

Р. Гауснер

Начертательная геометрия

Том 3. Конические сечения

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 51
ББК 22.1
Р11

Р11 **Р. Гауснер**
Начертательная геометрия: Том 3. Конические сечения / Р. Гауснер – М.:
Книга по Требованию, 2021. – 96 с.

ISBN 978-5-458-31758-0

Начертательная геометрия.
Том 3. Конические сечения.
с 57 чертежами.

ISBN 978-5-458-31758-0

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2021

© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2021

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.



Серия Книжный Ренессанс

www.samizday.ru/reprint

Отдѣл I.

Проекционные свойства конических сечений.

Перспективные изображения окружности.

1. Во второй части были разобраны те особые перспективы, которые обращают окружность в другую или в самое себя. Теперь рассмотрим те кривые, которые получаются из окружности при произвольном выборе перспективы.

Определение. Перспективные изображения окружности называются коническими сечениями.

Если образовать коническое сечение при помощи центральной проекции окружности на другую плоскость, то проектирующие лучи образуют поверхность прямого или косо́го конуса, в зависимости от того, находится ли центр проекции на одном перпендикуляре над центром окружности или нет. Каждая кривая, перспективная окружности, может быть поэтому рассматриваема, как линия пересечения ее плоскости с поверхностью конуса, чем оправдывается название кривой, перспективной к окружности коническим сечением (см. § 33).

На основании результатов § 45—60, ч. II, можно рассматривать две перспективные фигуры, как соединенные между собой плоской перспективой или перспективой в пространстве, совершенно произвольно. В дальнейшем мы воспользуемся этим; пока что, для вывода основных свойств и учения о сопряженных диаметрах, примем, что окружность и коническое сечение находятся в одной и той же плоскости, а далее, в последующем отделе, выведем соотношения расстояний из сечений круглого конуса.

6 Проекционные свойства конических сечений.

2. При центральной проекции не изменяются отношения положения двух плоских изображений. Из этого замечания следует ряд важнейших теорем о конических сечениях.

Так как точке пересечения двух прямых, соответствует точка пересечения их перспективных изображений, и так как каждая окружность может быть пересечена прямой лежащей в ее плоскости не более, чем в двух точках, то скажем:

Каждое коническое сечение может быть пересечено какой-либо прямой в его плоскости не больше как, в двух точках.

Если точки пересечения секущей окружности совпадают в одну, то то же случится и с точками пересечения соответственной секущей конического сечения, перспективного этой окружности. Поэтому касательной окружности и ее точке касания соответствует касательная конического сечения и ее точке касания, если (соответственно § 17 ч. I) называть касательной конического сечения каждую прямую его плоскости, имеющую с ним только одну общую точку — точку касания.

Из одной точки плоскости окружности можно провести к ней только две касательные, следовательно:

Из одной точки плоскости конического сечения можно провести не больше двух касательных.

Только из полюсов, находящихся вне окружности, можно провести две касательные к окружности, в то время, как из полюса, находящегося внутри ее, нельзя провести ни одной касательной. Соответственно этому говорят:

Коническое сечение разделяет точки его плоскости на лежащие вне и лежащие внутри; из первых можно провести две касательных к коническому сечению, из последних ни одной.

Из этих теорем непосредственно следует, что теорема выведенная в § 75 ч. II неизменно действительна для сечений конуса:

Если через вершины совершенного четырехугольника хорд конического сечения описать совершенный четырехсторонник касательных, то на одной диагонали четырехсторонника касательных находятся две диагональные точки четырехугольника хорд. Треугольник диагоналей первого совпадает с трехсторонником диагоналей последнего.

Полюс и поляр конических сечений.

3. По § 77 ч. II сложное отношение четырех точек или лучей равно таковому их перспективных изображений. Следовательно, четырем гармоничным элементам соответствуют также четыре гармоничных элемента и, таким образом, теоремы о полюсе и поляре, выведенные во II части в § 76, I—IV и § 77 имеют силу и для конических сечений. Одна точка и одна прямая в плоскости конического сечения соответствуют друг другу, как полюс и поляр, так что хорда конического сечения, отсекаемая на любой прямой, проходящей через полюс, делится полюсом и полярной гармонично. Для экономии места мы пренебрежем повторением теорем о теории поляр конических сечений, так как в вышеупомянутых теоремах все остается без изменения, за исключением слова „окружность“, которое следует заменить „коническим сечением“, точно так, как из теоремы § 75 ч. II выведена теорема предыдущего параграфа. Также и построения, данные в § 76 ч. II для нахождения соответственной поляр к данному полюсу и соответственного полюса к данной поляре, неизменно переносятся на конические сечения*).

*) Чтобы исключить какие бы то ни было недоразумения, мы особенно подчеркиваем, что поляр по отношению к коническому сечению, в общем, не перпендикулярна к линии, соединяющей полюс с центром (§ 8) конического сечения, что, однако, выполняется по отношению к окружности.

На основании теории поляр можно разделить точки плоскости конических сечений также на внешние и внутренние. Всем точкам внутри конического сечения соответствуют поляры, не пересекающие его; всем же точкам, расположенным вне конического сечения, соответствуют поляры, пересекающие его в двух различных точках. Если же точка находится на коническом сечении, то ее поляра служит касательной к коническому сечению в этой точке.

Для построения касательных к коническому сечению из точки P , находящейся вне его, строим по § 76, III, ч. II его поляру, и обе точки, в которых она его пересекает, соединяем с P .

4. Теоремы §§ 72, 73, 80—82, дают взаимоотношения, не изменяющиеся центральной проекцией. Следовательно, теоремы Паскаля и Бриансона, равно как и теоремы I—III § 80 ч. II, остаются неизменными и для любых конических сечений.

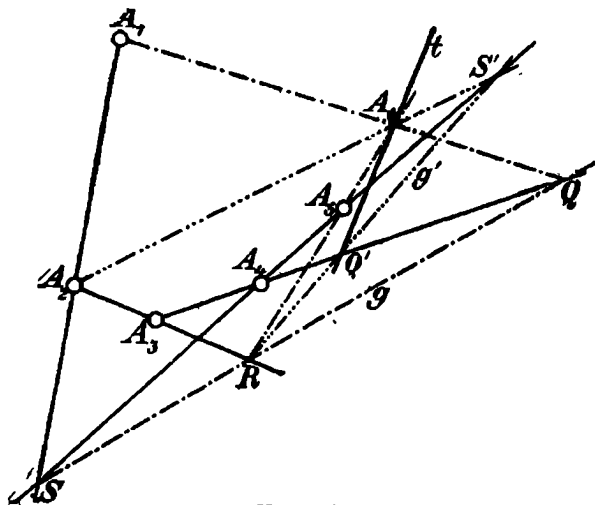
Эти теоремы показывают, что конические сечения определяются пятью данными элементами — точками или касательными, причем дальнейшие точки, или касательные, можно построить непосредственно, не прибегая к перспективному взаимоотношению окружности и конического сечения. Здесь предполагаются шесть задач:

I. Если даны пять точек конического сечения $A_1 \dots A_5$, то шестая точка находится (черт. 1) тем, что рассматриваем $A_1 A_2$ и $A_4 A_5$, как противоположные стороны, и проводим через точку S их пересечения любую прямую g ; если затем соединим $g \times A_2 A_3 = R$ с A_5 и $g \times A_3 A_4 = Q$ с A_1 , то $RA_5 \times QA_1 = A_6$ будет шестой точкой конического сечения. Дальнейшие точки находим при помощи вращения прямой g вокруг S .

Если же надо построить в какой-либо точке, например A_6 , касательную t , то примем (§ 73, ч. II), что в A_6 сходятся две стороны шестиугольника и рассмотрим пятиугольник $A_2 A_3 A_4 A_5 A_6$. Следовательно, мы пользуемся линией, соединяющей $A_2 A_3 \times A_5 A_6 = R$ с $A_2 A_6 \times A_4 A_5 = S'$,

как прямой Паскаля g' , точку пересечения Q' которой с $A_3 A_4$ остается только соединить с A_6 , чтобы получить касательную t .

II. Если даны четыре точки и касательная к одной из них, например A_3, A_4, A_5 и t с точкой касания A_6 , то следующую точку конического сечения конуса A_2 находим тем, что проводим через $A_3 A_4 \times t = Q'$, в качестве прямой Паскаля, любую прямую g' и соединяем $A_4 A_5 \times g' = S'$



Черт. 1.

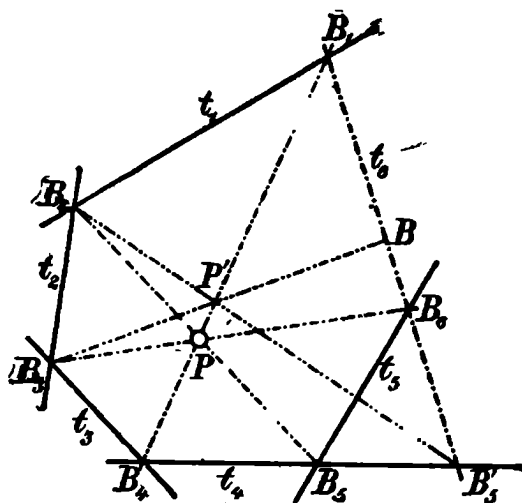
с A_6 , $A_3 A_6 \times g' = R$ с A_3 : $S' A_6 \times R A_3 = A_2$. Этим мы привели задачу II к I.

III. Если даны пять касательных $t_1 \dots t_5$, то находим дальнейшую (черт. 2) касательную t_6 тем, что рассматриваем, напр. $t_1 \times t_2 = B_2$ и $t_4 \times t_5 = B_5$, как две противолежащие вершины и любую точку P на $B_2 B_5$, как точку Брианшона, соединяем с $t_2 \times t_3 = B_3$ и $t_3 \times t_4 = B_4$; тогда линия, соединяющая $B_3 P \times t_5 = B_6$ с $B_4 P \times t_1 = B_1$, будет искомой касательной t_6 ,

Если требуется определить и ее точку касания B , то предположим что в t_6 совпали две касательные шестисторонника и рассматриваем пятисторонник $t_1 t_2 t_3 t_4 t_5$.

Следовательно, определяем точку пересечения $P' = B_2B_5$ с B_1B_4 (где $B_1 = t_1 \times t_6$, $B'_5 = t'_4 \times t_6$) и соединяем ее с B_3 ; тогда $B_3P' \times t_6 = B$ будет искомой точкой.

IV. Даны четыре касательных и точка касания одной из них, например: t_2, t_3, t_4 и t_6 с точкой касания B . Дальнейшую касательную t_1 находим, принимая любую точку P , на линии, соединяющей $t_2 \times t_3 = B_3$ с B , за точку Брианшона и соединяя $B_4P' \times t_6 = B_1$ с $B'_5P' \times t_2 = B_2$; $B_1B_2 = t_1$. Этим задача приведена к III случаю.

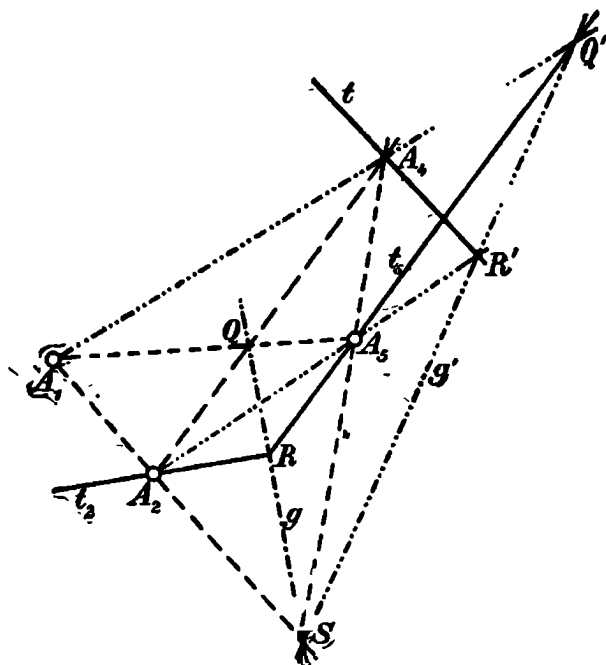


Черт. 2.

V. Если даны три точки и касательные в двух из них, например, A_1, A_2, A_5 , и касательные t_2 и t_6 в двух последних точках (черт. 3), то принимаем t_2 и t_6 за стороны A_2A_3 и A_5A_6 вписанного шестиугольника и строим последнюю вершину A_4 : проводим через $t_2 \times t_6 = R$ произвольную прямую g , соединяем $A_1A_2 \times g = S$ с A_5 и $A_1A_5 \times g = Q$ с A_2 ; тогда $A_2Q \times A_5S = A_4$ будет искомой точкой. Этим задача приведена ко II случаю*).

*) Это построение производится также — без помощи теоремы Паскаля — на основании теоремы I § 80 ч. II. Следует только вместо $A_0, B_0, P_0, Q_0, Z_0, F_0, G_0$, поставить $A_2, A_3, A_1, A_4, R, S, Q$.

Если требуется также и построение касательной t в A_4 , то рассматриваем шестиугольник $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6$, в предположении, что его стороны $A_3 A_4$ и $A_5 A_6$ будут касательными t_4 в A_4 и t_6 в A_6 . Тогда прямая Паскаля этого шестиугольника будет определена при помощи $A_1 A_2 \times A_4 A_5 = S$ и $A_4 A_1 \times t_6 = Q'$; если соединить поэтому $A_2 A_5 \times g' = R'$ с A_4 , то эта прямая будет искомой касательной t в A_4 .



Черт. 3.

VI. Даны три касательные и точки касания двух из них, например t_1, t_2, t_6 и точки касания B_3 и B_6 двух последних. Дальнейшую касательную t_4 находим, принимая (черт. 4) B_3 и B_6 за вершины описанного шестисторонника, а любую точку P на $B_3 B_6$ за точку Бриансона и соединяем ее с B_1 и B_2 . Тогда линия соединяющая $B_1 P \times t_2 = B_4$ с $B_2 P \times t_6 = B_5$ будет искомой касательной t_4 . Этим данный случай приведен к IV случаю.

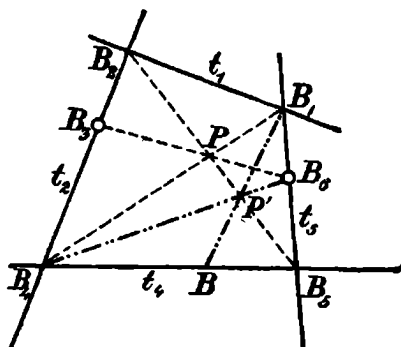
12 Проекционные свойства конических сечений.

Однако его можно привести и к предыдущему случаю, если найти, кроме того, точку B касания $t_4: B_2B_3 \times B_4B_5 = P'$ соединяем с B_1 ; тогда $B_1P' \times t_4 = B$ будет искомой точкой касания.

5. Из предыдущих построений, однако, следует:

Перспективное изображение конических сечений также будет коническим сечением.

Если представить себе данное коническое сечение, построенное по предыдущим параграфам, по пяти элементам, то пяти определяющим его величинам при любой перспективе будут соответствовать также пять определя-



Черт. 4.

ющих величин перспективной ему кривой. Дальнейшие точки и касательные этой кривой могут быть построены также по вышеуказанным способам, так как при любой перспективе нарушения построения не происходит.

Различные виды конических сечений.

6. Особое значение имеет для перспективного изображения положение окружности k по отношению к линии исчезновения e^v избранной перспективы. Так как только перспективные изображения точек, находящихся на e^v , уходят в бесконечность, то сечение конуса k_0 , перспективное к окружности k , не имеет ни одной, или имеет

одну или две бесконечно удаленные точки, в зависимости от того, будет ли окружность k касаться линии исчезновения или нет, или пересекать ее в двух точках. Соответственно этому получают три различных вида конических сечений, называющихся эллипсом, параболой или гиперболой.

Эллипс не обладает бесконечно удаленными точками и является кривой замкнутой на конечном расстоянии. Эллипс, определенный сказанным способом и определенный (§ 15, ч. I), как сродственное изображение окружности того же названия, вполне соответствуют друг другу, что и будет доказано в § 10.

Парабола обладает одной бесконечно удаленной точкой и так как последняя является перспективным изображением точки линии исчезновения e^v , в которой она касается окружности k , то говорят: парабола имеет в своей бесконечно удаленной точке касательной бесконечно удаленную прямую ее плоскости.

Гипербола имеет две бесконечно удаленные точки, которые являются перспективными изображениями двух отдельных точек пересечения окружности k с e^v . Так как касательные к окружности в этих точках не совпадают с e^v , то и их перспективные изображения не могут совпадать с бесконечно удаленной прямой, а находятся на конечном расстоянии. Эти две касательные гиперболы, точки касания которых с гиперболой являются ее бесконечно удаленными точками, называются асимптотами гиперболы.

Так как при параллельной проекции бесконечно удаленные элементы плоскости проектируются в бесконечно удаленные элементы плоскости изображения, то при помощи теоремы в конце § 5 следует:

При параллельной проекции коническое сечение всегда переходит в коническое сечение того же самого вида.

