М.Ф. Берг, М.А. Знаменский, Г.Н. Попов

Рабочая книга по математике

Для 9-го года обучения в городской школе

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 51
ББК 22.1
М11

М.Ф. Берг
М11 Рабочая книга по математике: Для 9-го года обучения в городской школе / М. Ф. Берг, М.А. Знаменский, Г.Н. Попов – М.: Книга по Требованию, 2014. – 232 с.

ISBN 978-5-458-41294-0

Рабочая книга по математике. Для 9-го года обучения в городской школе.

ISBN 978-5-458-41294-0

Здесь $a_1=21$; $d=-3$; $n=10$; следовательно,

$$a_{10}=21-3\cdot(10-1)=-6.$$

Если в прогрессии n членов, a_n называется *последним* членом этой прогрессии.

§ 3. Свойство членов разностной прогрессии, равноотстоящих от начала и от конца.

Возьмем возрастающую прогрессию:

$$\div a_1,\ a_2,\ \ldots\ldots a_h,\ \ldots a_k,\ \ldots a_{n-1},\ a_n\ (d>0),$$

причем пусть член a_h есть член порядка h с начала, а член a_k — член того же порядка h с конца.

Перепишем прогрессию в обратном порядке, сделав ее первый член последним. Тогда последний член станет первым:

$$\div a_n,\ a_{n-1},\ \ldots a_k,\ \ldots a_h,\ \ldots a_2,\ a_1.$$

Новая прогрессия, очевидно, убывающая, т. е. ее разность есть $-d$. Теперь член a_k будет членом порядка h с начала, а член a_h членом порядка h с конца.

В первой прогрессии

$$a_h=a_1+d\ (h-1).$$

Во второй прогрессии

$$a_k=a_n-d\ (h-1).$$

Почленное сложение двух последних равенств д от:

$$a_h+a_k=a_1+a_n, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

т. е. *в разностной прогрессии сумма двух членов, равноотстоящих от начала и от конца, равна сумме первого и последнего членов.*

Например, в прогрессии из 9 членов:

$$\div 2,\ 6,\ 10,\ 14,\ 18,\ 22,\ 26,\ 30,\ 34$$

имеем $a_4=14$; $a_6=22$. Сумма индексов $4+6=10=9+1$, т. е. a_4 и a_6 являются членами, равноотстоящими от начала и конца. Их сумма будет $14+22=36$, но и $a_1+a_9=2+34=36$.

§ 4. Вычисление суммы членов разностной прогрессии по первому члену, последнему члену и числу членов.

Соединив знаками плюс все члены прогрессии, получим *сумму* этой прогрессии, обозначаемую в общем виде буквой S.

Выпишем две одинаковые суммы одной и той же прогрессии, расположив во второй сумме члены в обратном порядке:

$$S = a_1 + a_2 + \ldots + a_h + \ldots + a_k + \ldots + a_{n-1} + a_n;$$
$$S = a_n + a_{n-1} + \ldots + a_k + \ldots + a_h + \ldots + a_2 + a_1$$

(сохраняем обозначения равноотстоящих членов от начала и от конца согласно предыдущему параграфу.)

Почленное сложение написанных равенств дает в правой части $2n$ слагаемых, которые можно по вертикальным столбцам сгруппировать в n пар:

$$2S = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \ldots + (a_h + a_k) + \ldots + (a_k + a_h) + \ldots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1).$$

Легко видеть, что каждая пара слагаемых, стоящая в скобках, представляет сумму членов, равноотстоящих от начала и от конца, следовательно, каждая такая пара равна $a_1 + a_n$, но таких пар будет n; следовательно,

$$2S = (a_1 + a_n) \cdot n,$$

откуда

$$S = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}, \qquad (3)$$

т. е. *сумма членов разностной прогрессии равна произведению полусуммы первого и последнего членов на число всех членов.*

Например, дана прогрессия, представляющая ряд натуральных чисел:

$$\div 1,\ 2,\ 3,\ 4, \ldots 27.$$

Здесь $a_1 = 1$; $a_{27} = 27$; $n = 27$.

Найдем сумму. По формуле (3) будем иметь:

$$S = \frac{(1 + 27) \cdot 27}{2} = 378.$$

§ 5. Вычисление суммы членов разностной прогрессии по первому члену, разности прогрессии и числу членов.

Формула (1) дает:

$$a_n = a_1 + d\,(n - 1).$$

Вставим значение a_n в формулу (3):

$$S = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}.$$

Тогда получим другое выражение суммы членов прогрессии:

$$S = \frac{[a_1 + a_1 + d\ (n-1)] \cdot n}{2}$$

или, по упрощении:

$$S = \frac{[2a_1 + d\ (n-1)] \cdot n}{2}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

т. е. *сумма членов разностной прогрессии равна половине произведения числа членов на сумму удвоенного первого члена и произведения разности прогрессии на число ее членов без одного.*

Например, суммируем прогрессию из 19 членов:

$$\div 3,\ 8,\ 13\ \ldots$$

Здесь $a_1 = 3$; $d = 5$; следовательно, по формуле (4):

$$S = \frac{(2 \cdot 3 + 5 \cdot 18) \cdot 19}{2} = \frac{96 \cdot 19}{2} = 912.$$

По формуле (1) имели бы:

$$a_{19} = a_1 + 18d = 3 + 90 = 93;$$

следовательно, по формуле (3) получили бы:

$$S = \frac{(3 + 93) \cdot 19}{2} = 912.$$

Формула (4) является следствием из формул (1) и (3).

Легко видеть, что формулы (1), (3) и в частности (4) позволяют быстро определять выражения последнего члена разностной прогрессии и ее суммы. Непосредственное же вычисление было бы сложно и утомительно.

Прогрессия определяется в различных случаях значениями *пяти* количеств: a_1, a_n, d, n и S.

Связь между ними указывается двумя соотношениями [по формулам (1) и (3)]:

$$a_n = a_1 + d\ (n-1)$$

$$S = \frac{(a_1 + a_n)\, n}{2}$$

[формула (4) есть следствие (1) и (3)].

В виду сказанного все задачи на разностные прогрессии решаются, как скоро *из пяти количеств даны три,* так как остальные два находятся по формулам (1) и (3), т. е. решение сводится к отысканию корней системы двух уравнений с двумя неизвестными. Здесь могут представиться десять различных случаев:

данные:	искомые:
1. a_1, d, n	a_n, S
2. a_n, d, n	a_1, S
3. a_1, a_n, n	d, S
4. a_1, a_n, d	n, S
5. n, d, S	a_1, a_n
6. n, a_n, S	a_1, d
7. n, a_1, S	a_n, d
8. a_n, d, S	a_1, n
9. a_1, d, S	a_n, n
10. a_1, a_n, S	d, n.

Решим несколько задач:

1. Найдем сумму ста первых натуральных чисел; здесь $a_1 = 1$, $a_{100} = 100$; $n = 100$; следовательно,

$$S_{100} = \frac{(1+100)\cdot 100}{2} = 5050.$$

2. Найдем сумму первых n нечетных чисел:

$$\div 1,\ 3,\ 5,\ 7\ .\ .\ .$$

Так как n-ое четное число будет $2n$, ему предшествующее число $2n - 1$ будет n-ым нечетным; следовательно,

$$S = \frac{(1 + 2n - 1)\cdot n}{2} = n^2,$$

т. е. *сумма n первых нечетных чисел равна квадрату числа этих чисел.*

3. Между двумя числами a и b вставить p средних арифметических — это значит составить прогрессию из $p + 2$ членов, где a будет первым, а b последним членом прогрессии. На основании этого:

$$b = a + d\ (p + 1);$$

откуда

$$d = \frac{b - a}{p + 1}.$$

Например, между 5 и 32 вставить 8 средних арифметических; здесь

$$t = \frac{32 - 5}{8 + 1} = \frac{27}{9} = 3;$$

следовательно, прогрессия будет:

$$\div 5,\ 8,\ 11,\ 14\ \ 17,\ 20,\ 23,\ 26,\ 29,\ 32$$

4. Найдем прогрессию, если $d = 6$; $n = 10$; $S = 340$.

По формуле (4) имеем:

$$340 = \frac{(2a_1 + 6 \cdot 9) \cdot 10}{2}$$

или

$$68 = 2a_1 + 54,$$

откуда

$$a_1 = 7.$$

Прогрессия будет: $\div 7$, 13, 19, 25 . . .

5 Сумма четвертого и десятого членов прогрессии равна 44, а сумма второго и пятнадцатого 53. Требуется найти прогрессию. По условию:

$$a_4 + a_{10} = 44; \quad a_2 + a_{15} = 53,$$

но

$$a_4 = a_1 + 3d; \quad a_{10} = a_1 + 9d; \quad a_2 = a_1 + d; \quad a_{15} = a_1 + 14d;$$

поэтому:

$$2a_1 + 12d = 44,$$
$$2a_1 + 15d = 53.$$

Почленное вычитание дает: $3d = 9$; следовательно, $d = 3$, но $2a_1 = 44 - 12d = 44 - 36 = 8$, т. е. $a_1 = 4$.

Прогрессия будет:

$$\div 4, 7, 10, 13 \ . \ . \ .$$

6. Найдем прогрессию, если $d = 3$; $a_n = 29$; $S = 155$.

Найдем сначала выражение первого члена:

$$29 = a_1 + 3\,(n - 1);$$

следовательно,

$$a_1 = 29 - 3n + 3 = 32 - 3n.$$

По формуле (3):

$$155 = \frac{(32 - 3n + 29) \cdot n}{2},$$

откуда

$$310 = 61n - 3n^2,$$

или

$$3n^2 - 61n + 310 = 0.$$

Это квадратное уравнение относительно n дает для него два значения: $n_1 = \frac{1}{3}$; $n_2 = 10$.

Оба корня удовлетворяют уравнению, но n по смыслу должно быть *только целым числом*; следовательно, годится корень $n_2 = 10$. При $n = 10$ имеем:

$$a_1 = 32 - 3 \cdot 10 = 2;$$

следовательно, прогрессия будет:

$$\div 2,\ 5,\ 8\ .\ .\ .$$

7. Найдем сумму $m+n$ членов прогрессии, в которой m-й член равен n, а n-й член равен m.

Решение. По условию

$$a_m = a_1 + d\ (m-1) = n;$$
$$a_n = a_1 + d\ (n-1) = m.$$

Почленное вычитание дает:

$$dm - d - dn + d = n - m,$$

или

$$d = \frac{n-m}{m-n} = -\frac{(m-n)}{m-n} = -1.$$

В таком случае $a_1 = n + m - 1$
и $a_{m+n} = a_1 + d\ (m+n-1) = n + m - 1 - m - n + 1 = 0$,
поэтому сумма $m+n$ членов будет:

$$S_{m+n} = \frac{(a_1 + a_{m+n}) \cdot (m+n)}{2} = \frac{(m+n-1) \cdot (m+n)}{2}.$$

Упражнения.

1. Дано: $a_1 = 7$; $d = 4$; $n = 13$; требуется найти: a_{13} и S.
2. " $a_n = 65$; $d = 5$; $n = 12$; " a_1 и S.
3. " $a_1 = 10$; $a_n = -9$; $S = 10$; " d и n.
4. " $a_1 = 36$; $a_{15} = 8$; $n = 15$; " d и S.
5. " $a_1 = 16$: $n = 9$; $S_9 = 0$; " a_n и d.
6. " $a_n = 92$; $n = 11$; $S = 517$; " a_1 и d.
7. " $a_1 = 14{,}5$; $d = 0{,}7$; $a_n = 32$; " n и S.
8. " $d = \frac{1}{3}$; $n = 50$; $S = 425$; " a_1 и a_n.
9. " $a_1 = 18$; $d = 6$; $S = 1782$; " a_n и n.
10. " $a_n = 77$; $d = 5$; $S = 623$; " a_1 и n.

11. Сумма трех первых членов прогрессии 21. Сумма трех следующих 48. Найдите прогрессию.

12. Сумма трех первых членов прогрессии 18. Произведение их 120. Найдите прогрессию.

13. Сумма третьего и пятого членов прогрессии 50. Произведение второго члена на восьмой равно 637. Найдите прогрессию.

14. Напишите прогрессию, сумма четвертого и седьмого членов которой равна 50, а сумма пятого и одиннадцатого членов равна 70.

15. Найдите сумму первых 18 чисел, кратных 7.

16. Найдите сумму всех трехзначных чисел.

17. Между числами 7 и 92 вставьте 16 новых чисел так, чтобы они вместе с данными образовали разностную прогрессию.

18. Найдите три числа, образующие разностную прогрессию, если сумма их, равна 51, а сумма квадратов их равна 965.

19. Зная, что свободно падающее тело проходит в первую секунду 4,9 *м* и что ускорение силы тяжести равно 9,8,[1] вычислите (не принимая во внимание сопротивления воздуха), через сколько времени упадет на землю предмет, падающий с высоты 300 *м*.

20. До какой высоты и сколько секунд будет лететь пуля, выпущенная вертикально с начальною скоростью $500 \frac{м}{сек}$?

21. Найдите сумму первых 20 чисел ряда:

$$1 - 3 + 5 - 7 + 9 - \ldots,$$

напишите формулу суммы первых n членов этого ряда для двух случаев: когда n есть число четное и когда оно нечетно.

22. Докажите, что если a, b и c суть три последовательных члена разностной прогрессии, то между ними существует соотношение:

$$a^2 + 8bc = (2b + c)^2.$$

§ 6. Кратная прогрессия.

Кратной прогрессией называется ряд чисел, в котором каждое последующее число получается из предыдущего умножением на одно и то же число, называемое знаменателем прогрессии.

Числа, составляющие прогрессию, называются ее *членами*. Если знаменатель прогрессии по абсолютному значению *больше единицы*, прогрессия называется *возрастающею;* если знаменатель *меньше единицы* — *убывающею*.

Кратная прогрессия обозначается знаком $\div\div$, например, $\div\div$ 1, 3, 9, 27, 81 . . . есть возрастающая кратная прогрессия с знаменателем 3; $\div\div$ 64, 32, 16, 8, 4, . . . есть прогрессия убывающая с знаменателем $\frac{1}{2}$.

Знаменатель прогрессии обозначают буквой q.

Обозначения членов, их числа и суммы остаются те же, как и для разностной прогрессии.

---

[1] Ускорение силы тяжести определяется числом метров, на которое изменяется скорость падающего тела в течение 1 секунды.

§ 7. Вычисление любого члена кратной прогрессии по первому члену и знаменателю прогрессии.

Согласно определению прогрессии:

$$a_2 = a_1 \cdot q$$
$$a_3 = a_2 q = a_1 \cdot q^2$$
$$a_4 = a_3 q = a_1 \cdot q^3 \text{ и т. д.}$$

Уже по этим равенствам можно подметить закономерность в составлении последовательных членов прогрессии. Чтобы найти *общее* выражение любого члена прогрессии, например, порядка n, напишем, основываясь на определении прогрессии, $n-1$ равенство:

$$a_2 = a_1 q$$
$$a_3 = a_2 q$$
$$a_4 = a_3 q$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$a_{n-1} = a_{n-2} q$$
$$a_n = a_{n-1} q$$

и перемножим их почленно. При этом в левую часть произведения войдут множителями все члены от второго до последнего; в правую все члены от первого до предпоследнего, а q войдет множителем $n-1$ раз. В обеих частях равенства можно сократить на произведение:

$$a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots\ldots \cdot a_{n-1}.$$

Тогда в левой части останется только член a_n, а в правой $a_1 \cdot q^{n-1}$; следовательно,

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

т. е. *в кратной прогрессии член порядка n равен произведению первого члена на знаменатель прогрессии в степени, равной числу предшествующих членов.*

Например, в прогрессии: $\div\div$ 2, 4, 8, . . . , имеем $q = 2$.

Член порядка 7, т. е. $a_7 = 2 \cdot 2^6 = 2^7 = 128$.

В прогрессии $\div\div$ 2, 6, 18, 54, . . . имеем $q = 3$.

Член порядка 8, т. е. $a_8 = 2 \cdot 3^7 = 4374$.

§ 8. Вычисление суммы членов кратной прогрессии по первому члену, последнему и знаменателю прогрессии.

Напишем, согласно определению прогрессии, $n-1$ равенство:

$$a_2 = a_1 q$$
$$a_3 = a_2 q$$

$$a_4 = a_3 q$$
$$\dots\dots\dots$$
$$a_{n-1} = a_{n-2} q$$
$$a_n = a_{n-1} q$$

и почленно сложим их. В левой части равенства получим сумму всех членов без первого, т. е. $S - a_1$. В правой, взяв q общим множителем за скобки, будем иметь в скобках сумму всех членов без последнего: $q(S - a_n)$; следовательно, $S - a_1 = q(S - a_n)$.

Определим из полученного равенства значение S:

$$S - a_1 = q \cdot S - q \cdot a_n,$$

откуда

$$S - qS = a_1 - q \cdot a_n;$$

или

$$S(1 - q) = a_1 - a_n \cdot q;$$

следовательно,

$$S = \frac{a_1 - a_n \cdot q}{1 - q}, \quad \dots\dots\dots\dots (2)$$

или, умножив числитель и знаменатель правой части равенства на (-1), получим:

$$S = \frac{a_n \cdot q - a_1}{q - 1}, \quad \dots\dots\dots\dots (3)$$

т. е. *сумма членов кратной прогрессии есть дробь; числитель ее равен разности между произведением последнего члена на знаменатель прогрессии и первым членом; знаменатель есть разность между знаменателем прогрессии и единицей.*

По формуле (2) сумма членов вычисляется с удобством для убывающей прогрессии, по формуле (3) — для возрастающей.

Например, найдем сумму 10 членов прогрессии:

$$\div\div\; 3,\ 6,\ 12,\ 24, \dots$$

Здесь

$$a_1 = 3;\ q = 2;\ n = 10;$$

следовательно,

$$a_{10} = a_1 \cdot q^9 = 3 \cdot 2^9 = 3 \cdot 512 = 1536$$

и тогда

$$S = \frac{1536 \cdot 2 - 3}{2 - 1} = 3069.$$

Точно также для прогрессии: $\div\div$ 128, 64, 32, ... $\left(q = \frac{1}{2}\right)$, сумма 7 членов будет:

$$S_7 = \frac{a_1 - a_7 \cdot q}{1 - q},$$

нс

$$a_7 = a \cdot q^6 = 128 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 = 2;$$

следовательно,

$$S_7 = \frac{128 - 2 \cdot \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{127}{\frac{1}{2}} = 254.$$

Примечание. Подставляя из формулы (1) значение a_n в формулы (2) и (3), найдем *другие* выражения суммы членов кратной прогрессии:

$$S = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q} = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}.$$

По этим формулам сумма вычисляется с удобством, когда даны a_1, q и n.

Так как для пяти количеств a_1, a_n, q, n и S получено два соотношения:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$
$$S = \frac{a_n q - a_1}{q - 1},$$

то, зная любые три количества, можно найти остальные два, получая систем двух уравнений с двумя неизвестными.

И здесь может быть, как и для разностной прогрессии, десять различных случаев:

данные	искомые
1. a_1, q, n	a_n, S
2. a_n, q, n	a_1, S
3. a_1, a_n, n	q, S
4. a_1, a_n, q	n, S
5. n, q, S	a_1, a_n
6. n, a_n, S	a_1, q
7. n, a_1, S	a_n, q
8. a_n, q, S	a_1, n
9. a_1, q, S	a_n, n
10. a_1, a_n, S	q, n

Решим несколько задач.

1. Между двумя данными числами a и b вставить m средних геометрических — значит составить кратную прогрессию, для которой a было бы первым, b последним членом, причем число членов $m + 2$.