которая занимается изученіемъ свойствъ, измѣреніемъ и изображеніемъ всевозможныхъ тѣлъ правильной и неправильной формы.

Геометрія распадается на двѣ существенныя части: 1) *Планиметрію*, т. е. *геометрію на плоскости*, изучающую фигуры объ двухъ измѣреніяхъ—*длину* и *ширину*, высота которыхъ не существуетъ (это понятие условное), причемъ всѣ эти фигуры принимаются безусловно плоскими и 2) *Стереометрію* или *геометрію въ пространствѣ*, изучающую тѣла дѣйствительно существующія и имѣющія три измѣренія: длину, ширину и высоту.

Задача проекціоннаго черченія заключается въ указаніи способовъ и законовъ изображенія, какъ планиметрическихъ фигуръ, такъ и стереометрическихъ тѣлъ, въ нѣсколькихъ видахъ, дающихъ вполне ясное представленіе не только о формѣ и размѣрахъ этихъ тѣлъ, но также и объ занимаемомъ ими мѣстѣ въ пространствѣ, относительно сосѣднихъ тѣлъ.

Конечно, вычисленіе объемовъ и пространствъ, занимаемыхъ изображенными тѣлами, выходитъ за предѣлы черченія и подлежитъ непосредственно стереометріи.

Важнѣйшія задачи изъ геометріи составляютъ начало нашихъ занятій.

Основная терминологія и общія понятія:

- 1) Тѣломъ называется часть пространства, ограниченная со всѣхъ сторонъ;
- 2) границы тѣла называются поверхностями;
- 3) границы или линіи встрѣчи поверхностей наз. ребрами или линіями;
- 4) Границы линій наз. точками.

Тѣла, поверхности и линіи различаются по своей формѣ, величинѣ и положенію. Точки — только по своему положенію.

Геометрическая точка не имѣетъ никакого измѣренія и обозначаетъ только извѣстное мѣсто въ пространствѣ. Линію можно себѣ представить, какъ слѣдъ отъ поступательнаго движенія точки; все равно будетъ ли точка двигаться въ пространствѣ или на воображаемой плоскости, путь, который она при этомъ описываетъ, даетъ намъ представленіе о линіи.

Поверхность можно себѣ представить, какъ слѣдъ отъ движенія линіи въ пространствѣ если только это движеніе не совпадаетъ съ продолженіемъ послѣдней.

Тѣло можно себѣ представить, только какъ часть замкнутой поверхности пространства. При чемъ поверхности эти могутъ быть въ частности и плоскостями. Такого рода тѣла и будутъ составлять главную отрасль изображенія въ проекціонномъ черченіи.

Общія понятія о линіи, углѣ, плоскости, равенствѣ, подобіи и совпаденіи.

Линія.

§ 1. Линіи различаются и называются:

- 1) по своей формѣ,
- 2) по своему положенію,
- 3) по своему взаимному сочетанію.

а) *прямая линія* или, короче, *прямая*, образуется тогда, когда точка въ продолженіе своего поступательнаго движенія неизмѣнно сохраняетъ первоначальное направленіе (фиг. 1 Таб. А). Прямая есть кратчайшее разстояніе между двумя точками.

Кривая линія или просто *кривая*, образуется, когда точка во время поступательнаго движенія безпрерывно мѣняетъ свое направленіе (фиг. 2 Таб. А). Всѣ дальнѣйшія формы линій можно себѣ представить, какъ сочетаніе прямыхъ и кривыхъ; такъ напр. линія, изображенная на фиг. 3 Таб. А, наз. *ломаной*, на фиг. 4—*смѣшанной*. Прямая линія определенной длины наз. *отрѣзкомъ*, границы ея—крайнія точки—обозначаются обыкновенно двумя буквами.

б) *прямая* вообще называется *отвѣсной* или *вертикальной*, если ея направленіе совпадаетъ съ направленіемъ *отвѣса*; *горизонтальной*—когда ея положеніе совпадаетъ съ уравниемъ открытой поверхности воды. Всякое другое положеніе называется *наклоннымъ*.

в) Двѣ прямыя, которыя во всѣхъ своихъ точкахъ одинаково удалены другъ отъ друга и имѣютъ, слѣдовательно, одинаковое направленіе, наз. *параллельными* линіями, фиг. 5 Таб. А (параллели).

Непараллельныя линіи съ одной стороны сближаются *), а съ другой стороны расходятся; будучи достаточно продолжены, онѣ должны непременно пересѣчься на той сторонѣ, съ которой онѣ сходятся (фиг. 6, табл. А), если только онѣ линіи лежатъ въ одной и той же плоскости. Двѣ прямыя, встрѣчающіяся и пересѣкающіяся въ одной точкѣ, образуютъ уголъ *a* (фиг. 7); стороны послѣдняго всегда находятся въ одной плоскости.

Подъ величиной угла понимаютъ разницу, въ направленіяхъ, которыя имѣютъ двѣ прямыя, лежащія въ одной плоскости; линіи, которыя включаютъ въ себѣ угловое пространство, наз. *сторонами угла*; точка, въ которой онѣ стороны угла пересѣкаются или встрѣчаются, наз. *вершиной*. Уголъ обозначаютъ или одной буквой при вершинѣ, или, если возможны недоразумѣнія, тремя буквами, причемъ

*) Прямыя линіи, которыя встрѣтятся въ очень отдаленной или лежащей въ безконечности точкѣ, также могутъ быть разсматриваемы, какъ параллельныя.

средняя буква всегда обозначает собственно уголъ, напр. уголъ a (фиг. 7, табл. А).

Кривыя линіи бываютъ *правильныя*, когда кривизна ихъ соответствуетъ известному математическому закону и *неправильныя*, которыя никакимъ законамъ не отвѣчаютъ.

Правильныхъ кривыхъ линій существуетъ безконечное множество и важѣйшія изъ нихъ суть слѣдующія: окружность, эллипсъ, парабола, гипербола, винтовая линія и пр. *); изъ нихъ мы вначалѣ будемъ разсматривать только окружность.

§ 2. Окружность получается тогда, когда одна точка движется на плоскости вокругъ другой *срединой точки* (центра), лежащей въ той же плоскости, такимъ образомъ, что разстояніе между ними остается постоянно *одинаковымъ*. Окружность, слѣдовательно, есть плоская, сомкнутая, правильная кривая, которая во всѣхъ частяхъ своихъ имѣетъ одинаковую кривизну. Прямая, проведенная отъ центра къ какой нибудь точкѣ a окружности (фиг. 8, табл. А), назыв. *радіусомъ*; прямая bd , соединяющая двѣ произвольныя точки окружности и не продолженная внѣ ея, называется *хордой*. Каждая изъ частей окружности, лежащихъ по обѣимъ сторонамъ хорды, носитъ названіе *дуги круга*. Хорда ef , проходящая черезъ центръ, называется *діаметромъ круга*; если хорда продолжена внѣ окружности, то она получаетъ названіе *сѣкущей*; сѣкущая, проходящая черезъ центръ, наз. *центральной*. Если сѣкущая отодвигается отъ центра окружности, то обѣ точки ея пересѣченія все болѣе и болѣе сближаются, пока онѣ наконецъ не сольются въ g , въ послѣднемъ случаѣ прямая называется *касательной*. По отношенію къ заключенному въ окружности пространству, та часть площади круга, которая ограничена, напр., дугою ae и двумя радіусами (на чертежѣ фиг. 8 заштрихованная), называется *вырѣзкой* круга или *секторомъ*; та часть, которая ограничена дугою bcd и хордой bd , называется *сегментомъ* (тоже заштрихованъ на фиг. 8, табл. А).

§ 3. Для измѣренія линейныхъ величинъ или длинъ служатъ различныя единицы мѣръ, наиболѣе употребительныя—метръ (m) съ подраздѣленіями: дециметръ (dcm), сантиметръ (cnt), миллиметръ (mm); 1 метръ=10 dcm=100 cnt=1000 mm.

Для измѣренія величины угловъ служатъ дуговые единицы; такая дуговая единица наз. *градусомъ*; обозначеніемъ градуса служитъ маленькій нуль справа, вверху отъ числа; меньшія части градуса: минуты и секунды ($1^\circ=60'$; $1'=60''$).

У г о л ь.

§ 4. Чтобы получить правильное понятіе о разныхъ величинахъ угловъ, представимъ себѣ образованіе ихъ слѣдующимъ способомъ (фиг. 9, табл. А): положимъ, что линія ab неподвижна, между тѣмъ, какъ другая линія ac , одинаковая съ первой по длинѣ и лежащая въ той же плоскости, вращается около точки a , такъ что конецъ ея c описываетъ окружность. Если вначалѣ точка c совпадала съ точкой b , а затѣмъ разошлась съ нею, отходя при поворачиваніи линіи ac вверху, то въ продолженіе этого поворачиванія уголъ между ab и ac все увеличивается, покуда сторона ac опять не сольется съ ab , описавъ полную окружность; вообразимъ себѣ эту окружность раздѣленной на 360 равныхъ частей; каждая такая часть наз. *градусомъ*. Если двѣ прямыя ab , cd такъ пересѣкаются (фиг. 10), что четыре угла вершины z равны между собой, то каждый изъ нихъ $=\frac{360^\circ}{4}=90^\circ$; уголъ въ 90° наз. *прямымъ* и прямыя ab , cd будутъ *перпендикулярныя* другъ къ другу. Каждый уголъ, который меньше прямого, наз. *острымъ*, напр. уголъ ase ; такой уголъ, который больше прямого и меньше 180° , наз. *тупымъ*, напр.,

asf ; если обѣ стороны угла лежать на одной прямой, то уголъ наз. *растянутымъ*; растянутый уголъ равенъ двумъ прямымъ $=2 \times 90^\circ=180^\circ$. Уголъ, большій растянутого, наз. *выпуклымъ*; острые, прямые и тупые углы *вогнуты*; величина угла не зависитъ отъ длины его сторонъ и обуславливается только наклономъ обѣихъ сторонъ другъ къ другу.

§ 5. Если пересѣкаются двѣ произвольной длины прямыя, то плоскость разбивается ими на 4 угла; изъ нихъ каждая пара накрестъ-лежащихъ угловъ a и b или c и d наз. *противолежащими* углами (фиг. 11, табл. А). Противолежащіе углы всегда равны между собою (уголъ $a=b$, уголъ $c=d$). Каждая пара угловъ, лежащихъ по одной и той же сторонѣ прямой, наз. *смежными*, напр., a смежный съ угломъ c или также d ; каждая пара смежныхъ угловъ, взятыхъ вмѣстѣ, равна *двумъ прямымъ*, такъ какъ сумма соответствующихъ имъ дугъ $=180^\circ$; всѣ углы, лежащіе вокругъ вершины, вмѣстѣ заключаютъ въ себѣ четыре прямыхъ угловъ $=360^\circ$.

§ 6. Если двѣ параллельныя линіи пересѣчь третьей, прямой, то вокругъ обѣихъ точекъ пересѣченія образуются восемь угловъ или четыре пары угловъ (фиг. 12, табл. А). Четыре угла, лежащіе внутри параллельныхъ линій, наз. *внутренними*; четыре другіе, лежащіе внѣ параллельныхъ линій, наоборотъ—наз. *внѣшними*. Четыре пары угловъ, которые у точекъ пересѣченія лежатъ другъ противъ друга, наз. *накрестъ-лежащими* углами. Внутренніе накрестъ-лежащіе углы суть: f и c , e и d ; внѣшніе накрестъ-лежащіе углы: g и b , h и a ; они не имѣютъ общей вершины и лежатъ по разнымъ сторонамъ сѣкущей линіи. Углы a и f , c и b , d и h и e называются *смежными накрестъ-лежащими* углами. *Внутренніе односторонніе* углы суть— c и e , f и d ; *внѣшніе односторонніе*— a и g , h и b ; они тоже не имѣютъ общей вершины и лежатъ попарно съ одной стороны сѣкущей прямой. *Соответственные* углы суть— a и e , c и g , b и f , d и h . Они не имѣютъ общей вершины и лежатъ попарно съ одной стороны сѣкущей прямой. Каждые два накрестъ-лежащіе угла равны между собой; соответственные углы равны между собой. Каждые два внутреннихъ одностороннихъ и каждый два внѣшнихъ одностороннихъ угла, въ суммѣ равняются двумъ прямымъ. Для измѣренія и черченія угловъ различныхъ величинъ служитъ особый инструментъ, такъ называемый *транспортиръ* или *угольникъ*—инструментъ, имѣющій форму полукруглости, сдѣланный изъ металла или рога, на которомъ, какъ видно изъ фигуры 9 1-й таблицы, отмѣчены отдѣльные градусы, числомъ 180° .

Поверхность.

Поверхность есть часть пространства, простирающаяся только въ длину и ширину. Поверхность получается, какъ результатъ поступательнаго движенія линіи въ направленіи отличномъ отъ ея продолженія. Вообще различаютъ поверхности плоскія и кривыя. Поверхность *плоская*, или просто *плоскость*, есть такая, на которой можно уложить прямую линію во всякомъ любомъ направленіи; поверхность будетъ *кривая*,—когда на ней прямыя линіи или совершенно не могутъ быть уложены или укладываются только въ извѣстныхъ направленіяхъ (напр., поверхность гиперboloида, конуса или цилиндра). Каждая кривая поверхность, разсматриваемая съ углубленной стороны, называется *вогнутой*, а съ обратной—*выпуклой*. Линіи, ограничивающія поверхность, наз. *сторонами* ея.

Двѣ пересѣкающіяся или примыкающія другъ къ другу поверхности образуютъ *ребро*; плоскія поверхности пересѣкаются всегда по прямой линіи, т.-е. образуютъ *прямолинейное ребро*. Два ребра, если они встрѣчаются въ одной точкѣ, образуютъ *реберный* или *линейный уголъ*. Двѣ пересѣкающіяся или примыкающія поверхности образуютъ

* Четыре первыхъ представляютъ изъ себя плоскія кривыя, послѣдняя—кривую двойной кривизны.

двугранный угол. Часть плоской поверхности (плоскости) со всѣхъ сторонъ ограниченная, наз. *фигурой*. Фигуры бываютъ *прямолинейныя*, *криволинейныя* и *смѣшаннолинейныя* (напр., треугольникъ, четырехугольникъ, кругъ, эллипсъ, сегментъ, секторъ). Различаютъ еще *правильныя* и *неправильныя* фигуры.

Фигура наз. *правильной*, если всѣ ея стороны и углы равны или попарно равны между собой, или когда она ограничена правильной кривою; во всѣхъ остальныхъ случаяхъ она наз. *неправильной*.

Всѣ стороны фигуры, взятая вмѣстѣ, наз. ея *периметромъ*; всѣ углы, сложенные вмѣстѣ, — *суммой угловъ*. Всякая фигура, ограниченная прямыми линіями, имѣетъ столько же угловъ, сколько сторонъ и наоборотъ.

§ 8. Пространство, запятое поверхностью или тѣломъ, будучи выражено цифрами въ какой-нибудь известной единицѣ измѣренія (наприм., квадратномъ сантиметрѣ, кубическомъ метрѣ) называется ихъ *величиной* (площадью, поверхностью, объемомъ).

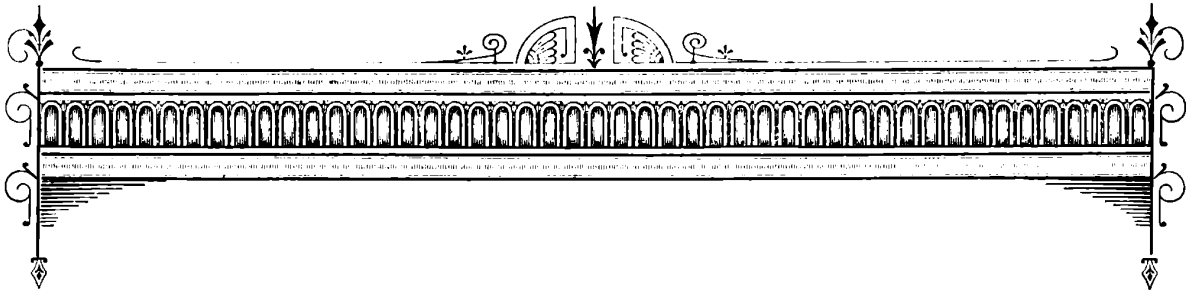
Двѣ фигуры или два тѣла, хотя и различныя по формѣ,

но имѣющія одинаковую величину объема или поверхности, называются *равновеликими*; знакомъ для изображенія равенства служитъ $=$.

Двѣ geometr. фигуры или тѣла, тождественныя по формѣ, но различныя по величинѣ, наз. подобными; такъ, напр., подобны между собой всѣ квадраты, круги, кубы, шары и т. д.; знакомъ для выраженія подобія служатъ $\propto$.

Геометрическія фигуры или тѣла, тождественныя вполне, какъ по своей формѣ, такъ и по величинѣ, называются просто *равными* *) или *совпадающими*; знакомъ совпаденія служитъ $\equiv$ составленное изъ знаковъ $=$ и $\propto$; равными фигурами, напр., будутъ квадраты, съ одинаковой длины сторонами, круги и шары равныхъ радіусовъ. Равныя плоскія фигуры при наложеніи взаимно покрываютъ другъ друга, а потому зачастую носятъ названіе совпадающихъ.

*) Иногда ихъ называютъ: „равныя и тождественныя“, по понятію — *равновеликая фигура*, такъ опредѣленно, что смѣшано съ понятіемъ о *равенствѣ* въ узкомъ значеніи слова, быть не можетъ. *Изд.*



І ЧАСТЬ.

Построенія на плоскости.

Задачи на проведеніе взаимно-перпендикулярныхъ линий, построеніе и дѣленіе угловъ и линий.

Табл. I, фигура I—16.

§ 9. Дана прямая ab (фиг. 1), требуется въ точкѣ c возстановить къ ней перпендикуляръ.

Изъ точки c , какъ изъ центра, произвольно раскрытымъ циркулемъ (произвольнымъ радіусомъ) откладываемъ двѣ равныя величины $c1$, $c2$ и начертимъ изъ 1 и 2 произвольно взятымъ радіусомъ надъ прямой ab двѣ дуги, соединимъ точку ихъ пересѣченія d съ c —тогда полученная линия cd и есть искомый перпендикуляръ къ ab .

Дана прямая ab (фиг. 2 и 3), требуется опустить на нее перпендикуляръ изъ точки c , лежащей выше.

Опишемъ (фиг. 2) изъ произвольно взятой точки 1 на данной прямой радіусомъ $1c$ дугу cbd , равнымъ образомъ изъ другой произвольно взятой точки 2 , радіусомъ $2c$ —дугу cad и соединимъ c и d прямою.

Или, опишемъ изъ данной точки c (фиг. 3) произвольнымъ радіусомъ дугу, которая пересѣкла бы данную прямую ab въ двухъ точкахъ 1 и 2 , опишемъ изъ 1 и 2 равнымъ радіусомъ дуги, пересѣкающіяся въ d и соединимъ c съ d . Въ обоихъ случаяхъ задача дастъ одинъ результатъ: линия cd будетъ искомымъ перпендикуляромъ.

Дана прямая ab (фиг. 4), требуется возстановить къ ней перпендикуляръ въ крайней точкѣ a .

Возьмемъ произвольную точку m , которая по соображенію находилась бы внутри предполагаемаго угла, опишемъ радіусомъ ma полукругъ черезъ точку a , который пересѣчетъ линию ab въ точкѣ 1 ; проведемъ прямую $1m$, которой продолженіе пересѣчетъ полуокружность въ точкѣ 2 , проведемъ изъ a прямую черезъ 2 , тогда полученная линия ac будетъ составлять вмѣстѣ съ ab прямой уголъ, т.-е. будетъ перпендикуляромъ къ ab въ точкѣ a .

Или, опишемъ изъ крайней точки a *) данной прямой ab , какъ изъ центра, произвольнымъ радіусомъ $a1$ дугу $1m$, изъ 1 тѣмъ же радіусомъ опишемъ дугу am и изъ m полуокружность $1a2$; изъ m проведемъ прямую до пересѣченія съ полуокружностью, затѣмъ проведемъ прямую изъ a черезъ 2 , тогда ac будетъ искомымъ перпендикуляромъ къ ab .

§ 10. Дана линия ab (фиг. 5), требуется черезъ точку c провести линию, параллельную линіи ab .

Опишемъ изъ c возможно наибольшимъ радіусомъ cn дугу nd ; равнымъ образомъ опишемъ изъ n тѣмъ же радіусомъ nc дугу se , измѣримъ циркулемъ величину хорды ec и отложимъ длину этой хорды отъ точки n до точки d . Прямая cd , соединяющая точки c и d и будетъ искомой

параллельной. Вторая параллельная fh , черезъ точку f , построена такимъ же способомъ.

§ 11. Требуется раздѣлить данный уголъ abc (фиг. 6) пополамъ.

Опишемъ изъ вершины b произвольнымъ радіусомъ дугу, которая пересѣчетъ стороны угла въ 1 и 2 , опишемъ изъ 1 и 2 въ свою очередь дуги произвольнымъ радіусомъ, онѣ пересѣкутся въ m ; линия, соединяющая b съ m и будетъ равнодѣлящей (биссектрисой) угла, т. к. лежащія по обѣимъ сторонамъ отъ нея углы совпадаютъ при наложеніи.

Требуется раздѣлить уголъ на нечетное число частей, наприм., на 3 (фиг. 7).

Опишемъ точно такимъ же образомъ, какъ на фиг. 6, дугу, возьмемъ на глазомѣръ циркулемъ третью часть дуги и попробуемъ, содержится ли она, какъ хорда, три раза въ дугѣ; въ случаѣ, если взятое на глазомѣръ разстояніе между точками циркуля оказалось бы слишкомъ велико или мало, то надо нѣсколько увеличить или уменьшить разтворъ циркуля и попробовать снова отложить эту величину на дугѣ, и такъ до тѣхъ поръ, пока задача не будетъ рѣшена, такъ сказать, ощущею; найденныя такимъ образомъ точки 2 и 1 соединимъ съ e и тогда получимъ три рядомъ лежащихъ равныхъ угла.

Требуется вычесть уголъ def (фиг. 7) изъ даннаго большаго угла ghi (фиг. 8).

Опишемъ изъ вершинъ обоихъ угловъ дуги равныхъ радіусовъ, отложимъ величину хорды, соответствующей дугѣ (фиг. 7), въ видѣ хорды же на фиг. 8 отъ c до o и проведемъ прямую изъ hk черезъ o ; образованный такимъ образомъ уголъ ghk равенъ разности обоихъ угловъ def (фиг. 7) и ghi (фиг. 8); подобнымъ же образомъ возможно сложить нѣсколько угловъ или увеличить уголъ въ нѣсколько разъ. Во всякомъ случаѣ сумма угловъ при одной точкѣ никогда не можетъ превысить четырехъ прямыхъ, т.-е. 360° .

Требуется построить транспортиръ, или угломеръ (фиг. 9).

Опишемъ на данной прямой, какъ на діаметрѣ, полукругъ и возставимъ затѣмъ изъ центра m перпендикуляръ, такимъ образомъ мы получимъ съ каждой стороны его по прямому углу въ 90° ; опишемъ далѣе тѣмъ же, что и полукругъ, радіусомъ дуги изъ крайнихъ точекъ діаметра и изъ точки пересѣченія перпендикуляра съ полуокружностью; этими дугами полуокружность раздѣлится на 6 равныхъ частей; при соединеніи точекъ дѣленія съ m получатся шесть угловъ, каждый въ 30° ; при дальнѣйшемъ дѣленіи можно получить углы въ 10° каждый и т. д. На фиг. 9 слѣва частью нанесены еще единичные градусы.

Уголъ въ $30^\circ = \frac{1}{3}$, уголъ въ $45^\circ = \frac{1}{2}$ половинѣ, уголъ въ $60^\circ = \frac{2}{3}$ прямого угла.

§ 12. Данную линию ab (фиг. 10) требуется раздѣлить повторнымъ способомъ на четное число равныхъ частей.

Опишемъ изъ крайнихъ точекъ a и b , радіусомъ большимъ

*) См. рядомъ справа расположенную фигуру.

половины линии, дуги, которая непременно пересѣкнется надъ и подъ прямой. Если мы теперь соединимъ обѣ точки пересѣченія прямой, то линия эта раздѣлитъ пополамъ разстояніе ab въ m ; если повторить ту же операцію надъ отрезками am и mb , то мы получимъ изъ всего разстоянія ab четыре равныя части; дальнѣйшимъ дѣленіемъ пополамъ — восемь равныхъ частей и т. д.

Требуется данное разстояніе ab (фиг. 11) раздѣлить на нечетное число частей, напр. три. Возьмемъ на глазъ третью часть всего разстоянія между ножками циркуля и посмотримъ, содержится ли оно цѣлое число разъ во всей линіи. Допустимъ, что взятая треть оказалась слишкомъ малой, тогда придется остатокъ ax представить себѣ раздѣленнымъ на три части и, увеличивъ разстояніе между ножками циркуля на такую треть и попробовать дѣленіе снова и т. д.

Требуется данное разстояніе ab (фиг. 12) раздѣлить въ какомъ-нибудь данномъ отношеніи. Допустимъ, что части перемежаются периодически, т.-е. онѣ попеременно больше и меньше, и пусть каждая меньшая часть относится къ каждой большей, какъ *два къ тремъ*; для этого отложимъ на начерченной у крайней точки a подъ произвольнымъ угломъ прямой ac сначала двѣ произвольныя, но равныя части, и отъ точки 2 прибавимъ къ нимъ еще три такія же части; отрезки $a-2$ и $2-5$ откладываются дальше на ac столько разъ, сколько разъ хотятъ повторить данное отношеніе на протяженіи ab , если теперь соединить крайнюю точку (напр. 18) съ крайней точкой b и провести изъ точекъ 2, 5 и т. д. параллели къ линіи 18 b , то мы получимъ на ab требуемое дѣленіе.

Задача эта могла бы быть формулирована и слѣдующимъ образомъ:

требуется перенести отношеніе частей даннаго отрезка на другой, болѣе или менѣе отрезокъ. Рѣшеніе задачи при этомъ оставалось бы совершенно такимъ же.

§ 13. Требуется раздѣлить пополамъ уголъ, вершина котораго недоступна, или, другими словами: требуется черезъ середину между двумя сходящимися прямыми ab и cd провести третью (фиг. 13) mn , которая направлялась бы къ той же точкѣ схода, находящейся вѣдъ чертежа.

Соединимъ двѣ точки x и y , произвольно взятыя на ab и cd , прямою, раздѣлимъ образовавшіеся вслѣдствіе этого четыре угла aux , bux , cxu и dxy пополамъ; черезъ точки пересѣченія s и s' каждыхъ двухъ равнодѣлящихъ (биссектрисъ) проведемъ прямую mn , и послѣдняя будетъ направляться къ той же точкѣ схода, что и требовалось. Или же начертимъ между ab и cd на произвольномъ, но равномъ разстояніи параллели къ каждой изъ нихъ; послѣднія пересѣкутся въ точкѣ s'' , и если мы раздѣлимъ пополамъ образовавшійся при этомъ острый уголъ при s'' , равный тому углу, подъ которымъ должны пересѣчься, при достаточномъ продолженіи, линіи ab и cd , то получатся, какъ видно изъ той же фигуры 13, одинаковый съ прежнимъ результатъ.

Даны двѣ прямыя ab и cd (фиг. 14), требуется провести черезъ произвольныя точки a' и b' прямую, которая имѣла бы общую съ первыми точку схода. Проведемъ произвольную прямую, которая пересѣчетъ ab и cd въ точкахъ e и f , а также проведемъ другую, параллельную къ ней прямую bd ; соединимъ a' съ f и e ; равнымъ образомъ и b' съ f и e , и проведемъ далѣе изъ b и d параллели къ eb' , ea' , fa' , fb' ; такимъ образомъ получатся точки пересѣченія a'' и b'' и прямыя $a'a''$ и $b'b''$ пересѣкутся къ той же точкѣ, что ab и cd .

§ 14. Требуется точно опредѣлить точку пересѣченія двухъ прямыхъ (фиг. 15), пересѣкающихся подъ очень острымъ угломъ.

Если двѣ прямыя пересѣкаются подъ очень острымъ уг-

ломъ, то невозможно прямо намѣтить съ точностью точку ихъ пересѣченія.

Въ такомъ случаѣ слѣдуетъ провести по обѣимъ сторонамъ точки пересѣченія и въ возможно большихъ разстояніяхъ отъ нея двѣ параллельныя линіи въ произвольномъ направленіи; на послѣднихъ отложить лежащее между двумя отрезками $I'O$ и $I''O$, произвольное, но одинаковое число разъ, въ противоположныхъ направленіяхъ (напр. 4 раза) и соединить между собой крайнія точки 4 и 4 прямой, чѣмъ опредѣлится точка s , какъ точка пересѣченія обѣихъ данныхъ прямыхъ.

На фиг. 16 изображенъ дециметръ $= \frac{1}{10}$ метра въ $\frac{2}{3}$ натуральной величины *); чтобы легко получить на немъ составныя дѣленія, напр. сантиметры и миллиметры, откладываютъ сначала отъ точки O десять сантиметровъ вправо и одинъ сантиметръ влѣво; послѣдній въ свою очередь дѣлится на десять частей, означающихъ миллиметры; если напр. желательно взять по этому масштабу циркулемъ величину въ 7 см. 8 мм, то слѣдуетъ поставить одну ножку циркуля на цифру 7 и удерживать ее здѣсь, раскрывая циркуль справа на лѣво до 8-го дѣленія, 7 см. + 8 мм. = 78 мм.; на фиг. 16 сантиметры раздѣлены еще пополамъ, такъ что наименьшая, лежащая вправо отъ O часть $= \frac{1}{2}$ см. = 5 мм.

О треугольникѣ.

§ 15. Треугольникъ есть сомкнутая фигура, ограниченная тремя линіями; каждая изъ этихъ линій называется *стороною треугольника*; каждый треугольникъ имѣетъ три стороны и три угла; треугольники различаютъ:

- а) по ихъ сторонамъ,
- б) по ихъ угламъ.

а) Треугольникъ наз. *равностороннимъ*, если всѣ три стороны его одинаковой длины; *равнобедреннымъ*, — если только двѣ стороны его одинаковой длины; равная сторона такого треугольника наз. *бедромъ*, а третья сторона, которая должна быть больше или меньше, наз. *основаніемъ* уголъ, лежащій противъ основанія, наз. *вершиной равнобедреннаго треугольника*.

Треугольникъ наз. *разностороннимъ*, когда всѣ его стороны различной длины.

б) Треугольникъ наз. *остроугольнымъ*, когда онъ содержитъ три острыхъ угла. Онъ наз. *прямоугольнымъ*, когда заключаетъ въ себѣ одинъ прямой уголъ; каждый изъ остальныхъ двухъ угловъ въ такомъ случаѣ будетъ острымъ.

Треугольникъ наз. *тупоугольнымъ*, когда онъ содержитъ одинъ тупой уголъ.

Въ прямоугольномъ треугольникѣ обѣ стороны, образующія прямой уголъ, наз. *катетами*, сторона же, лежащая противъ прямого угла, наз. *гипотенузой* (наклонной).

Подъ *прямоугольнымъ равнобедреннымъ* треугольникомъ понимаютъ такой, катеты котораго равны между собою; разъ идетъ рѣчь о катетахъ какого-либо треугольника, то онъ можетъ быть только прямоугольнымъ; если рѣчь идетъ о бедрахъ какого-либо треугольника, то онъ обязательно равнобедренный.

С ѣ к у щ і я.

§ 16. Подъ сѣкущей треугольника понимаютъ прямую, пересѣкающую стороны даннаго треугольника, или ихъ продолженія; это можетъ совершиться или въ трехъ или въ двухъ точкахъ, причемъ въ послѣднемъ случаѣ двѣ

*) Исполненіе чертежей со стороны учащагося рассчитано на половину больше; масштаб поэтому долженъ быть начертанъ въ его натуральной величинѣ.

точки сливаются въ одной, и именно въ вершинѣ треугольника, или же сѣкущая пересѣкаетъ третью продолженную сторону только въ безконечномъ отдаленіи, т.-е. она параллельна одной сторонѣ. Различаютъ четыре характерныхъ вида сѣкущихъ линий, а именно: а) *высоты*; б) *медианы* или *биссектриссы*; в) *перпендикуляры*, д) линии, дѣлящія пополамъ площадь, или просто *трансверсалы*.

а) Подъ *высотой* понимаютъ перпендикуляръ, опущенный изъ вершины треугольника на противоположную сторону (см. фиг. 6, табл. II); такъ какъ треугольникъ имѣетъ три стороны и три угла, то онъ въ общемъ имѣетъ три высоты; сторона, образующая съ высотой прямой уголъ, наз. ея *базисомъ*, или *основаніемъ*.

б) Подъ *медианой* понимаютъ прямую, дѣлящую пополамъ уголъ треугольника, т.-е. биссектрису угла; въ каждомъ треугольникѣ могутъ быть проведены три медианы; онѣ пересѣкаются въ одной точкѣ *m* внутри треугольника, разстояніе которой отъ всѣхъ трехъ сторонъ одинаково. (См. фиг. 7, табл. II).

в) Подъ *срединымъ перпендикуляромъ* понимаютъ прямую, перпендикулярно падающую на середину какой-либо стороны треугольника; точка *S*, въ которой пересѣкаются эти три перпендикуляра, равноотстоитъ отъ вершинъ треугольника (см. фиг. 8, табл. II) т.-е. $cS = aS = bS$.

д) Подъ *сѣкущей* въ болѣе узкомъ смыслѣ понимаютъ прямую, дѣлящую какъ-нибудь или пополамъ, площадь треугольника; если соединить вершину треугольника со серединой противолежащей стороны, то эта прямая будетъ сѣкущей; она дѣлитъ пополамъ площадь относительно ея величины *); точка *m* пересѣченія трехъ трансверсалей есть центръ тяжести треугольника (см. фиг. 8 табл. II).

Высоты и срединные перпендикуляры могутъ пересѣкаться и внутри, и внѣ треугольника, а стало быть и на периметрѣ послѣдняго; такъ напр., точка пересѣченія высотъ въ остроугольномъ треугольникѣ лежитъ внутри его, въ прямоугольномъ—она совпадаетъ съ вершиной прямого угла, причемъ двѣ высоты совпадаютъ съ катетами; въ тупоугольномъ треугольникѣ точка эта лежитъ внѣ фигуры треугольника на продолженіи высотъ.

Двѣ высоты падаютъ при этомъ на продолженіе тѣхъ сторонъ, которыя образуютъ тупой уголъ. Точка пересѣченія срединныхъ перпендикуляровъ лежитъ въ остроугольномъ треугольникѣ внутри фигуры, въ прямоугольномъ—на серединѣ гипотенузы, въ тупоугольномъ—внѣ фигуры.

Въ прямоугольномъ треугольникѣ высотой называется, главнымъ образомъ, та прямая, которая опущена изъ вершины прямого угла на гипотенузу; въ равнобедренномъ та, которая опущена изъ вершины на основаніе; поэтому въ прямоугольномъ и равнобедренномъ треугольникахъ говорятъ только объ одной высотѣ. Медианы, биссектриссы и сѣкущія всегда пересѣкаются внутри треугольника.

Въ равнобедренномъ треугольникѣ высота дѣлитъ пополамъ, какъ уголъ при вершинѣ, такъ и основаніе и служитъ за разъ медианой, сѣкущей и срединнымъ перпендикуляромъ. Въ равностороннемъ треугольникѣ высоты, медианы, срединные перпендикуляры и сѣкущія совпадаютъ; точка пересѣченія (см. фиг. 10, табл. II) равноотстоитъ такимъ образомъ, какъ отъ угловъ, такъ и отъ сторонъ.

Свойства треугольниковъ.

§ 12. Въ каждомъ треугольникѣ сумма внутреннихъ угловъ=двумъ прямымъ т.-е. 180° . Легко представить доказательство для этого положенія. Вообразимъ себѣ черезъ любую вершину *b* треугольника *abc* (фиг. 13

табл. А) линію, параллельную противолежащей сторонѣ *ac* въ такомъ случаѣ *a* и *d* будутъ накрестъ лежащими углами, и потому уголъ *d*=углу *a*; на этомъ же основаніи уголъ *e*=углу *c*; три угла *d*, *b* и *e*, сумма которыхъ будетъ соответствовать полуокружности равны двумъ прямымъ т. е. $=180^\circ$, и такъ какъ $a=d$, $b=b$, $c=e$, то $a+b+c$ также = двумъ прямымъ.

Внѣшній уголъ *f* треугольника, образуемый продолженіемъ одной изъ сторонъ его, равенъ суммѣ обоимъ внутреннимъ угламъ треугольника, съ нимъ не смежныхъ.

Это не трудно доказать: углы *c* и *f* (фиг. 13, табл. А.), какъ смежные, вмѣстѣ равны двумъ прямымъ, т.-е. $c+f=2$ прямыхъ, $a+b+c=2$ прямыхъ, отсюда $c+f=a+b+c$ или $f=a+b$; изъ этого слѣдуетъ также, что сумма внѣшнихъ угловъ треугольника $=3 \times 2D - 2D = 4D$ т.-е. равна четыремъ прямымъ.

Въ равностороннемъ треугольникѣ всѣ углы равны между собой и потому каждый изъ нихъ равенъ $\frac{180^\circ}{3} = 60^\circ$ т.-е. $\frac{2}{3}$ прямого.

Въ прямоугольномъ треугольникѣ сумма угловъ, лежащихъ у гипотенузы, равна прямому; поэтому, если въ прямоугольномъ треугольникѣ, кромѣ прямого угла, извѣстенъ еще одинъ острый уголъ, то можно опредѣлить легко величину второго остраго угла; то же самое будетъ и для каждаго треугольника, у котораго извѣстна величина двухъ угловъ; наприм., въ треугольникѣ одинъ уголъ содержитъ 60° , другой— 45° , такъ какъ сумма всѣхъ угловъ треугольника равна 180° , то третій уголъ будетъ содержать 75° .

Въ равнобедренномъ треугольникѣ углы, лежащіе у основанія, равны между собой (см. фиг. 3, табл. II); поэтому, если въ такомъ треугольникѣ извѣстна величина одного угла, то вмѣстѣ съ этимъ извѣстна также величина остальныхъ.

Въ равнобедренномъ прямоугольномъ треугольникѣ углы при гипотенузѣ равны между собою и равны порознь половинѣ прямого, т.-е. $=45^\circ$.

Въ каждомъ треугольникѣ сумма длинъ двухъ сторонъ болѣе длинны третьей, разниа или разность между двумя сторонами меньше третьей стороны; болѣе стороны всегда противолежитъ и болѣе уголъ и наоборотъ.

Равенство треугольниковъ.

§ 18. Треугольники, у которыхъ двѣ стороны и заключенный между ними уголъ, равны, взаимно покрываютъ другъ друга и потому совпадаютъ, т.-е. они равны между собой по величинѣ и формѣ. Два треугольника равны, когда имѣютъ по одной равной сторонѣ и два равныхъ угла, прилежащихъ къ этой сторонѣ.

Два треугольника равны, когда всѣ три ихъ стороны равны между собою. Въ равныхъ треугольникахъ противъ равныхъ сторонъ лежатъ равные углы и наоборотъ—противъ равныхъ угловъ лежатъ равныя стороны. Два равностороннихъ треугольника совпадаютъ, когда имѣютъ равную сторону. Два равнобедренные треугольника равны, когда имѣютъ по равному бедру и прилежащему углу или по равному основанію и прилежащему углу.

Два прямоугольныхъ треугольника равны, когда у нихъ два катета равны или катетъ и гипотенуза одного равны катету и гипотенузѣ другого.

Два равнобедренныхъ прямоугольныхъ треугольника совпадаютъ, когда имѣютъ по равному катету или по равной гипотенузѣ.

Подобіе треугольниковъ.

§ 19. Два треугольника, сходственные по формѣ, но различные по величинѣ, наз. подобными, если въ имѣющемся

*) Если раздѣлить сторону треугольника на 3, 4, 5... равныхъ частей и провести изъ полученныхъ точекъ дѣленія линіи къ противоположной вершинѣ, то треугольникъ раздѣлится на 3, 4, 5... равныхъ площадей.

уже треугольник abc (фиг. 14, табл. А) провести параллель к какой-либо стороне, то образуется второй треугольник ade , который подобен первому (большому).

Два треугольника подобны, когда три угла одного треугольника в отдельности равны трем углам другого треугольника.

Два треугольника подобны, когда три стороны одного пропорциональны трем сторонам другого. В подобных треугольниках стороны, лежащая против равных углов, называются пропорциональными.

Задачи на треугольники.

Табл. II, фиг. 1—10.

§ 20. Треугольник тогда вообще определен относительно своей величины и формы, когда из шести его элементов, т.-е. из трех сторон и трех углов его, даны три элемента, наприм., три стороны, или два стороны и угол, или одна сторона и два угла; одна сторона безусловно необходимо должна быть дана. Равнобедренный треугольник определяется бедром и основанием или основанием и прилежащими углами; прямоугольный треугольник—двумя катетами, или катетом и гипотенузой.

Равносторонний треугольник определяется одной стороной или также одной высотой.

§ 21. Даны три отрезка ab, bc, ca (фиг. 1), требуется построить из них треугольник.

Начертим $a'b'$, равную ab , и опишем радиусом, равным bc , из точки b' дугу над $a'b'$; далее, возьмем циркулем расстояние ac и опишем им из a' вторую дугу; обе дуги пересекутся в точке c' ; $a'b'c'$ и есть искомым треугольником.

Если бы мы линией bc , как радиусом, описали дугу не из b' , а из a' и сообразно с этим вторую дугу радиусом ac из b' , то треугольник $a'b'c''$ был бы по положению своему различен от первого, по формѣ же и величинѣ—вполнѣ равенъ съ первымъ (они совпадали бы).

Проходящий через точку пересечения обоих сторон треугольников ($a'c', a'c''$), перпендикуляр называется *осью симметрии* обоих треугольников.

§ 22. Даны: 1) длина ab (фиг. 2), какъ длина стороны равносторонняго треугольника или 2) высота H равносторонняго треугольника. Требуется построить его по одному из этихъ условий.

1) Начертимъ $a'b'$, равную ab , опишемъ линіей $a'b'$, какъ радиусомъ, двѣ дуги $a'c', b'c'$, соединимъ a' съ c' и b' съ c' , тогда $a'b'c'$ будетъ искомымъ равностороннимъ треугольникомъ.

2) Начертимъ вертикаль H' , равную высотѣ; перпендикулярно къ ней проведемъ двѣ параллели $a'b', dc'$; если желательно, чтобы c' была вершиной треугольника, то опишемъ произвольнымъ радиусомъ $c'd$ четверть окружности и изъ точки d тѣмъ же радиусомъ дугу ce' , проведемъ изъ c' прямую черезъ e' до пересѣченія съ нижней параллелью въ точкѣ a' ; если теперь еще провести изъ a' , радиусомъ $a'c'$ дугу cb' , то b' будетъ третьей вершиной, а $a'b'c'$ —искомымъ треугольникомъ. На фиг. 2 представлены оба построения вѣстѣ.

§ 23. Даны на фиг. 3: B , какъ основаніе и S , какъ бедро равнобедреннаго треугольника.

Требуется построить этотъ треугольникъ.

Начертимъ B' , равную B , опишемъ изъ концовъ основанія радиусомъ, = бедру S , двѣ дуги надъ основаніемъ; точка ихъ пересѣченія будетъ вершиной искомаго равнобедреннаго треугольника, B' —основаніемъ, а S' и S'' —бедрами.

§ 24. Даны (фиг. 4): 1) отрезокъ K , какъ катетъ, отрезокъ H , какъ гипотенуза или, 2) K и K' (фиг. 5),

какъ оба катета прямоугольнаго треугольника. Требуется его построить.

1) Начертимъ $K'=K$, возставимъ въ одномъ изъ концовъ его перпендикуляръ и опишемъ изъ другого конца радиусомъ, равнымъ гипотенузѣ, дугу, которая пересѣкла бы перпендикуляръ; если соединить послѣднюю точку пересѣченія съ концомъ катета (здѣсь $sl'ba$), то получимъ требуемый прямоугольный треугольникъ. Или же начертимъ $H'=H$, опишемъ надъ H' , какъ надъ діаметромъ, полуокружность и изъ того или другого конца гипотенузы (здѣсь изъ нижняго конца) радиусомъ равнымъ K опишемъ дугу, и мы получимъ тогда тотъ же результатъ *).

Оба построения обозначены на фиг. 4.

2) Начертимъ $K''=K$ (фиг. 5), возставимъ въ одномъ концѣ K'' перпендикуляръ, отложимъ на немъ величину $K'''=K'$ и т. д.

§ 25. Въ данномъ треугольникѣ abc (фиг. 6) требуется начертить высоты. Задача тождественна съ той, которая приведена на фиг. 2 и 3, табл. I; именно, слѣдуетъ опустить изъ каждой вершины перпендикуляръ на противоположащую сторону. Три высоты пересѣкаются въ одной точкѣ (см. § 16).

§ 26. Въ данномъ треугольникѣ abc (фиг. 7) слѣдуетъ начертить его медианы, или биссектрисы; задача эта ничѣмъ не отличается отъ той, рѣшеніе которой показано на фиг. 6, табл. I. Медианы пересѣкаются въ m ; эта точка равноотстоитъ отъ всѣхъ трехъ сторонъ треугольника. При продолженіи двухъ сторонъ треугольника, дальше образуемаго ими угла и дѣленіи пополамъ одного изъ полученныхъ вѣдствіе этого смежныхъ угловъ, наприм., bed , мы найдемъ, что медиана послѣдняго перпендикулярна къ mc . То же самое, весьма естественно, имѣетъ силу и по отношенію къ другимъ угламъ.

§ 27. Требуется въ данномъ тупоугольномъ треугольникѣ abc (фиг. 8) начертить: 1) срединные перпендикуляры, 2) линіи, дѣлящія пополамъ площадь или сѣкуція.

1) Задача ничѣмъ не отличается отъ той, которая приведена на фиг. 10, табл. I; именно, слѣдуетъ каждую изъ сторонъ треугольника помощью соответствующаго построения раздѣлить пополамъ и каждую изъ этихъ равнодѣлящихъ линій продолжить до точки пересѣченія S , которая въ данномъ случаѣ лежитъ внѣ треугольника. S равноотстоитъ отъ вершинъ a, b, c ; при соединеніи каждой изъ вершинъ треугольника съ серединами противоположныхъ сторонъ m, m', m'' мы получимъ сѣкуція; m''' есть центръ тяжести треугольника и т. д. (см. § 16).

Въ данномъ прямоугольномъ равнобедренномъ треугольникѣ abc (фиг. 9) точка пересѣченія срединныхъ перпендикуляровъ приходится на срединѣ m' гипотенузы; одинъ изъ срединныхъ перпендикуляровъ bm' совпадаетъ съ высотой этого треугольника.

Въ данномъ равностороннемъ треугольникѣ abc (фиг. 10) высоты, медианы, срединные перпендикуляры и трансверсалы совпадаютъ. Точка пересѣченія ихъ лежитъ въ центрѣ треугольника и разстояніе его отъ всѣхъ сторонъ и угловъ одинаково.

О четырехугольникѣ.

Параллелограмъ, трапеція, трапециодъ.

§ 28. Четыреугольникъ есть фигура, ограниченная четырьмя прямыми линіями. Линіи эти наз. сторонами четырехугольника; четырехугольникъ, стало-бытъ, имѣетъ четыре стороны и четыре угла.

Прямая, которая соединяетъ между собой два угла и не

*) Послѣднее построение основано на той геометрической теоремѣ, что всѣ углы, опирающіеся на діаметръ круга и имѣющіе вершину на окружности, суть прямые.

служить стороной, наз. *диагональной линией* или просто *диагональю*. Каждая диагональ дѣлитъ четырехугольникъ на два треугольника; сумма внутреннихъ угловъ каждого четырехугольника равна четыремъ прямымъ $4D=360^\circ$: такъ какъ сумма угловъ каждого треугольника равна двумъ прямымъ, четырехугольникъ же можетъ быть разложенъ на два треугольника, то понятно, что сумма угловъ четырехугольника $=2.180^\circ=360^\circ$. Внешние углы e, f, g, h четырехугольника (фиг. 15, табл. А) содержатъ вмѣстѣ четыре прямыхъ. $(4.2=8 \text{ прямыхъ} = \text{суммѣ угловъ } a+b+c+d)$ (см. треугольники).

Четырехугольники раздѣляются на:

- а) параллелограммы,
- б) трапеціи,
- с) трапецииды.

а) Четырехугольникъ наз. *параллелограмомъ*, когда противоположныя стороны между собой параллельны и равны. Въ параллелограмѣ противолежащіе углы равны между собой. Диагонали взаимно пересѣкаются и дѣлятся пополамъ. Подъ высотой параллелограмма понимаютъ разстояніе между двумя параллельными сторонами, изъ которыхъ каждая можетъ быть разсматриваема, какъ основаніе. Различаютъ четыре особыхъ вида параллелограмовъ, а именно: *квадратъ*, *прямоугольникъ*, *ромбъ* и *ромбоидъ*.

Параллелограмъ наз. *квадратомъ*, когда онъ имѣетъ четыре равныя стороны и прямой уголъ; остальные три угла также будутъ прямыми. Обѣ диагонали равной длины дѣлятъ пополамъ четыре угла и перпендикулярны другъ къ другу (см. фиг. 13, табл. II).

Параллелограмъ наз. *прямоугольникомъ*, когда онъ имѣетъ прямой уголъ; три остальные угла тоже прямые, а стороны равны попарно (см. фиг. 14, табл. II).

Параллелограмъ наз. *ромбомъ*, или *сдвинутымъ квадратомъ*, когда, подобно квадрату, имѣетъ четыре равныя стороны, углы же равны только попарно; диагонали ромба какъ и въ квадратѣ, дѣлятъ углы пополамъ и взаимно перпендикулярны, но только онѣ не равны между собой. (См. фиг. 16, табл. II).

Параллелограмъ, въ которомъ стороны равны только попарно и нѣтъ ни одного прямого угла, наз. также *ромбоидомъ*, или собственно параллелограмомъ. (См. фиг. 11, табл. II).

Параллелограмъ вообще имѣетъ двѣ неравныя высоты H, H' (фиг. 16, табл. А). Въ квадратѣ высоты сливаются со сторонами по длинѣ, и такъ какъ послѣднія между собой всѣ равны, то здѣсь существуетъ только одна длина высоты.

Въ прямоугольникѣ высоты равны сторонамъ, т.-е. совпадаютъ съ послѣдними.

Въ ромбѣ обѣ высоты H и H' равны между собой (фиг. 17, табл. А).

б) Четырехугольникъ наз. *трапеціей*, когда у него только двѣ стороны параллельны, двѣ же другія стороны, расположенны косвенно и могутъ быть наклонены другъ къ другу подъ любымъ угломъ. Диагонали вообще неравной длины; исключеніе въ этомъ отношеніи представляетъ равнобедренная трапеція, косыя стороны которой одинаково т. е. симметрично наклонены къ параллельнымъ (см. фиг. 19, табл. II); точка ихъ пересѣченія при соответствующемъ продолженіи приходится надъ серединой обѣихъ параллельныхъ сторонъ; если изъ этой точки пересѣченія опустить перпендикуляръ на параллели, то онъ будетъ осью симметріи фигуры; диагонали въ этомъ случаѣ равны по длинѣ. Въ трапеціи, вообще, высотой называютъ кратчайшее разстояніе между обѣими параллельными сторонами, причемъ каждая изъ нихъ можетъ быть принята за основаніе.

с) Четырехугольникъ, въ которомъ ни одна изъ сторонъ не параллельна другой, наз. *трапецидомъ*, или просто *четыреугольникомъ*.

Углы и диагонали послѣдняго вообще неравны (см. фиг. 20 и 21, табл. II), но можетъ быть и такъ, что стороны и углы смежно равны между собой, въ такомъ случаѣ одна изъ диагоналей можетъ представлять изъ себя также ось симметріи, (напр. ab фиг. 18, табл. А); разъ это имѣетъ мѣсто, или вообще, если трапецидъ диагональю разбивается на два равныхъ (совпадающихъ) треугольника, то фигура наз. *симметричною*.

Задачи на построеніе четырехугольниковъ.

Построеніе параллелограмовъ.

Табл. II, фиг. 11—16.

§ 29. Косоугольный параллелограмъ (ромбоидъ) опредѣленъ относительно своей величины и формы, когда даны двѣ стороны его и диагональ, или двѣ стороны и заключенный между ними уголъ, или когда даны: основаніе, высота и одинъ уголъ.

Прямоугольникъ можетъ быть опредѣленъ по двумъ сторонамъ или по одной сторонѣ и диагонали.

Ромбъ можетъ быть опредѣленъ, когда даны: одна сторона и диагональ, или обѣ диагонали, или же одна сторона и прилежащій уголъ.

Квадратъ опредѣляется по одной сторонѣ или диагонали.

§ 30. фиг. 11. Даны: разстоянія ab и bc , какъ двѣ стороны косоугольного параллелограмма, ac , какъ диагональ его. Требуется его построить. Начертимъ $a'b' = ab$, опишемъ радіусомъ bc изъ b' и радіусомъ ac изъ a' дуги, которыя пересѣкутся въ c' , если соединить точки a', b' и c' , то получимъ сперва треугольникъ. Такъ какъ каждый параллелограмъ, какъ извѣстно, диагональю разлагается на два равные треугольника, то слѣдуетъ только надъ диагональю построить другой треугольникъ, совпадающій съ $a' b' c'$, для чего описываемъ дугу изъ c' , радіусомъ a' , b' и изъ a' радіусомъ $b'c'$; дуги эти пересѣкутся въ d . $a'b'c'd$ есть искомый параллелограмъ. *).

§ 31. Даны: 1) Отрѣзокъ ab (фиг. 12), какъ сторона квадрата или 2) отрѣзокъ ab (фиг. 13), какъ диагональ квадрата. Построить его.

1. Начертимъ $a'b' = ab$, восстановимъ въ b' перпендикуляръ къ $a'b'$, отложимъ на немъ величину $b'c = a'b'$ и пересѣченіемъ дугъ, описанныхъ изъ a' и c радіусомъ, равнымъ сторонѣ квадрата, опредѣлимъ точку d ; или

2. восстановимъ изъ середины $a'b'$, на которую перенесена диагональ ab (фиг. 13) перпендикуляръ cmd и опишемъ изъ m радіусомъ ma' окружность; послѣдняя въ своихъ точкахъ пересѣченія c и d опредѣлитъ остальные вершины квадрата.

§ 32. Даны: 1) отрѣзки ab, bc (фиг. 14), какъ стороны, или 2) (фиг. 15) отрѣзки: ab , какъ сторона и ac , какъ диагональ прямоугольника. Построить его.

1. Построимъ $a'b' = ab$, восстановимъ въ b' перпендикуляръ и сдѣлаемъ его равнымъ bc , опишемъ изъ c' и a' радіусами ab и bc дуги, которыя пересѣкутся въ d .

2. Или, перенесемъ величину ab на $a'b'$ (фиг. 15), восстановимъ въ b' перпендикуляръ, пока неопредѣленной длины и изъ точки a' радіусомъ, равнымъ ac , опишемъ дугу, которая пересѣчетъ перпендикуляръ въ c' ; далѣе, отъ a' и c' радіусомъ $b'c'$ и $a'b'$ опишемъ еще дуги; полученная точка d будетъ четвертой искомой точкой.

§ 33. На фиг. 16 даны: отрѣзокъ ab , какъ сторона и ac , какъ диагональ ромба. Построить его. Начертимъ сперва диагональ $a'c' = ac$, затѣмъ возьмемъ отрѣзокъ ab между ножками циркуля и опишемъ имъ изъ a' и c' съ каж-

*). Дальѣйшія построенія по условіямъ, даннымъ въ § 29, здѣсь не выполнены, потому что не трудно найти способъ этихъ построеній по собственному соображенію.

дой стороны диагонали по дуге дуги, которая пересекнется в b' и d' ; a' , b' , c' и d' суть четыре вершины ромба.

Построение трапеций.

Табл. II, фиг. 17 — 19.

§ 34. Трапеция определена относительно своей формы и величины, когда из входящих в ее состав четырех сторон, четырех углов, двух диагоналей и высоты, даны, кроме двух параллельных сторон (см. § 28), еще два элемента, напр. диагональ и одна косая сторона, или косая сторона и прилежащий угол *), в общем, таким образом, *должны быть даны четыре элемента*.

Равнобедренная трапеция определена, когда, кроме двух параллельных сторон, дано еще одно условие, напр. высота или косая сторона.

§ 35. На фиг. 17 даны отрезки ab и dc , как две параллельные стороны трапеции, bc — как одна из косых сторон и ac , как диагональ. Построить трапецию.

Начертим $a'b' = ab$, опишем из b' радиусом, равным косой стороне bc дугу над $a'b'$ и радиусом, равным диагонали ac , дугу из a' . Обе дуги пересекнутся в c' , соединим b' с c' , из c' проведем параллель к $a'b'$ и сдвигнем ее равною dc , тогда $a'b'c'd'$ и есть искомая трапеция, определенная тремя сторонами и одной диагональю.

§ 36. Даны: 1) обе параллельные стороны и высота (фиг. 18) или 2) обе параллельные стороны и косая сторона (фиг. 19). Построить равнобедренную трапецию.

1) Начертим (фиг. 18) $a'b' = ab$, возставим из середины ее m' перпендикуляр, сдвигнем его равным высоте H и через конец последней m проведем параллель к $a'b'$ разделим пополам данный отрезок dc и отложим половинки его вправо и влево от точки m (на проведенной параллели), соединим a' с d' и b' с c' , $a'b'c'd'$ и есть равнобедренная трапеция.

2) Начертим (фиг. 19) $a'b' =$ данному расстоянию ab , возставим из середины m перпендикуляр, разделим пополам другую из данных параллельных сторон dc и половинки эти отложим вправо и влево от m (по линии $a'b'$) до точек 1 и 2, в последних возставим перпендикуляры; далее, опишем из a' и b' радиусом, равным косой стороне bc , дуги, которые пересекнутся перпендикуляры, возставленные в 1 и 2, в точках d' и c' , $a'b'c'd'$ и будет равнобедренной трапецией.

Построение трапециоида.

Табл. II, фиг. 20 и 21.

§ 37. Трапециод определена относительно своей формы и величины, когда из четырех сторон, двух диагоналей и четырех углов, входящих в состав его, даны четыре стороны и одна диагональ, или четыре стороны и угол, заключенный между двумя определенными сторонами, или три стороны и углы, заключенные между каждыми двумя сторонами **), в общей сложности должны быть даны пять элементов.

§ 38. Даны: 1) отрезки ab , bc , cd и da (фиг. 20), как стороны трапециоида и отрезок bd , как диагональ его, 2) отрезки ab , bc , cd и da (фиг. 21), как стороны, и угол, заключенный между сторонами ab , bc , $W = 75^\circ$. Построить трапециод.

1) Начертим сторону $a'b' = ab$ (фиг. 20), опишем радиусом ad дугу из a' и радиусом $=$ диагонали bd дугу из b' , обе дуги пересекнутся в d' , если далее описать

дуге дуги, из d' радиусом dc , а из b' радиусом bc , то они пересекнутся в c' ; $a'b'c'd'$ и есть искомый трапециод.

2) Начертим $a'b' = ab$, построим на конце b' данный угол abc , равный 75° ($60^\circ + 30^\circ - 15^\circ$) [См. Табл. I, фиг. 10], сдвигнем сторону $b'c'$ равною отрезку bc и опишем из c' радиусом cd , а из a' радиусом ad , две дуги, которые пересекнутся в d' ; $a'b'c'd'$ будет таким образом искомым трапециодом.

Задачи, относящиеся к вычерчиванию подобных фигур.

(Увеличение и уменьшение данной фигуры). Нанесение различных масштабов и пр.

Табл. III, фиг. 1—10.

§ 39. Так как каждая фигура может быть разбита на несколько треугольников, и в подобных фигурах могут быть вычерчены подобные треугольники (см. табл. III, фиг. 1), равным образом известное отношение частей может быть перенесено с одного отрезка на другой, больший или меньший (см. фиг. 12, табл. I), то на основании этих законов подобия, помощью т. н. пропорциональных или угловых масштабов (подобных треугольников) легко превратить данную фигуру в большую или меньшую, т. е. увеличить или уменьшить данную фигуру.

Напр. на фиг. I дан треугольник abc ; требуется разложить его 1) на подобные, и 2) на равные треугольники.

1. Разделим какую-либо сторону, напр. ab , сперва на произвольное число равных или неравных частей (здесь взяты три равных части) и проведем из точек деления 1 и 2 параллели к одной стороне ac , они пересекнут сторону bc в точках 1' и 2', полученные треугольники $b11'$, $b22'$, bac подобны друг другу, так как одинаково расположенные углы их равны и одинаково расположенные стороны пропорциональны. То же самое относится к треугольникам $c1'2'$, $c2'1'$ и т. д.

2. Так как обе стороны ac и bc , параллелями, проведенными из точек деления 1 и 2, также разделились на три равных части, то если еще провести из 1' и 2' или 1'' и 2'' параллели к ab , данный треугольник распадется на 9 равных (совпадающих) треугольников, из которых каждый будет подобен данному abc . Дан (фиг. 2) пятиугольник $abcde$; требуется построить меньший пятиугольник, подобный данному, у которого одна пропорциональная сторона совпадала бы с ae и равнялась бы определенной величине $a'e'$.

Проведем диагонали eb , ec (которые можно продолжить также за e'), из a' проведем параллель к ab , из b' параллель к bc и т. д. полученный таким образом пятиугольник $a'b'c'd'e'$ подобен данному. Лежащий вне данной фигуры меньший пятиугольник $a''b''c''d''e''$ также подобен данному; здесь $a''b''$ была принята за одинаково-расположенную или подобную ab сторону; $a''b''$ поэтому проведена параллельно ab , $b''c''$ параллельно bc и т. д.

§ 40. На фигуре 3 дан профиль карниза; требуется уменьшить его, приняв за одну из уменьшенных сторону линию $b'c'$, на фиг. 3б.

Начертим прямую de (фиг. 3а), опишем радиусом bc из d дугу ef , отложим на последней данный на фиг. 3б отрезок $b'c'$, в виде хорды, по направлению от e к f , соединим d с f ; полученный таким образом сектор edf есть тот пропорциональный масштаб, которым следует пользоваться для уменьшения данной фигуры. Чтобы теперь найти напр. отрезок $a'b'$, возьмем с фиг. 3 подобный ему отрезок ab , опишем им, как радиусом, из d дугу, и перенесем хорду этой дуги по направлению $b'a'$ на фиг. 3б; точно так же поступают для отыскивания других точек.

*) Последний случай здесь не рассмотрен.

**) Построение по последнему условию не выполнено и на него следует смотреть, как на задачу.