Р.В. Гангнус, Ю.О. Гурвиц

Геометрия

Часть 1. Планиметрия

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 51
ББК 22.1
Р11

Р.В. Гангнус

Р11 Геометрия: Часть 1. Планиметрия / Р.В. Гангнус, Ю.О. Гурвиц – М.: Книга по Требованию, 2013. – 322 с.

ISBN 978-5-458-27266-7

Настоящая книга ставит своей задачей оказать посильную помощь в деле постановки преподавания геометрии преподавателю средней школы, а также слушателям педагогических институтов, изучающим методику геометрии и ведущим практические занятия в школе.Авторы отнюдь не пытались исчерпать в данной книге с надлежащей полнотой научного изложения всех вопросов как общей, так и частной методики. Да это было и невозможно, принимая во внимание краткость срока, который мог быть использован авторами для написания этой книги.В силу этого авторы сознательно уделили мало внимания вопросам общей методики, заострив главным образом внимание на вопросах частной методики, а особенно на решении задач на построение, чему, к сожалению, при занятиях геометрией в школе не отводилось до настоящего времени должного места.Материал книги в отдельных своих частях выходит за пределы программы средней школы; всегда он должен быть проработан преподавателем, ибо преподаватель не может ограничиваться только рамками того учебника, по которому ведется работа в школе.При написании книги была использована помимо методической литературы по геометрии на русском языке также и иностранная методическая литература, перечень которой приводится в книге. ч.1. Планиметрия.

ISBN 978-5-458-27266-7

I. НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ОБЩЕЙ МЕТОДИКИ ГЕОМЕТРИИ.

§ 1. Возникновение геометрии и „Начала“ Евклида.

1. Геометрия, как и всякая наука, возникла под влиянием жизненных потребностей. Необходимость повседневного удовлетворения своих потребностей ставит человека перед целым рядом вопросов о форме окружающих его предметов, о вычислениях, связанных с землемерием, строительным делом и т. п. Слово „геометрия“ означает „землемерие“ и ясно указывает источник его происхождения.

Имеются вполне достоверные сведения о довольно значительном развитии геометрических знаний в Египте более чем за 2 тысячи лет до начала нашей эры.

Узкая плодородная полоса земли между пустыней и рекой Нилом в древнем Египте ежегодно подвергалась затоплению, и каждый разлив реки смывал границы участков, принадлежавших отдельным лицам. После спада воды требовалось с возможно большей точностью водворять каждое лицо на принадлежавший ему участок, ибо каждый квадратный метр плодородной земли ценился весьма высоко. Это повелительно требовало заняться вопросами измерения земельных участков, т. е. землемерием — геометрией. Помимо этого египтяне, ведя развитую торговлю, нуждались в умении измерять емкость сосудов; нуждались они также в астрономических сведениях, на которых основывалось искусство кораблевождения.

Выдающиеся постройки египтян — пирамиды, которые сохранились до настоящего времени, свидетельствуют, что их сооружения требовали большого знания пространственных форм.

Все это указывает на чисто опытное происхождение геометрии. Однако надо помнить, что не один только опыт содействовал развитию геометрии; размышления человека над отдельными явлениями, способность человека отвлечься от реального образа и мыслить абстрактно, создавать в своем воображении различные образы, воспроизводить их, размышлять над ними, сопоставлять результаты наблюдений над теми или другими образами, а также обобщать результаты накопленного и проверенного опыта в должной мере способствовали и способствуют развитию геометрии как науки.

Путем проб, через ряд ошибок и последующих их исправлений человек постепенно доходил до правильного решения геометрических проблем, настоятельно выдвигаемых жизненной необходимостью. Так, площадь равнобедренного треугольника в некоторых случаях первоначально ошибочно определяли как половину произведения боковой стороны и основания. Это ошибочное решение давало хорошее приближение, если углы при основании равнобедренного треугольника мало отличались от прямого угла.

Такое правило для измерения площадей передавалось из поколения в поколение; насколько живуче это правило, несмотря на его ошибочность, показывает тот факт, что и у нас, в глухих деревнях, еще до последнего времени пользовались им при обмере клиновидных полей.

По свидетельству Геродота, греческого историка, жившего за 25 столетий до нашего времени, „Сезострис, египетский царь, произвел деление земель, отмежевав каждому египтянину участок по жребию; сообразно этим участкам с их владельцев ежегодно взимали налоги.

Если Нил заливал чей-либо участок, то пострадавший обращался к царю и докладывал ему о случившемся. Тогда царь посылал землемеров (геометров); они измеряли, насколько уменьшился участок, и сообразно этому понижали налог. Вот откуда возникла геометрия и перешла из этой страны в Грецию".

Древнеегипетскую культуру в области математики продолжали греки, которые не только преемственно усвоили себе весь опыт египетской геометрии, но и пошли гораздо дальше египтян; они сумели привести в систему накопленные геометрические знания и таким образом заложить начало геометрии как науки.

Попытку создания такой системы геометрических знаний мы видим в Древней Греции на протяжении V и IV вв. до нашей эры.

„Начала".

2. Первое собрание решений наиболее простых геометрических задач и предложений под названием „Начал", о котором дошли до нас сведения, было составлено Гиппократом (в V в. до нашей эры). Дальнейшие успехи геометрии потребовали создания нового, более обширного сборника „Начал", составление которого приписывают Леону. Наконец, последними из „Начал", достигшими всеобщего признания и дошедшими до нас, были „Начала" Евклида, жившего в александрийский период греческой истории, в III в. до нашей эры.

Две тысячи лет этот замечательный документ человеческого знания считался непревзойденным образцом изложения систематического курса элементарной геометрии.

Спрашивается, в чем заключается основная особенность системы знаний, данной Евклидом в его „Началах"?

Все предложения Евклид доказывает чисто умозрительно, исходя из принятых им основных определений, постулатов и аксиом, без всякой ссылки на опыт, лишь с помощью цепи логических умозаключений, выводимых одно из другого.

Если проследить за доказательством любой теоремы евклидовых „Начал", то увидим, что оно опирается на предложение, доказанное в одной из предыдущих теорем; последнее, в свою очередь, основывается на предложениях, доказанных еще ранее, и т. д., и так до тех пор, пока мы не дойдем до начальных предложений и определений, которые являются первым звеном в цепи логических умозаключений, истинность которых в математике доказать нельзя, ибо нет предложений еще более простых, на которые они могли бы опираться. Эти предложения выражают основные свойства пространственных образов

§ 2. Определения, аксиомы и теоремы.

1. Всякое предложение, раскрывающее содержание какого-либо понятия или сводящее сложное понятие к более простым и первоначальным, называется определением. Считается, что понятие определено правильно, если в определении указано ближайшее родовое понятие и перечислены существенные видовые отличия.

Определение основных понятий геометрии приписывают Платону (429—348 гг. до нашей эры); часть их вошла в число определений, которыми Евклид начинает первую книгу своих „Начал".

Предложения, принимаемые без доказательства и служащие основой всей системы последующих доказательств, называются аксиомами. Все остальные предложения, которые доказываются с помощью аксиом, называются теоремами. Необходимо подчеркнуть, что аксиомы отражают основные свойства пространственных форм и в математике не могут быть доказаны.

Для доказательства справедливости аксиом, — такова мысль Энгельса, — мы должны выйти из сферы умозрения и обратиться к опыту; там мы найдем прямое подтверждение их истинности. Аксиомы, таким образом, „доказаны" многовековым опытом человечества. Система развития науки от аксиом к теоремам называется дедуктивной системой.

Всякое предложение в логическом курсе геометрии должно быть или поставлено как определение, или внесено в число аксиом, или доказано с помощью определений, аксиом и предшествующих теорем; всякое понятие должно быть или поставлено в числе основных или определено с помощью их.

Основные понятия: точка, прямая и плоскость — понятия, отвлеченные от реальных объектов окружающей действительности; они являются абстрагированными, идеализированными пространственными образами.

Энгельс в своем „Анти-Дюринге" говорит: „Понятие фигуры, как и понятие числа, заимствовано исключительно из внешнего мира, а не возникло вовсе в голове из чистого мышления. Раньше, чем люди могли притти к понятию фигуры, должны были существовать вещи, имеющие форму и формы которых сравнивали. Чистая математика имеет своим предметом пространственные формы и количественные отношения действительного мира, т. е. весьма реальное содержание" (Энгельс, Анти-Дюринг, изд. 5-е, 1931 г., стр. 33).

„Чтобы изучить пространственные формы и количественные отношения в их чистом виде, — говорит Энгельс, — следует оторвать их совершенно от их содержания, устранить его как нечто безразличное для дела" (там же).

Именно благодаря своему абстрактному характеру геометрия обладает той общностью, которая позволяет применять ее к широкому кругу явлений.

Законы построения геометрических форм, несмотря на их абстрактный характер, можно применять к изучению форм реальных объектов именно потому, что они были первоначально получены путем абстракции из действительного мира.

Созданием абстрактных геометрических понятий мы диалектически отрицаем реальные формы, а потом, по закону отрицания отрицания, вновь, обогащенные теорией, возвращаемся к практике и на практике поверяем сделанные в теоретическом исследовании выводы.

„От живого созерцания к абстрактному мышлению и от него к практике — таков диалектический путь познания истины, познания объективной реальности",— говорит Ленин (Ленинский сборник, т. IX).

Определения и их формулировка.

2. Преподаватель не может не знать, какое значение имеет определение в курсе геометрии и насколько правильная и четкая формулировка определения какого-либо понятия представляет весьма часто большие трудности для учащегося. Каждое определение должно быть: 1) ясным и законченным, 2) кратким по форме и в то же время полным по содержанию; в нем не должно быть ничего лишнего и в то же время должно быть все, что необходимо для понимания определяемого понятия. Сказанное относится в полной мере и к формулировкам аксиом, теорем, следствий из них и т. п.

Рассмотрим определение ромба: *ромб есть равносторонний параллелограм*. В данном случае параллелограм — более широкое, родовое понятие, слово же „равносторонний" — видовой признак, выделяющий ромб из числа всех неравносторонних параллелограмов, ромб — понятие, соподчиненное понятию параллелограма. Можно было бы исходить при определении ромба и из более широкого понятия, каковым является понятие „четырехугольник"; тогда определение будет таковым: *ромб — равносторонний четырехугольник*.

Заметим, что наиболее точным определением ромба было бы следующее: *ромбом называется параллелограм, две смежные стороны которого равны*, так как из этого определения в силу свойств параллелограма вытекает равенство всех сторон рассматриваемой фигуры — ромба.

Однако определение: *ромб есть равносторонний параллелограм*, хотя и содержит лишнее условие, на первых порах более приемлемо для учащихся, так как оно кратко по форме, а главное — не вызывает у учащихся представления о неравенстве двух других смежных или несмежных сторон, невольно возникающего при определении ромба как параллелограма, две смежные стороны которого равны.

Ясно, что учащиеся в начале своих занятий по геометрии не могут давать „строгих" формулировок определений, однако необходимо к этому постепенно их подводить и приучать. Научить учащихся давать строгие определения — прекрасная школа критического и серьезного отношения к каждому высказыванию; при этом надо помнить, что не всегда следует давать определения догматически, необходимо по возможности подводить учащихся к определениям путем всесторонней предварительной проработки вопроса. Так, к различным видам четырехугольников, а следовательно и к определениям их, следует подвести учащихся, используя шарнирную модель четырехугольника с раздвижными сторонами, при помощи которой четырехугольник произвольного вида может быть преобразован сперва в трапецию, затем в параллелограм, ромб, прямоугольник и, наконец, в квадрат.

Упражнения в формулировке определений должны составлять неотъемлемую часть преподавания. Одно и то же понятие может быть определено различно. Так: *диаметр есть хорда, проходящая через центр окружности*, или *диаметр есть отрезок, проходящий через центр, и его концами служат две точки окружности.* В первом определении исход ным понятием служит „хорда“, во втором — более общее понятие „отрезок“. На подобном примере следует показать учащимся, что нецелесообразно исходить из более общего понятия, каким является понятие „отрезок“, так как использование этого понятия ведет к более пространному определению, чем если использовать для определения диаметра понятие о хорде. Точно так же лучше определить квадрат как равносторонний прямоугольник, нежели как четырехугольник, у которого все стороны и все углы равны. Последней формулировкой обычно пользуются в пропедевтическом курсе геометрии.

Относительно определения: *квадрат — равносторонний прямоугольник* — можно сделать то же замечание, какое было сделано выше при определении ромба. Строгое определение квадрата гласит: ***квадратом называется прямоугольник, смежные стороны которого равны.***

Само собою разумеется, что при определении нового понятия следует всегда исходить из понятия, уже осознанного учащимися. Этим объясняется, что определение понятия „параллелограма“ базируется не на более близком понятии „трапеция“, а на понятии „четырехугольника“, между тем как определение: *параллелограм — трапеция, боковые стороны которой параллельны* — более простое, чем обычное определение параллелограма.

Остановимся еще на разборе некоторых определений. Определение: *вписанным называется четырехугольник, вершины которого лежат на окружности*, наводит учащихся, как показывает опыт работы, на мысль о том, что наличие окружности обязательно, чтобы считать четырехугольник вписанным; необходимо поэтому разъяснить учащимся, что четырехугольник считается вписанным, если он удовлетворяет определенным условиям, и что наличие окружности не является обязательным. Так, известно, что четырехугольники, противолежащие углы которых пополнительны, т. е. в сумме дают $2d$, — четырехугольники вписанные: через их вершины можно провести окружность; к числу таких четырехугольников относятся прямоугольник, квадрат и равнобедренная трапеция. Отсюда определение: ***вписанным называется четырехугольник, через все вершины которого можно провести окружность.***

Определение: „параллелограм есть фигура, имеющая четыре стороны“, — определение неверное: оно не содержит видового признака.

Определение: „параллелограм — четырехугольник, противолежащие стороны которого попарно параллельны и равны“, страдает тем, что содержит лишние данные, так как равенство противолежащих сторон вытекает из условия, что противолежащие стороны четырехугольника попарно параллельны.

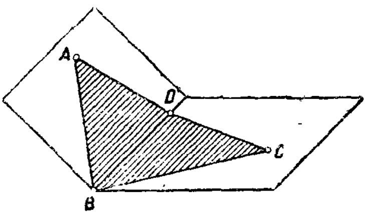

Рис. 1.

Преподаватель должен указать учащимся, что под четырехугольником следует всегда иметь в виду плоский четырехугольник, так как существует четырехугольник, который не помещается в одной плоскости (рис. 1), а потому следует дать такое определение четырехугольника: ***четырехугольником называется часть плоскости, ограниченная замкнутой ломаной линией, состоящей из четырех звеньев.***

Определение: „равнобедренным треугольником называется треугольник, у которого две стороны равны“, хотя и верно, но может вызвать у учащихся сомнение, можно ли назвать равнобедренным треугольник, у которого три стороны равны, т. е. равносторонний треугольник, так как, согласно определению, равнобедренным называется треугольник, у которого две стороны равны; поэтому целесообразно определить равнобедренный треугольник как треугольник, у которого по крайней мере две стороны равны. Следует указать, что определение: „равнобедренный треугольник это треугольник, у которого только две стороны равны“, неверно.

Приучая учащихся к точным определениям, преподаватель должен помнить, что определение является средством для получения понятия. Определению понятия должна предшествовать пропедевтика, состоящая в рассмотрении ряда частных вопросов, постепенно и последовательно вскрывающих содержание понятия, а потому определение понятия следует давать лишь после того, как учащиеся отдадут себе ясный отчет в том, о чем идет речь.

На первых порах, особенно когда учащиеся только что приступили к изучению геометрии, следует ограничиваться одним пояснением нового понятия, отмечать характерные признаки понятия и давать полное определение понятия лишь после того, как учащимися оно вполне осознано. Так, прежде чем говорить о величине угла как о мере поворота луча вокруг его начальной точки, следует сперва дать определение угла: *угол есть фигура, образованная двумя лучами, исходящими из одной точки.*

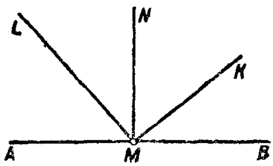

Рис. 2.

Приводим пример недостаточно точной формулировки теоремы. Рассмотрим теорему о перпендикуляре и наклонных в формулировке, приведенной в „Элементах геометрии“ Филиппса и Фишера (СПБ, 1913). Теорема гласит: „когда из данной точки проведены к одной прямой перпендикуляр и две наклонные, то они равны, если они одинаково удалены от основания перпендикуляра“.

Формулировка теоремы неверна: в ней не указано, что точка, из которой проведены перпендикуляр и две наклонные, лежит вне прямой. На рисунке 2 дано пояснение приведенной формулировки: из точки M на прямой AB проведены к AB перпендикуляр MN и наклонные MK и ML, проходящие через точку M — основание перпендикуляра — и потому одинаково удаленные от основания M на расстояние, равное нулю; из этого не следует, что эти наклонные равны, к тому же сравнить их между собою нельзя.

В геометрии Давидова (М., 1913, изд. 33-е) дана формулировка обратной теоремы: „если два равных угла AOB и COD имеют общую вершину O и две стороны OB и OC на одной прямой линии, то и две другие стороны AO и OD составляют одну прямую линию, и потому углы AOB и COD — противоположные“.

В геометрии Ващенко-Захарченко (Киев, 1883) эта теорема формулирована так: „если два равных угла так расположены, что одна из сторон первого есть продолжение стороны второго, то другая сторона первого будет продолжением другой стороны второго“.

Иллюстрация этих формулировок дана на рисунке 3. Приводимый рисунок вскрывает неточность данных формулировок; так, углы AOB и COD удовлетворяют условиям теоремы, однако они отнюдь не являются противоположными.

Правильная формулировка этой теоремы приводится ниже, в разделе „Треугольник".

Все это указывает на то, насколько серьезна должна быть подготовка преподавателя, насколько он сам прежде всего должен быть внимателен при даче определений и насколько он должен следить за каждым произносимым им словом.

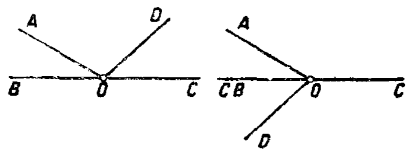

Рис. 3.

В тех случаях, когда во избежание громоздкости определения и формулировки теоремы и в целях лучшего запоминания определенного факта даются заведомо неполные, а следовательно и не вполне точные определения и формулировки, следует на это всегда указывать учащимся. Так, краткая формулировка теоремы Пифагора: *квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов*, неточна; запоминать же ее в правильной и громоздкой формулировке необязательно. Важно, чтобы учащийся умел объяснить, в чем неточность формулировки, и при надобности сумел бы дать и полную формулировку, хотя бы „своими словами".

§ 3. Методы: аналогия, индукция и дедукция.

Аналогия.

1. Различают три главных вида умозаключений: дедукцию, индукцию и аналогию, которыми пользуются при доказательствах.

Дедуктивный метод доказательства заключается в том, что от общего переходят к частному; индукция — это переход от частного к общему, и, наконец, аналогия — переход от одного частного к другому частному — заключается в том, что вывод, сделанный из рассмотрения какого-либо одного факта, переносят на ему подобный; в отдельных случаях иногда довольно трудно провести резкую грань между аналогией и индукцией.

Остановимся на аналогии и рассмотрим несколько примеров умозаключений по аналогии. Если предложить учащимся провести окружность, вписанную или описанную по отношению к четырехугольнику, то для такого построения они по аналогии, естественно, прибегнут к методам, которыми строится окружность, вписанная или описанная по отношению к треугольнику. Однако опыт убедит их, что построение не всегда возможно, что для построения окружности, вписанной или описанной по отношению к четырехугольнику, требуется выполнение определенных условий, а именно: вписать окружность в четырехугольник можно лишь тогда, когда сумма двух противолежащих его сторон равна сумме двух других его сторон, описать же окружность около четырехугольника можно лишь тогда, когда сумма двух противолежащих его углов равна сумме двух других его углов.

Принимая во внимание, что прямоугольнику на плоскости соответствует прямоугольный параллелепипед в пространстве, заключаем по аналогии об однозначном соответствии ряда свойств обеих фигур:

1) Квадрат диагонали прямоугольника равен сумме квадратов двух его измерений.	Квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трех его измерений.
2) Диагонали прямоугольника равны.	Диагонали прямоугольного параллелепипеда равны.
Точно так же:	
3) Диагонали параллелограма взаимно делятся пополам.	Диагонали параллелепипеда взаимно делятся пополам.
4) Сумма квадратов диагоналей параллелограма равна сумме квадратов всех его сторон.	Сумма квадратов диагоналей параллелепипеда равна сумме квадратов всех его ребер.
5) Параллелограм и прямоугольник, имеющие равные основания и равные высоты, равновелики.	Наклонный и прямой параллелепипеды, имеющие равновеликие основания и равные высоты, равновелики.
6) Медианы треугольника пересекаются в одной точке.	Средние линии тетраэдра пересекаются в одной точке.
7) Площадь прямоугольника равна произведению двух его измерений.	Объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению трех его измерений.
8) Площадь параллелограма равна произведению его основания на высоту.	Объем параллелепипеда равен произведению площади его основания на высоту.

Интересно отметить, что Евклид, пользуясь аналогией, называет произведение двух чисел площадью, множители — сторонами прямоугольника, произведение трех чисел — телом, числа — ребрами, произведение двух или трех одинаковых чисел — соответственно квадратом или кубом.

Приводим пример неправильного заключения по аналогии, часто встречающегося в школьной практике. Учащийся знает, что если $a \cdot 5 = b \cdot 5$, то и $a = b$, и потому заключает по аналогии, что если $m \cdot 0 = n \cdot 0$, то и $m = n$. Каждый преподаватель хорошо знает, к каким грубым ошибкам приводит такое „заключение по аналогии“, в особенности — при решении уравнений.

Выводы по аналогии допустимы только в начальном курсе геометрии и то только тогда, когда преподаватель уверен, что сделанный учащимися вывод верен; все же преподаватель обязан указать учащимся, что аналогия только наводит их на заключение и что сделанное ими заключение еще должно быть подтверждено доказательством путем дедукции.

Индукция.

2. Вторым методом умозаключений является индукция. Индуктивный метод ведет от частного к общему. Различают полную, неполную и математическую индукции. Полная индукция есть умозаключение, в котором объединяется то, что установлено для частных случаев. Примером полной индукции может служить вывод теоремы: *вписанный угол равен половине центрального угла, опирающегося на ту*

же дугу, и измеряется половиной этой дуги, который получается после предварительного рассмотрения трех различных возможных случаев, а именно, когда стороны угла: 1) диаметр и хорда, 2) хорды, лежащие по разные стороны от центра, и 3) хорды, лежащие по одну сторону от центра.

Обобщая полученный в каждом отдельном случае вывод, заключаем, что суждение справедливо для любого положения относительно центра хорд, выходящих из одной точки окружности.

Неполной индукцией называется умозаключение, в котором на основании рассмотрения лишь одного или небольшого числа отдельных частных случаев какого-либо класса явлений делается вывод, относящийся ко всему классу явлений.

Рассмотрим, как определить методом неполной индукции наибольшее число прямых, которые можно провести через n точек на плоскости, из которых никакие три точки не лежат на одной прямой.

Обозначим через N_n наибольшее число прямых, которые можно провести через n точек. Через две данные точки можно провести только одну прямую, и $N_2=1$. Далее получим:

$$N_3=1+2$$
$$N_4=1+2+3$$
$$N_5=1+2+3+4$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

Приходим к выводу, что наибольшее число прямых, которые можно провести через n точек,

$$N_n=1+2+3+\ldots+(n-1).$$

Методом неполной индукции иногда выводится и теорема Эйлера о связи между числом ребер P, числом вершин B и числом граней $Г$ выпуклого многогранника: $P=B+Г-2$. Этим же методом иногда пользуются при выводе формулы разложения в строку бинома n-й степени.

Необходимо подчеркнуть учащимся, что заключения, сделанные на основании рассмотрения лишь небольшого числа фактов, не всегда могут быть верны, а потому необходимо к подобного рода заключениям отнестись с сугубой осторожностью. Так, например, учащиеся, изучая планиметрию, привыкли иметь дело со взаимным положением прямых двух видов: прямыми пересекающимися и прямыми параллельными. На основе этого неполного пространственного опыта они делают умозаключение, что прямые могут находиться только в указанных двух взаимоположениях.

В силу этого при переходе к изучению стереометрии учащиеся, встречаясь с третьим видом взаимного положения прямых, не пересекающихся и в то же время не параллельных, т. е. со скрещивающимися прямыми, с трудом разрушают умозаключение, ранее ими построенное на неполной индукции.

Чтобы довести до строгого доказательства обобщение, полученное на основе неполной индукции, в математике усилиями Паскаля (1623—1662) и Я. Бернулли (1654—1705) выработана особая математическая индукция.

Для понимания, в чем заключается этот метод, рассмотрим прежние примеры.

1. Разбор последовательно полученных ответов в первом примере приводит к формуле, выражающей сумму $(n-1)$ чисел натурального ряда. Затем решается вопрос, чему равно число прямых, если к данным n точкам присоединить еще одну точку, $(n+1)$-ю. Очевидно, что через $(n+1)$-ю точку и остальные n точек можно провести еще n прямых, а потому через $(n+1)$ точку можно провести $1+2+3+\ldots+(n-1)+n$ прямых. Убеждаются, что вывод, верный для n точек, верен и для $(n+1)$ точек, а так как он верен хотя бы для двух точек, когда получается одна прямая, то, следовательно, он верен для любого числа точек.

2. Второй пример доведен до строгого доказательства по методу математической индукции во II части нашей книги.

3. Третий пример также математической индукцией доведен до конца в „Алгебре" Киселева, ч. II.

В элементарном курсе геометрии пользуются нередко неполной индукцией, особенно когда строгое доказательство какого-либо математического факта непосильно для учащихся в силу их возраста и их неподготовленности и когда и интуиция в должной мере оказала свое воздействие на выяснение рассматриваемого математического факта.

Так, например, теорема об алгебраической сумме ограниченного числа бесконечно малых переменных или теорема о произведении или частном двух бесконечно малых переменных доказываются рассмотрением отдельных частных случаев, при этом получаемый вывод обобщается и распространяется на все величины данного класса.

Следует заметить, что неполная индукция не есть научный метод доказательства; это скорее — педагогический метод, к которому с осторожностью следует прибегать в элементарном к рсе математики, когда, как было указано, строгое доказательство выходит за пределы элементарного курса и тем самым превосходит силы и развитие учащихся

Дедукция.

3. Дедукция, в отличие от индукции, есть умозаключение от общего к частному. Дедуктивным методом изложена геометрия Евклида.

Если аналогия и неполная индукция более доступны младшему возрасту, то дедукция доступна преимущественно старшему возрасту. Пример умозаключения методом дедукции:

1) углы, опирающиеся на дуги, дополняющие друг друга до полной окружности, пополнительны;

2) противолежащие углы вписанного четырехугольника опираются на дуги, дополняющие друг друга до окружности;

вывод: **противолежащие углы вписанного четырехугольника пополнительны.**

Дедуктивный метод умозаключения играет большую роль при решении задач, так как решение любой задачи всегда сводится к использованию какого-нибудь общего, ранее установленного закона. Особенно велико значение дедукции, когда требуется проверить какое-либо суждение с помощью уже известных суждений. Отсюда необходимость время от времени возвращаться к повторению учащимися ранее полученных выводов.