

Иовлев Николай Николаевич

**Введение в элементарную
геометрию и тригонометрию
Лобачевского**

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 82-3
ББК 84-4
Н63

Н63 **Николай Николаевич И.**
Введение в элементарную геометрию и тригонометрию Лобачевского / Иовлев Николай Николаевич – М.: Книга по Требованию, 2023. – 70 с.

ISBN 978-5-519-87244-7

Физико-математические науки. Математика. Геометрия. Тригонометрия. Учебник для средней школы

ISBN 978-5-519-87244-7

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2023
© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2023

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг — не самое лучшее решение для восстановления текста в его первоизданном виде, однако, наша цель — вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

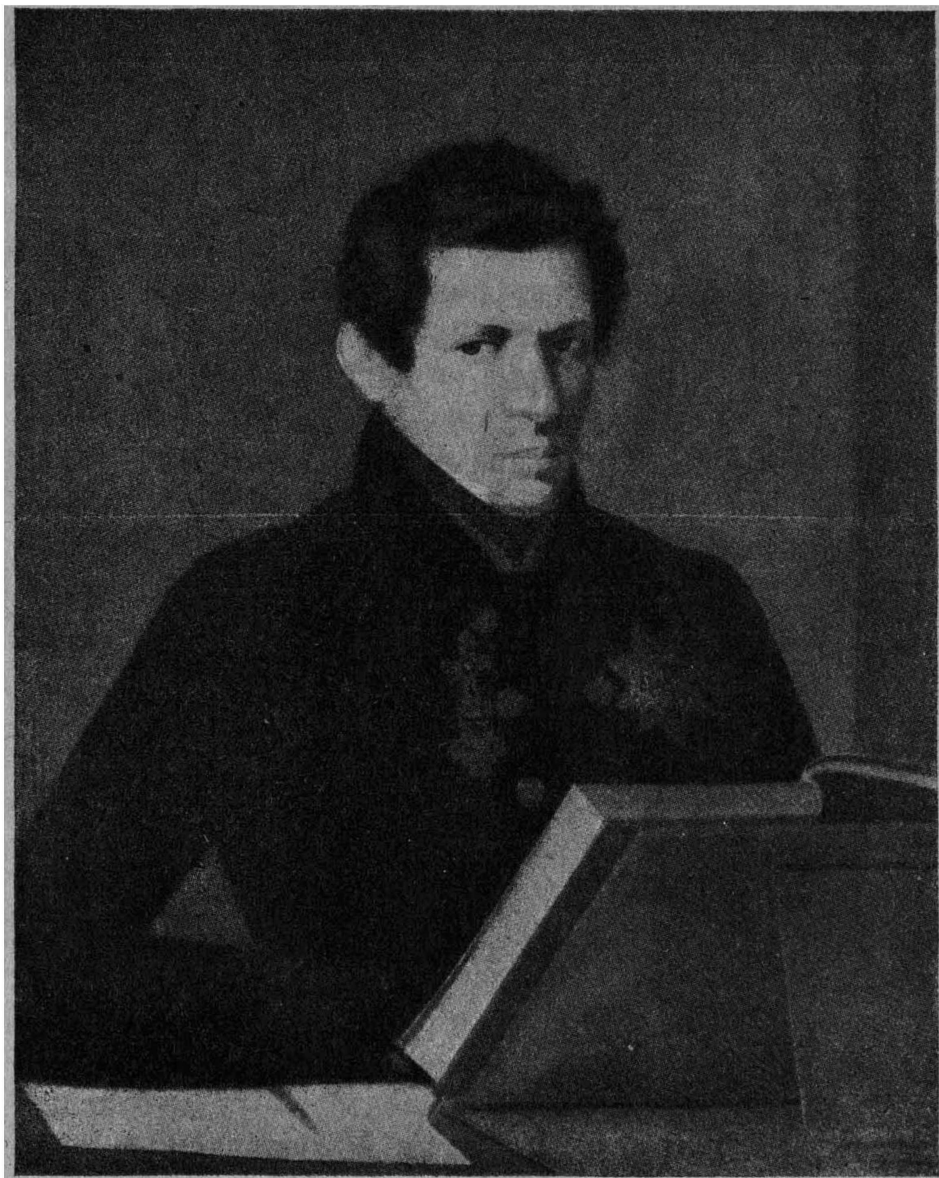
Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания — решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

к себе в первой половине прошлого столетия заостренное внимание математиков, и Лобачевскому удалось сделать одно из величайших в науке открытий. Лобачевский не пошел по старому пути попыток доказать пятый постулат Евклида, а заменил этот постулат ему противоположным и построил новую геометрию, логически безупречно стройную. Не предвидя практического значения новой геометрии, Лобачевский назвал ее „воображаемую“. Это название по существу неправильно, так как геометрия Лобачевского столь же воображаемая, как геометрия Евклида или другие геометрии, которые возникли после трудов Лобачевского. Главная научная заслуга Лобачевского заключается в расширении и углублении понятия о пространстве и его свойствах. Лобачевский показал, что логически мыслимы пространства, обладающие другими свойствами, чем те, которые известны из геометрии Евклида. Так, в геометрии Лобачевского *сумма углов треугольника менее двух прямых*.

Какими же свойствами обладает то пространство, в котором мы существуем, пока решить невозможно. Геометрия Евклида удовлетворяет всем нашим практическим потребностям и не находится в противоречии с астрономическими наблюдениями. Но наши опыты и наблюдения не могут охватить пространство в целом, мы копошимся, так сказать, в очень ограниченной части пространства. Ведь и кривая линия на очень малом ее протяжении обладает свойствами прямой; в самом деле, мы целимся из винтовки, на небольшом расстоянии, по прямой линии и попадаем в цель; между тем, пуля летит не по прямой линии, а по кривой линии-параболе, которая на короткой дистанции почти не отличается от прямой.

Таким образом, Лобачевский, не разрушая практического значения геометрии Евклида, поставил

вопрос о свойствах пространства в полном его объеме и положил начало таким новым исследованиям мате-



Н. И. Лобачевский.

матиков, коих не могло возникнуть, пока все думали, что геометрия Евклида единственно возможная.

Жизнь великого геометра Николая Ивановича Лобачевского очень бедна внешними событиями. Он родился в 1793 году, умер в 1856 году и всю свою жизнь провел в Казани, где был профессором и ректором университета, занимаясь исключительно наукою. Если бы Лобачевский не печатал своих трудов за границу, то они не были бы оценены своевременно. Русские математики, современники Лобачевского, не поняли значения „воображаемой“ геометрии и даже глумились над нею. Прошло не мало лет, пока геометрия Лобачевского не получила всеобщего признания и автор ее не был причислен к величайшим ученым всех времен и народов.

А. Воронец.

ВВЕДЕНИЕ

При систематическом изложении начал геометрии Евклида с целью школьного преподавания, рекомендуется в современных методиках геометрии не увлекаться „научной строгостью“.

Но как только начинают систематически излагать геометрию Лобачевского для „самого первоначального“ ознакомления с нею, так сейчас же считают долгом излагать подробный и тонкий анализ основных понятий геометрии и пяти групп аксиом Гильберта, как основу дальнейшего вполне строгого и научного изложения.

В результате получается настоящий гранитный монолит основ этой науки, о который и „ломает зубы“ большинство интересующихся этой геометрией.

В настоящей статье дано такое изложение первых понятий и теорем геометрии и тригонометрии Лобачевского (по найденному автором методу), которое не

строже изложения учебников Давидова или Киселева и не труднее его.

В виду ограниченных размеров статьи, изложены только те понятия и теоремы геометрии Лобачевского, которые необходимы для вывода основных формул его тригонометрии.

Поэтому автор здесь совсем не касается вопросов: о линии равных расстояний, об измерении площадей, об идеальных точках и пучках и т. д.

Интересующиеся всеми этими вопросами найдут их изложение в следующих книгах:

1) Проф. С. А. Богомолов. *Эволюция геометрической мысли*. Ленинград, 1928, Ц. 1 р. 75 коп.

2) Академик Я. В. Успенский. *Введение в не-Евклидову геометрию Лобачевского — Больши*. Петроград, 1922.

3) Проф. Н. Н. Иовлев. *Главные методы обоснования геометрии Лобачевского*. Самара, 1923.

І. ОБ АКСИОМАХ И ПОСТУЛАТЕ ЕВКЛИДА

В начале учебников Евклидовой геометрии (Киселева и др.) обыкновенно приводятся аксиомы. *Аксиомы* там определяются как истины, очевидные сами по себе, а потому не требующие никакого доказательства, и разделяются обыкновенно на 2 группы:

а) общие аксиомы, относящиеся ко всем величинам, и

б) аксиомы геометрические, которые относятся к величинам, имеющим протяжение.¹

Общие аксиомы:

1. Две величины, равные порознь третьей, равны и между собою.

2. Если к величинам равным прибавим или отнимем от них величины равные, то и результаты получим равные.

3. Если к величинам неравным прибавим или отнимем от них величины равные, то и результаты получим неравные.

Непосредственным следствием аксиомы (3) является положение: целое больше своей части. [Если целое $C = A + B$, то $A + B > 0 + B$, так как $A > 0$, $B = B$.]

Кроме этих аксиом, очень часто пользуются еще одной аксиомой, которая, однако, в большинстве учеб-

¹ См. ниже 8 аксиому Евклида.

ников не приводится и которой пользуются как истинной, самой по себе очевидной. Это так называемый „постулат Архимеда“. Его можно формулировать так:

Если даны две однородные (конечные) величины A и a , то, как бы ни была мала a и велика A , всегда a можно повторить слагаемым такое число (n) раз, что na будет больше A .

Геометрические аксиомы сводятся в учебниках к трем:

1. Аксиома о протяжениях. Пространство и геометрические тела имеют 3 протяжения: длину, ширину и высоту; поверхности — два: длину и ширину; линии — одно, а точки — ни одного.

2. Аксиома о неизменяемости геометрических тел и фигур от перенесения из одного места пространства в другое.

3. Аксиома о прямой. *Прямая линия вполне определяется двумя точками.* (В этом виде аксиома о прямой приводится в тех учебниках, которые претендуют на большую „научность“ изложения; более же педагогично определять прямую, как „кратчайшее расстояние между двумя точками“. В самом деле, даже животное, чтобы скорее добежать до воды, бежит „прямой“; голубь летит домой по прямой линии.)

4. Аксиома о конгруэнтности (совместимости) равных геометрических величин.

Но этих аксиом, которые считаются вполне очевидными, оказывается недостаточно, когда дело доходит до учения о линиях параллельных.

Определяются параллельные линии, как прямые, которые при своем продолжении никогда не пересекаются.

Так называемые „прямые теоремы о параллельных линиях“ могут быть сформулированы так:

Две прямые линии параллельны (т. е. никогда не пересекутся):

- 1) если сумма внутренних (или внешних) односторонних углов равна двум прямым углам; или
- 2) если внутренние (или внешние) накрест-лежащие углы равны между собою; или
- 3) если соответственные углы равны.

Эти теоремы не требуют введения новой аксиомы, но без нее нельзя доказать теоремы обратные:

Если две прямые линии параллельны, то:

1. Сумма двух внутренних (или внешних) односторонних углов равна двум прямым углам.
2. Внутренние (или внешние) накрест-лежащие углы равны.
3. Соответственные углы равны.

Чтобы доказать эти теоремы, а следовательно, и все остальные свойства пространства, из них вытекающие, — необходимо одну из этих теорем принять за аксиому.

Впервые эта аксиома встречается в „Началах геометрии“ знаменитого греческого геометра Евклида, почему и получила название XI аксиомы или пятого постулата Евклида.

*

В основание своих „Начал геометрии“ Евклид положил следующие постулаты и аксиомы:

Постулаты:

Допускается, что:

1. От одной точки до другой какой-нибудь можно провести прямую линию.
2. Конечную прямую можно продолжить неопределенно.
3. Из какой-нибудь точки, как из центра, произвольным радиусом можно описать круг.

Аксиомы:

1. Величины, равные одной и той же величине, равны между собою.

2. Если к величинам равным придадим величины равные, то суммы получим равные.

3. Если от величин равных отнимем величины равные, то остатки получим равные.

4. Если к величинам неравным придадим величины равные, то суммы получим неравные.

5. Если от величин неравных отнимем величины равные, то остатки получим неравные.

6. Величины, двойные одной и той же величины, равны между собою.

7. Половины одной и той же величины равны между собою.

8. Величины, которые по наложении совмещаются, равны между собою.

9. Целое больше своей части.

10. Все прямые углы равны между собою.

11. Если две прямые пересекаются третьей так, что сумма внутренних углов, лежащих по одну сторону третьей, меньше двух прямых углов, — то две первые прямые, по достаточном продолжении, встретятся по ту сторону третьей прямой, на которой сумма внутренних углов меньше двух прямых углов.¹

12. Две прямые линии не могут заключать пространства.

*

Первые 28 теорем первой книги „Начал“ доказаны Евклидом без помощи XI аксиомы, или так называемого „постулата Евклида“, а потому эти теоремы

¹ Эта аксиома, называемая еще „пятым постулатом“ Евклида, может быть формулирована короче так:

Если сумма двух внутренних односторонних углов менее $2d$, то прямые линии пересекутся со стороны этих углов.

определяют свойства пространства, общие и геометрии Евклида, и геометрии Лобачевского, построенной на отрицании этого постулата.

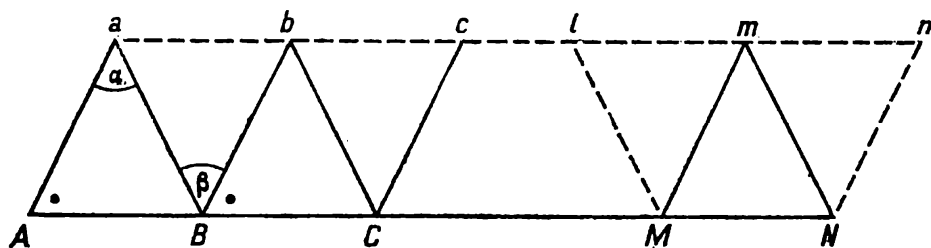
В виду того, что постулат Евклида не обладает той степенью очевидности, как остальные его постулаты и аксиомы, — геометры почти 2000 лет напрягали все усилия доказать этот постулат. Но все эти доказательства неверны, так как опираются на какие-нибудь свойства пространства, являющиеся непосредственными следствиями того же постулата Евклида.

Наконец, сто лет тому назад, великий русский геометр Н. И. Лобачевский построил новую геометрию, основанную на тех же аксиомах, что и Евклидова геометрия, кроме его XI аксиомы, замененной Лобачевским другим постулатом.

Здесь мы изложим только „доказательство“ постулата Евклида, данное знаменитым французским геометром Лежандром.

Одним из ближайших следствий постулата Евклида является предложение о том, что *сумма внутренних углов во всяком треугольнике равна $2d$* ; с этой стороны Лежандр и старается подойти к решению задачи. Прежде всего им доказана так называемая —

Первая теорема Лежандра. *Во всяком треугольнике сумма внутренних углов или менее $2d$, или равна $2d$*



Черт. 1.

Доказательство. Пусть на какой-нибудь прямой отложено последовательно p равных отрезков $AB, BC, \dots, MN$ (черт. 1); на этих отрезках по одну и ту же

сторону прямой построено p равных треугольников, третьи вершины коих находятся в точках $a, b, c, \dots, l, m$.

Отрезки $ab, bc, \dots, lm$, соединяющие эти вершины, равны между собою, и их можно рассматривать, как основания p других равных между собою треугольников $aBb, bCc, \dots, lMm$.

Пополним наш чертеж еще треугольником mNn , равным aBb . Означим угол AaB треугольника AaB буквой α , а угол aBb в треугольнике Bab — буквой β .

Докажем, что угол α менее или равен углу β .

В самом деле, если бы угол α был больше β , то из сравнения треугольников ABa и abB , имеющих по две равных стороны, следовало бы, что большему углу α противолежит и большая сторона: $AB > ab$. Но ломаная $Aabc, \dots, lmnn$ больше прямой AN (равной $AB \cdot p$), а потому

$$Aa + (ab) \cdot p + nN > (AB) \cdot p, \text{ или, так как } Aa = nN, \\ 2Aa > (AB - ab) \cdot p.$$

Но как бы ни была мала разность $(AB - ab)$, при достаточно большом p всегда можем сделать произведение $(AB - ab) \cdot p$ сколь угодно большим,¹ а следовательно, и большим $2Aa$.

Таким образом, наше предположение о том, что угол $\alpha > \beta$, привело нас к нелепости, и остаются предположения, что угол α меньше или равен углу β .

А так как угол $aAB =$ углу bBC , то угол β дополняет сумму углов aAB и aBA треугольника ABa до $2d$. Следовательно, если угол $\alpha = \beta$, то сумма всех трех углов в треугольнике ABa равна $2d$; она менее $2d$, когда $\alpha < \beta$.

Вторая теорема Лежандра. Если в каком-нибудь одном треугольнике сумма внутренних углов равна $2d$

¹ В силу постулата Архимеда (см. выше).