

Н. Бурбаки

Группы и алгебры Ли

Часть 4

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 51
ББК 22.1
Б91

Б91 **Бурбаки Н.**
Группы и алгебры Ли: Часть 4 / Н. Бурбаки – М.: Книга по Требованию, 2012. –
174 с.

ISBN 978-5-458-31410-7

ISBN 978-5-458-31410-7

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2012

© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2012

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первоизданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

ОТ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Девятая глава книги «Группы и алгебры Ли» трактата Н. Бурбаки посвящена компактным группам Ли и их конечномерным представлениям. Предыдущие восемь глав уже переведены на русский язык (они вышли в издательстве «Мир» в 1972 (гл. IV—VI), 1976 (гл. I—III) и 1978 (гл. VII, VIII) гг.).

Ссылки на уже переведенные части трактата Н. Бурбаки заменены ссылками на соответствующие русские издания; в остальных случаях сохранены ссылки на французские издания.

Я благодарен Н. Бурбаки, приславшему исправления замеченных при переводе ошибок и неточностей в тексте упражнений.

А. Кириллов

КОМПАКТНЫЕ ВЕЩЕСТВЕННЫЕ ГРУППЫ ЛИ¹⁾

В этой главе выражение «группа Ли» означает «группа Ли конечной размерности над полем вещественных чисел», выражение «алгебра Ли» означает, если не оговорено противное, «алгебра Ли конечной размерности над полем вещественных чисел», а выражение «вещественная алгебра Ли» (соотв. «комплексная алгебра Ли») означает «алгебра Ли конечной размерности над полем вещественных чисел» (соотв. «...комплексных чисел»).

Через G_0 обозначается связная компонента единицы (нейтральная компонента) топологической группы G , через $C(G)$ — центр этой группы, через $D(G)$ — ее производная группа (или коммутант), а через $N_G(H)$ или $N(H)$ (соотв. $Z_G(H)$ или $Z(H)$) — нормализатор (соотв. централизатор) подмножества H в группе G .

§ 1. Компактные алгебры Ли

1. Инвариантные эрмитовы формы

В этом пункте k обозначает поле $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. Пусть V — конечномерное векторное k -пространство, Φ — невырожденная положительная эрмитова форма на V^2), G — группа, $\mathfrak{g}$ — некоторая $\mathbb{R}$ -алгебра Ли, $\rho: G \rightarrow GL(V)$ — гомоморфизм групп и $\varphi: \mathfrak{g} \rightarrow gl(V)$ — гомоморфизм $\mathbb{R}$ -алгебр Ли.

а) Форма Φ инвариантна относительно G (соотв. $\mathfrak{g}$) тогда и только тогда, когда эндоморфизм $\rho(g)$ унитарен относительно Φ для любого $g \in G$ (соотв. $\varphi(x)$ антиэрмитов³⁾ относительно Φ для любого $x \in \mathfrak{g}$). Действительно, обозначим символом a^* эндоморфизм, сопряженный относительно Φ к эндоморфизму a пространства V ; для $g \in G$, $x \in \mathfrak{g}$, u и v из V имеем

$$\Phi(\rho(g)u, \rho(g)v) = \Phi(\rho(g)^* \rho(g)u, v),$$

$$\Phi(\varphi(x)u, v) + \Phi(u, \varphi(x)v) = \Phi((\varphi(x) + \varphi(x)^*)u, v).$$

¹⁾ Во всей этой главе ссылка вида *Alg.*, chap. VIII (chap. IX), означает гл. VIII (гл. IX) нового французского издания, которая готовится к печати.

²⁾ Напомним (*Alg.*, chap. IX (см. также *Alg.*, 1966, гл. IX, § 1. — *Перев.*)), что эрмитова форма H на V называется невырожденной, если для любого ненулевого элемента u из V существует $v \in V$, такой, что $H(u, v) \neq 0$.

³⁾ Говорят, что $a \in \text{End}(V)$ антиэрмитов относительно Φ , если сопряженный к нему относительно Φ эндоморфизм a^* равен $-a$. В случае $k = \mathbb{C}$ (соотв. $k = \mathbb{R}$) это означает также, что эндоморфизм ia пространства V (соотв. $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V$) эрмитов.

Для того чтобы $\Phi(\rho(g)u, \rho(g)v) = \Phi(u, v)$ для всех u, v из V , необходимо и достаточно выполнение условия $\rho(g)^* \rho(g) = \text{Id}_V$; аналогично, чтобы $\Phi(\varphi(x)u, v) + \Phi(u, \varphi(x)v) = 0$ для всех u и v из V , необходимо и достаточно выполнение условия $\varphi(x) + \varphi(x)^* = 0$, откуда следует доказываемое утверждение.

б) Если форма Φ инвариантна относительно G (соотв. $\mathfrak{g}$), то ортогональное дополнение к устойчивому подпространству в V устойчиво; в частности, представление ρ (соотв. φ) полупросто (см. *Alg.*, chap. IX); кроме того, для любого $g \in G$ (соотв. любого $x \in \mathfrak{g}$) эндоморфизм $\rho(g)$ (соотв. $\varphi(x)$) пространства V полупрост и его собственные значения по модулю равны 1 (соотв. чисто мнимы); таким образом, $\rho(g)$ унитарен (соотв. $i\varphi(x)$ эрмитов, см. *Alg.*, chap. IX).

в) Пусть $k = \mathbb{R}$. Если G — связная группа Ли, ρ — морфизм групп Ли, $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли группы G и φ — гомоморфизм, отвечающий ρ , то Φ инвариантна относительно G тогда и только тогда, когда она инвариантна относительно $\mathfrak{g}$ (гл. III, § 6, п° 5, следствие 3).

г) Для существования на V инвариантной относительно G невырожденной положительной эрмитовой формы необходимо и достаточно, чтобы подгруппа $\rho(G)$ в $\text{GL}(V)$ была относительно компактной (*Интегр.*, гл. VII, § 3, п° 1, предложение 1).

2. Связные коммутативные вещественные группы Ли

Пусть G — связная коммутативная (вещественная) группа Ли. Экспоненциальное отображение

$$\exp_G: L(G) \rightarrow G$$

является сюръективным морфизмом групп Ли с дискретным ядром (гл. III, § 6, п° 4, предложение 11), который наделяет $L(G)$ структурой связной накрывающей группы Ли G .

а) Следующие условия эквивалентны: G односвязна, $\exp_G$ является изоморфизмом, G изоморфна $\mathbb{R}^n$ ($n = \dim G$). Если в этом случае при помощи изоморфизма $\exp_G$ перенести на группу G структуру векторного пространства $L(G)$, то G наделяется структурой векторного пространства, которая является единственной такой структурой, согласованной со структурой группы и топологией на G . Односвязные коммутативные группы Ли называются *векторными* группами (Ли); если специально не оговорено противное, будем в дальнейшем считать их наделенными структурой векторного $\mathbb{R}$ -пространства указанным выше способом.

б) Обозначим через $\Gamma(G)$ ядро отображения $\exp_G$. Согласно *Тор. ген.*, chap. VII, p. 4, th. 1, группа G компактна тогда и только тогда, когда $\Gamma(G)$ — решетка в $L(G)$, т. е. (см. там же) когда ранг свободного $\mathbb{Z}$ -модуля $\Gamma(G)$ равен размерности G . Обратно, если L — конечномерное векторное $\mathbb{R}$ -пространство и Γ — решетка в L , то топологическая факторгруппа L/Γ является связной компактной коммутативной группой Ли.

Связные компактные коммутативные группы Ли называются *вещественными торами* или (в этой главе) просто *торами*.

в) В общем случае пусть E — векторное подпространство в $L(G)$, порожденное $\Gamma(G)$, и пусть V — его дополнительное подпространство. Тогда G является прямым произведением своих подгрупп Ли $\exp(E)$ и $\exp(V)$; первая является тором, а вторая — векторной группой. Наконец, любая компактная подгруппа в G содержится в $\exp(E)$ (поскольку ее проекция в $\exp(V)$ обязательно равна единичному элементу); таким образом, подгруппа $\exp(E)$ является единственной *максимальной* компактной подгруппой в G .

Рассмотрим, например, $G = \mathbb{C}^*$; отождествим $L(G)$ с $\mathbb{C}$, так что экспоненциальным отображением для G будет $x \mapsto e^x$. Тогда $\Gamma(G) = 2\pi i\mathbb{Z}$, $E = i\mathbb{R}$ и $\exp(E) = \mathbb{U}$. Если положить $V = \mathbb{R}$, то $\exp(V) = \mathbb{R}_+^*$, и мы получаем изоморфизм $\mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{U} \times \mathbb{R}_+^*$, построенный в *Общ. топ.* 1975, гл. VIII, § 1, п° 3.

г) Отметим, наконец, что $\exp_G: L(G) \rightarrow G$ является универсальным накрытием группы G и, следовательно, $\Gamma(G)$ естественным образом отождествляется с фундаментальной группой группы G .

3. Компактные алгебры Ли

Предложение I. Пусть $\mathfrak{g}$ — (вещественная) алгебра Ли. Следующие условия эквивалентны:

- (i) $\mathfrak{g}$ изоморфна алгебре Ли некоторой компактной группы Ли.
- (ii) Группа $\text{Int}(\mathfrak{g})$ (гл. III, § 6, п° 2, определение 2) компактна.
- (iii) На $\mathfrak{g}$ существует инвариантная билинейная форма (гл. I, § 3, п° 6), которая невырождена, положительна и симметрична.
- (iv) $\mathfrak{g}$ редуктивна (гл. I, § 6, п° 4, определение 4). Для любого $x \in \mathfrak{g}$ эндоморфизм $\text{ad } x$ полупрост и имеет чисто мнимые собственные значения.
- (v) $\mathfrak{g}$ редуктивна, и ее форма Киллинга B отрицательна.

(i) $\Rightarrow$ (ii). Если $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли компактной группы Ли G , то группа $\text{Int}(\mathfrak{g})$ отделима и изоморфна факторгруппе компактной группы G_0 (гл. III, § 6, п° 4, следствие 4); значит, она компактна.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Если группа $\text{Int}(\mathfrak{g})$ компактна, то на $\mathfrak{g}$ существует симметрическая билинейная форма, которая невырождена, положительна и инвариантна относительно $\text{Int}(\mathfrak{g})$ (п° 1) и, таким образом, инвариантна относительно присоединенного представления алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

(iii) $\Rightarrow$ (iv). Если (iii) выполнено, то присоединенное представление алгебры Ли $\mathfrak{g}$ полупросто (п° 1), а следовательно, $\mathfrak{g}$ редуктивна; кроме того, эндоморфизмы $\text{ad } x$ для $x \in \mathfrak{g}$ обладают требуемыми свойствами (п° 1).

(iv) $\Rightarrow$ (v). Для любого $x \in \mathfrak{g}$ имеем $B(x, x) = \text{Tr}((\text{ad } x)^2)$; таким образом, $B(x, x)$ является суммой квадратов собственных значений оператора $\text{ad } x$ и, следовательно, отрицательна, если эти значения чисто мнимые.

(v) $\Rightarrow$ (i). Пусть $\mathfrak{g}$ редуктивна, т. е. является произведением коммутативной подалгебры $\mathfrak{c}$ и полупростой подалгебры $\mathfrak{z}$ (гл. I, § 6, п° 4, предложение 5). Форма Киллинга алгебры Ли $\mathfrak{z}$ является ограничением на $\mathfrak{z}$

формы B , т. е. невырожденной и отрицательной, если B отрицательна. Подгруппа $\text{Int}(\mathfrak{s})$ в $\text{GL}(\mathfrak{s})$ замкнута (является связной компонентой единицы в $\text{Aut}(\mathfrak{s})$, гл. III, § 10, п° 2, следствие 2) и оставляет инвариантной невырожденную положительную форму $-B$; следовательно, она компактна, и $\mathfrak{s}$ изоморфна алгебре Ли компактной группы Ли $\text{Int}(\mathfrak{s})$. Кроме того, так как $\mathfrak{s}$ коммутативна, она изоморфна алгебре Ли тора T . Таким образом, $\mathfrak{g}$ изоморфна алгебре Ли компактной группы Ли $\text{Int}(\mathfrak{s}) \times T$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Компактной ¹⁾ алгеброй Ли называется любая алгебра Ли, удовлетворяющая условиям (i) — (v) предложения 1.

Таким образом, компактная алгебра Ли является произведением коммутативной алгебры на компактную полупростую алгебру. Другими словами, чтобы алгебра Ли была компактной, необходимо и достаточно, чтобы она была редуктивной, а ее производная алгебра была компактной.

Алгебра Ли компактной группы Ли компактна.

Предложение 2. а) Произведение конечного числа алгебр Ли является компактной алгеброй Ли тогда и только тогда, когда каждый сомножитель компактен.

б) Подалгебра компактной алгебры Ли компактна.

в) Пусть $\mathfrak{b}$ — идеал компактной алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Тогда алгебра Ли $\mathfrak{g}/\mathfrak{b}$ компактна и расширение $\mathfrak{b} \rightarrow \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{b}$ тривиально.

Утверждения а) и б) следуют из условия (iii) предложения 1. Часть в) следует из а) и из того факта, что в редуктивной алгебре Ли все идеалы являются прямыми сомножителями (гл. I, § 6, п° 4, следствие предложения 5).

Предложение 3. Пусть G — группа Ли, такая, что группа ее связных компонент конечна. Следующие условия эквивалентны:

- (i) Алгебра Ли $L(G)$ компактна.
- (ii) Группа $\text{Ad}(G)$ компактна.
- (iii) На $L(G)$ существует невырожденная положительная симметрическая билинейная форма, инвариантная относительно присоединенного представления группы Ли G .

(iv) На G существует риманова метрика, инвариантная относительно левых и правых сдвигов.

(i) $\Rightarrow$ (ii). Если $L(G)$ компактна, то группа $\text{Ad}(G_0) = \text{Int}(L(G))$ компактна; поскольку она имеет конечный индекс в $\text{Ad}(G)$, последняя группа также компактна.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Это следует из п° 1.

(iii) $\Rightarrow$ (i). Так как $\text{Int}(L(G)) \subset \text{Ad}(G)$, то утверждение вытекает из п. (iii) предложения 1.

¹⁾ Отметим, что вещественное топологическое векторное пространство может быть компактным топологическим пространством, только если оно нулевое.

(iii) $\Leftrightarrow$ (iv). Это следует из гл. III, § 3, п° 13.

4. Группы с компактными алгебрами Ли

ТЕОРЕМА 1 (Г. Вейль). Пусть G — связная группа Ли, алгебра Ли которой компактна и полупроста. Тогда G компактна и ее центр конечен.

Поскольку G полупроста, ее центр D дискретен. Кроме того, факторгруппа G/D изоморфна $\text{Ad}(G)$ (гл. III, § 6, п° 4, следствие 4), а значит, компактна (предложение 3). Наконец, G/D совпадает со своей производной группой (гл. III, § 9, п° 2, следствие предложения 4). Таким образом, теорема вытекает из предложения 5 из *Интегр.*, гл. VII, § 3, п° 2.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть G — связная группа Ли с компактной алгеброй Ли. Существуют тор T , односвязная полупростая компактная группа Ли S , векторная группа V и сюръективный морфизм с конечным ядром $f: V \times T \times S \rightarrow G$. Если G компактна, то группа V состоит лишь из единичного элемента.

Пусть C (соотв. S) — односвязная группа Ли, алгебра Ли которой изоморфна центру (соотв. производной алгебре) алгебры Ли $L(G)$. Тогда C — векторная группа, S — компактная группа с конечным центром (теорема 1) и G отождествляется с факторгруппой $C \times S$ по дискретной подгруппе D , которая центральна (*Интегр.*, гл. VII, § 3, п° 2, лемма 4). Поскольку образ D при отображении в S централен и, следовательно, конечен, то $D \cap C$ — подгруппа конечного индекса в D . Пусть C' — векторное подпространство в C , порожденное $D \cap C$, и V — дополнительное подпространство. Тогда группа $T = C'/(D \cap C)$ является тором, и G изоморфна факторгруппе произведения $V \times T \times S$ по некоторой конечной группе.

Если G компактна, то компактно и произведение $V \times T \times S$ (*Общ. топ.*, 1969, гл. III, § 4, п° 1, следствие 2 предложения 2), а следовательно, группа V компактна, откуда $V = \{e\}$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть G — связная компактная группа Ли. Тогда $C(G)_0$ — тор, $D(G)$ — компактная полупростая связная группа Ли и морфизм $(x, y) \mapsto xy$ из $C(G)_0 \times D(G)$ в G является конечным накрытием.

В обозначениях предложения 4 $V = \{e\}$ и подгруппы $f(T)$ и $f(S)$ в G компактны и, значит, замкнуты. Поэтому достаточно показать, что $f(T) = C(G)_0$, $f(S) = D(G)$. Имеем $L(G) = L(f(T)) \times L(f(S))$. Поскольку S полупроста, а T коммутативна, $L(f(T)) = \mathcal{Z}(L(G)) = L(C(G)_0)$ (гл. III, § 9, п° 3, предложение 8) и $L(f(S)) = \mathcal{O}L(G) = L(D(G))$ (гл. III, § 9, п° 2, следствие предложения 4), откуда следует доказываемое утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 2. Центр и фундаментальная группа полупростой связной компактной группы Ли конечны, а ее универсальная накрывающая компактна.

В обозначениях предложения 4 группы V и T состоят лишь из единичного элемента; таким образом, S является универсальной накрывающей группы Ли G , и фундаментальная группа группы Ли G изоморфна $\text{Ker } f$, а следовательно, конечна. Поскольку G полупроста, ее центр D дискретен и, значит, конечен.

Следствие 3. *Фундаментальная группа связной компактной группы Ли G является $\mathbb{Z}$ -модулем конечного типа, и ее ранг равен размерности $C(G)$.*

Действительно, в обозначениях следствия 1 фундаментальная группа группы Ли $C(G)_0$ изоморфна $\mathbb{Z}^n$, где $n = \dim C(G)_0$, а фундаментальная группа группы Ли $D(G)$ конечна (следствие 2).

Следствие 4. *Пусть G — связная компактная группа Ли. Следующие условия эквивалентны:*

- (i) G полупроста;
- (ii) $C(G)$ конечна;
- (iii) $\pi_1(G)$ конечна.

Если G односвязна, то она полупроста.

Это вытекает из следствий 1—3.

Следствие 5. *Пусть G — связная компактная группа Ли. Тогда $\text{Int}(G)$ — связная компонента единицы группы Ли $\text{Aut}(G)$ (гл. III, § 10, п° 2).*

Пусть $f \in \text{Aut}(G)_0$. Тогда f индуцирует автоморфизм f_1 группы $C(G)_0$ и автоморфизм f_2 группы $D(G)$ и $f_1 \in \text{Aut}(C(G)_0)_0$, $f_2 \in \text{Aut}(D(G))_0$. Поскольку группа $\text{Aut}(C(G)_0)$ дискретна (Тор. gen., chap. VII, р. 15, ргор. 5), то $f_1 = \text{Id}$; поскольку $D(G)$ полупроста, то, согласно следствию 2 теоремы 1 из гл. III, § 10, п° 2, существует элемент g из $D(G)$, такой, что $f_2(x) = gxg^{-1}$ для всех $x \in D(G)$. Для любого $x \in C(G)_0$ имеем $gxg^{-1} = x = f_1(x)$; так как $G = C(G)_0 \cdot D(G)$, то из этого следует, что $gxg^{-1} = f(x)$ для всех $x \in G$; таким образом, $f \in \text{Int}(G)$.

Предложение 5. *Пусть G — группа Ли с компактной алгеброй Ли.*

а) *Предположим, что G связна. Тогда существует наибольшая компактная подгруппа K в G , которая связна. Существует замкнутая центральная векторная (п° 2) подгруппа N в G , такая, что G является прямым произведением $N \times K$.*

б) *Предположим, что группа связных компонент группы G конечна. Тогда*

(i) *Любая компактная подгруппа в G содержится в максимальной компактной подгруппе.*

(ii) *Если K_1 и K_2 — две максимальные компактные подгруппы в G , то существует $g \in G$, такой, что $K_2 = gK_1g^{-1}$.*

(iii) Пусть K — максимальная компактная подгруппа в G . Тогда $K \cap G_0$ совпадает с K_0 ; это наибольшая компактная подгруппа в G_0 .

(iv) Существует замкнутая центральная векторная подгруппа N в G_0 , нормальная в G и такая, что для любой максимальной компактной подгруппы K в G группа Ли G_0 является прямым произведением K_0 на N , а G — полупрямым произведением K на N .

а) Используем обозначения предложения 4. Проекция $\text{Ker } f$ на V является конечной подгруппой векторной группы V и, значит, совпадает с единичным элементом. Из этого следует, что $\text{Ker } f$ содержится в $T \times S$, а также что G является прямым произведением векторной группы $N = f(V)$ и компактной группы $K = f(T \times S)$. Проекция любой компактной подгруппы группы Ли G в N совпадает с единичным элементом, и, следовательно, эта подгруппа содержится в K . Это доказывает а).

б) Предположим теперь, что группа G/G_0 конечна. Согласно а), G_0 является прямым произведением своей наибольшей компактной подгруппы M на векторную подгруппу P ; очевидно, что подгруппа M в G нормальна. Пусть $\mathfrak{n}$ — векторное подпространство в $L(G)$, дополнительное к подпространству $L(M)$ и устойчивое относительно присоединенного представления группы G (п° 1 и п° 3, предложение 3); тогда $\mathfrak{n}$ — идеал в $L(G)$ и $L(G) = L(M) \times \mathfrak{n}$. Пусть N — интегральная подгруппа в G с алгеброй Ли $\mathfrak{n}$; согласно предложению 14 из гл. III, § 6, п° 6, она нормальна в G . Проекция из $L(G)$ в $L(P)$ с ядром $L(M)$ индуцирует изоморфизм $\mathfrak{n}$ на $L(P)$; из этого следует, что проекция G_0 на P индуцирует этальный морфизм N на P ; поскольку P односвязна, это изоморфизм, и N — векторная подгруппа. Морфизм $(x, y) \mapsto xy$ из $M \times N$ в G_0 является инъективным (поскольку $M \cap N$ равно единичному элементу) этальным морфизмом, а следовательно, изоморфизмом. Из этого вытекает, что N — замкнутая подгруппа в G и что факторгруппа G/N компактна, поскольку G_0/N компактна, а G/G_0 конечна (Общ. топ., 1969, гл. III, § 4, п° 1, следствие 2 предложения 2).

Согласно предложению 3 из Интегр., гл. VII, § 3, п° 2, любая компактная подгруппа в G содержится в максимальной компактной подгруппе, все максимальные компактные подгруппы в G сопряжены и для любой максимальной компактной подгруппы K в G группа Ли G является полупрямым произведением K на N . Поскольку G_0 содержит N , то она является полупрямым произведением N на $G_0 \cap K$; из этого следует, что $G_0 \cap K$ связна и, значит, совпадает с K_0 ; так как $K/(G_0 \cap K)$ изоморфна G/G_0 , то она конечна; наконец, очевидно, что K_0 является наибольшей компактной подгруппой в G_0 согласно а).

СЛЕДСТВИЕ. Если N удовлетворяет условиям б) (iv) и если K_1 и K_2 — две максимальные компактные подгруппы в G , то существует элемент $n \in N$, такой, что $nK_1n^{-1} = K_2$.

Действительно, согласно (ii), существует элемент $g \in G$, такой, что $gK_1 g^{-1} = K_2$; согласно (iv), существуют $n \in N$ и $k \in K_1$, такие, что $g = nk$. Таким образом, элемент n обладает требуемым свойством.

§ 2. Максимальные торы компактных групп Ли

1. Подалгебры Картана компактных алгебр Ли

Лемма 1. Пусть G — группа Ли, K — компактная подгруппа в G и F — инвариантная билинейная форма на $L(G)$. Пусть $x, y \in L(G)$. Существует элемент k из K , такой, что для всех $u \in L(K)$ имеем $F(u, [(Ad k)(x), y]) = 0$.

Функция $v \mapsto F((Ad v)(x), y)$ из K в $\mathbb{R}$ непрерывна и, следовательно, имеет минимум в некоторой точке $k \in K$. Пусть $u \in L(K)$; положим

$$h(t) = F((Ad \exp(tu).k)(x), y), t \in \mathbb{R}.$$

Для всех t имеем $h(t) \geq h(0)$. С другой стороны, согласно предложению 44 из гл. III, § 3, п° 12, имеем

$$\frac{dh}{dt}(0) = F([u, (Ad k)(x)], y) = F(u, [(Ad k)(x), y]),$$

откуда следует доказательство леммы (FVR, chap. I, p. 20, prop. 7).

Теорема 1. Пусть $\mathfrak{g}$ — компактная алгебра Ли. Подалгебры Картана алгебры Ли $\mathfrak{g}$ (гл. VII, § 2, п° 1, определение 1) являются ее максимальными коммутативными подалгебрами; в частности, $\mathfrak{g}$ является объединением своих подалгебр Картана. Группа $\text{Int}(\mathfrak{g})$ действует транзитивно на множестве подалгебр Картана алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Поскольку $\mathfrak{g}$ редуктивна, ее подалгебры Картана коммутативны (гл. VII, § 2, п° 4, следствие 3 теоремы 2). Обратно, пусть $\mathfrak{t}$ — коммутативная подалгебра в $\mathfrak{g}$. Согласно предложению 1 из § 1, п° 3, эндоморфизм $\text{ad } x$ полупрост для всех $x \in \mathfrak{t}$. Согласно предложению 10 из гл. VII, § 2, п° 3, существует подалгебра Картана алгебры Ли $\mathfrak{g}$, содержащая $\mathfrak{t}$. Это доказывает первое утверждение теоремы.

Пусть $\mathfrak{t}$ и $\mathfrak{t}'$ — две подалгебры Картана алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Докажем, что существует автоморфизм $u \in \text{Int}(\mathfrak{g})$, такой, что $u(\mathfrak{t}) = \mathfrak{t}'$. Согласно предложению 1 из § 1, п° 3, можно предполагать, что $\mathfrak{g}$ имеет вид $L(G)$, где G — связная компактная группа Ли, и на $\mathfrak{g}$ можно выбрать невырожденную инвариантную симметрическую билинейную форму F . Пусть x (соотв. x') — регулярный элемент алгебры $\mathfrak{g}$, такой, что $\mathfrak{t} = \mathfrak{g}^0(x)$ (соотв. $\mathfrak{t}' = \mathfrak{g}^0(x')$) (гл. VII, § 3, п° 3, теорема 2). Применяя лемму 1 при $K = G$, видим, что существует такой элемент $k \in G$, что элемент $[(Ad k)(x), x']$ ортогонален $\mathfrak{g}$ относительно F и, стало быть, равен нулю. Таким образом, $(Ad k)(x) \in \mathfrak{g}^0(x') = \mathfrak{t}'$ и, следовательно, $\mathfrak{g}^0((Ad k)(x)) = \mathfrak{t}'$, поскольку эле-

мент $(\text{Ad } k)(x)$ регулярен. Мы приходим к заключению, что $(\text{Ad } k)(t) = t'$. Теорема доказана.

Следствие. Пусть t и t' — две подалгебры Картана в $\mathfrak{g}$, α — подмножество в t , u — автоморфизм алгебры Ли $\mathfrak{g}$, переводящий α в t' . Существует элемент v из $\text{Int}(\mathfrak{g})$, такой, что $u \circ v$ отображает t на t' и совпадает с u на α .

Положим $G = \text{Int}(\mathfrak{g})$ и рассмотрим стабилизатор $Z_G(\alpha)$ подмножества α в G ; это подгруппа Ли в G с алгеброй Ли $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\alpha)$, состоящей из тех элементов алгебры Ли $\mathfrak{g}$, которые перестановочны со всеми элементами множества α (гл. III, § 9, п° 3, предложение 7). Тогда t и $u^{-1}(t')$ — две подалгебры Картана компактной алгебры Ли $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\alpha)$. Согласно теореме 1, существует элемент v из $Z_G(\alpha)$, такой, что $v(t) = u^{-1}(t')$. Этот элемент обладает нужными свойствами.

2. Максимальные торы

Пусть G — группа Ли. Тором в G называется любая замкнутая подгруппа этой группы Ли, являющаяся тором (§ 1, п° 2), т. е. любая коммутативная связная компактная подгруппа. Максимальные элементы множества торов в группе G , упорядоченного по включению, называются *максимальными торами* в G .

ТЕОРЕМА 2. Пусть G — связная компактная группа Ли.

а) Алгебры Ли максимальных торов в группе Ли G являются подалгебрами Картана в $L(G)$.

б) Пусть T_1 и T_2 — два максимальных тора в G . Существует элемент $g \in G$, такой, что $T_2 = gT_1g^{-1}$.

в) G является объединением своих максимальных торов.

Пусть t — подалгебра Картана в $L(G)$. Интегральная подгруппа в G с алгеброй Ли t замкнута (гл. VII, § 2, п° 1, следствие 4 предложения 4) и коммутативна (теорема 1), а следовательно, является тором в G . Если T — максимальный тор в G , то его алгебра Ли коммутативна и, стало быть, содержится в некоторой подалгебре Картана алгебры Ли $L(G)$ (теорема 1). Отсюда следует, что все максимальные торы в группе Ли G суть в точности ее интегральные подгруппы, ассоциированные с подалгебрами Картана алгебры Ли $L(G)$. Утверждение а) доказано. Утверждение б) следует из теоремы 1, поскольку канонический гомоморфизм $G \rightarrow \text{Int}(L(G))$ сюръективен (гл. III, § 6, п° 4, следствие 4 предложения 10).

Обозначим через X объединение максимальных торов в группе G , и пусть T — максимальный тор в G . Образом непрерывного отображения $(g, t) \mapsto gtg^{-1}$ из $G \times T$ в G является множество X , которое тем самым замкнуто в G . Для доказательства в) достаточно убедиться в том, что X открыто в G . Поскольку X устойчиво относительно внутренних авто-