

К. А. Андреев

**О геометрических
соответствиях в применении
к вопросу о построении
кривых линий**

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 51
ББК 22.1
К11

К11 **К. А. Андреев**
О геометрических соответствиях в применении к вопросу о построении
кривых линий / К. А. Андреев – М.: Книга по Требованию, 2026. – 171 с.

ISBN 978-5-458-56757-2

ISBN 978-5-458-56757-2

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2026

© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2026

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

Простѣйшій примѣръ такого органическаго описанія представляетъ образованіе коническихъ сѣченій помощію двухъ пучковъ, лучи которыхъ находятся между собою въ проективной или однозначной зависимости, которая въ свою очередь имѣетъ вполне точное геометрическое опредѣленіе въ построеніи перспективы или центральной проекціи.

2. Переходя отъ коническихъ сѣченій къ кривымъ высшихъ порядковъ, естественно предложить вопросъ: какое измѣненіе въ смыслѣ обобщенія нужно произвести въ способѣ образованія первыхъ, чтобы получить способъ образованія послѣднихъ?

Легко видѣть, что возможны два рода такихъ измѣненій.

Во первыхъ можно подвергнуть обобщенію самыя орудія образованія, т. е. замѣнить пучки прямыхъ линій болѣе сложными геометрическими формами, оставляя при этомъ безъ измѣненія проективную зависимость, связывающую эти пучки. Во вторыхъ можно, рассматривая постоянно пучки прямыхъ какъ орудія образованія, подвергнуть обобщенію связывающую ихъ зависимость.

Помощію обобщенія перваго рода составилось геометрическое опредѣленіе высшихъ кривыхъ какъ образуемыхъ двумя пучками кривыхъ высшихъ порядковъ, пучками, элементы которыхъ связаны проективнымъ или гомографическимъ соотвѣтствіемъ. Это есть вполне установившееся въ наукѣ воззрѣніе на кривыя высшихъ порядковъ и на основаніи его главнымъ образомъ рѣшался до сихъ поръ вопросъ о ихъ построеніи по точкамъ *).

Что касается обобщенія втораго рода, къ которому относится и органическое описаніе частныхъ видовъ кривыхъ

*) *Cremona*. — „Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane.“ — Bologna, 1862, § 10.

Jonquières. — „Essai sur la génération des courbes géométriques.“ — Paris. 1858. (Extrait du tome XVI des mémoires présentés à l'Ac. des Sc.).

Härtenberger. — „Ueber die Erzeugung geometrischer Curven.“ — Journal Crelle-Borchardt, T. 58, Berlin 1860, p. 54.

3-го и 4-го порядковъ, данное Ньютономъ, то, будучи простымъ и естественнымъ съ точки зрѣнія аналитическихъ или количественныхъ соотношеній, оно представляетъ значительныя трудности въ смыслѣ геометрическомъ.

Дѣйствительно, если мы желаемъ опредѣлять кривыя какъ описываемыя точками пересѣченія соотвѣтственныхъ лучей двухъ прямолинейныхъ пучковъ, связанныхъ между собою зависимою высшаго порядка (многозначною), то эта зависимость въ свою очередь должна имѣть въполнѣ точное геометрическое опредѣленіе, т. е. должно существовать построение, помощію котораго для всякаго луча одного пучка опредѣлялись бы соотвѣтствующіе лучи другаго, подобно тому какъ это имѣемъ мѣсто для пучковъ проективно-соотвѣтственныхъ (гомографическихъ). Въ установленіи такого построения и заключается главная трудность и въ этой трудности нужно видѣть причину, почему обобщеніе послѣдняго рода не получило до сихъ поръ мѣста въ наукѣ на ряду съ обобщеніемъ перваго рода.

Преодоленіе этой трудности представляетъ однако большой интересъ и преимущественно въ виду задачи о построеніи кривыхъ по точкамъ, задачи, которая, по замѣчанію Шала, есть основная въ изученіи геометрическихъ кривыхъ линій *).

3. Мы замѣтили выше, что успѣхъ рѣшенія этой задачи зависитъ въ большой мѣрѣ отъ того опредѣленія, съ которымъ кривыя вводятся въ изученіе. Существуютъ основанія предполагать, скажемъ даже предвидѣть, что опредѣленіе геометрическихъ кривыхъ какъ образуемыхъ двумя прямолинейными пучками, элементы которыхъ связаны многозначнымъ соотвѣтствіемъ, есть наиболѣе удобное для обезпеченія этого успѣха.

*) *Charles*. — „Construction de la courbe du troisième ordre déterminée par neuf points.“ — *Comptes rendus de l'Ac. des Sc.* T. XXXVI. Paris, 30 mai 1853.

Въ самомъ дѣлѣ, если намъ даны точки какой нибудь кривой въ такомъ числѣ и такомъ расположеніи, что ими кривая опредѣляется вполне, то, соединивъ прямыми линіями двѣ изъ этихъ точекъ со всѣми остальными, мы получимъ два пучка прямыхъ, и такъ какъ каждый изъ построенныхъ такимъ образомъ лучей одного пучка пересѣкаетъ одинъ изъ лучей другаго въ точкѣ, принадлежащей кривой, то пучки эти естественно принять за образующіе кривую. Построенные лучи пучковъ представляютъ, слѣдовательно, пары соотвѣтственныхъ элементовъ и число этихъ паръ должно быть, очевидно, достаточнымъ, чтобы вполне опредѣлить то соотвѣтствіе между пучками, при которомъ рассматриваемая кривая ими образуется.

Вопросъ о построеніи геометрическихъ кривыхъ по достаточному числу ихъ точекъ сводится такимъ образомъ непосредственно на вопросъ о построеніи соотвѣтственныхъ элементовъ двухъ прямолинейныхъ пучковъ, находящихся въ многозначномъ соотвѣтствіи, по достаточному числу паръ этихъ элементовъ. На мѣсто вопроса о построеніи кривыхъ, имѣющаго болѣе или менѣе частный характеръ, выступаетъ такимъ образомъ вопросъ болѣе общій, долженствующій имѣть, безъ сомнѣнія, важное значеніе для науки, вопросъ о геометрическомъ изслѣдованіи высшихъ родовъ соотвѣтствія.

4. Извѣстно, что все преимущество новой, синтетической или чистой Геометріи предъ Геометріей древнихъ заключается въ томъ болѣе возвышенномъ положеніи по отношенію къ изучаемому матеріалу, въ которое она ставитъ изучающаго. Находясь въ такомъ положеніи, мы становимся созерцателями не отдѣльных только геометрическихъ истинъ, но тѣхъ общихъ принциповъ, изъ которыхъ эти истины истекаютъ какъ изъ общихъ источниковъ; мы становимся обладателями не частныхъ только пріемовъ для рѣшенія тѣхъ или другихъ задачъ, но методовъ, являющихся орудіями для разслѣдованія цѣлыхъ областей науки.

Нѣтъ надобности распространяться о выгодахъ обладанія этими средствами изслѣдованія, но не лишнее будетъ замѣтить, что и самое усвоеніе общихъ методовъ въ большинствѣ случаевъ представляетъ менѣе трудностей чѣмъ ознакомленіе съ приѣмами частнаго характера. Примѣромъ можетъ служить законъ двойственности, который лишь въ сравнительно недавнее время поставленъ въ наукѣ какъ принципъ и въ этомъ совершенно общемъ видѣ представляетъ высшую степень простоты и очевидности.*)

Можно сказать, что подобно тому, какъ въ вещественной природѣ всякій законъ тѣмъ болѣе доступенъ познаванію, чѣмъ онъ менѣе возмущенъ посторонними вліяніями, такъ и въ области отвлеченныхъ изслѣдованій всякій принципъ или всякій общій методъ тѣмъ проще представляется уму и тѣмъ легче усвоится сознаніемъ, чѣмъ менѣе въ интересующихъ насъ вопросахъ онъ обставленъ скрывающими его частностями.

Въ виду этого не можетъ быть, кажется, сомнѣнія, что какъ скоро намъ предстоитъ дѣлать выборъ между двумя опредѣленіями изучаемаго предмета, мы должны отдавать предпочтеніе тому, которое ставитъ этотъ предметъ въ область болѣе общихъ изслѣдованій и позволяетъ видѣть его съ болѣе возвышенной, такъ сказать, точки зрѣнія, откуда основныя его свойства усматриваются независимо отъ постороннихъ частныхъ.

5. На основаніи всего сказаннаго мы предпочитаемъ опредѣлять геометрическія кривыя какъ образуемыя прямолинейными пучками связанными между собою соотвѣтствіями высшихъ порядковъ или многозначными. Это опредѣленіе переноситъ насъ, какъ замѣчено выше, отъ задачи о построеніи кривыхъ въ область изслѣдованій о геометрическихъ со-

*) *Gergonnes*.—„*Considérations philosophiques sur les éléments de la science de l'étendue*.“—*Annales de Mathématiques publiées par M. Gergonnes*. T. XVI 1825—1826 p. 230.

отвѣтствіяхъ, которыя, собственно говоря, и составляютъ главное содержаніе всего слѣдующаго. Чтобы оставаться однако въ строго опредѣленныхъ границахъ, мы не поведемъ эти изслѣдованія далѣе тѣхъ требованій, которыя при принятіи воззрѣній постановляются названною задачей. Мы будемъ говорить только о тѣхъ соотвѣтствіяхъ и только о тѣхъ ихъ свойствахъ, отъ которыхъ зависитъ ея рѣшеніе.

Изученіе высшихъ родовъ геометрическихъ соотвѣтствій, каковы между прочимъ соотвѣтствія многозначныя, имѣетъ, конечно, и свой собственный интересъ независимо отъ приложенія его къ той или другой задачѣ. Это слѣдуетъ уже изъ того, что по отношенію къ многозначнымъ соотвѣтствіямъ является только частнымъ случаемъ соотвѣтствіе гомографическое или проективное, составляющее, какъ извѣстно, главное и почти единственное основаніе всей новой Геометріи. Можно сказать даже, что ученіе о многозначныхъ соотвѣтствіяхъ составляетъ обширное поле для созданія совершенно новыхъ отдѣловъ науки, отдѣловъ, можетъ быть, болѣе пространныхъ чѣмъ все достояніе чистой Геометріи въ ея настоящемъ развитіи. Разрабатывать это поле для такихъ обширныхъ цѣлей не входитъ однако въ наши скромныя намѣренія и все, что мы имѣемъ въ виду по отношенію къ нему сдѣлать, это указать на доступность для чисто геометрическихъ изслѣдованій тѣхъ немногихъ его мѣстъ, на которыя прямо или посредственно опирается интересующая насъ задача.

6. Чтобы избѣжать во всемъ слѣдующемъ всякихъ неясностей и недоразумѣній и освободиться возможно болѣе отъ необходимости дѣлать впослѣдствіи какія либо отступленія или оговорки, постараемся установить теперь же точныя понятія о тѣхъ предметахъ, о которыхъ будетъ идти рѣчь. Постараемся установить понятіе о геометрическихъ соотвѣтствіяхъ вообще и указать на то значеніе, которое должна имѣть идея о соотвѣтствіи въ обширномъ ученіи о протяженіи и преимущественно въ той его фазѣ, въ которой оно представляется намъ подъ названіемъ новой или синтетической или чистой Геометріи.

Не подлежит сомнѣнію, что единственное элементарное средство, которое чистая Геометрія можетъ употреблять какъ орудіе для изслѣдованія, есть построеніе, и что всякое другое средство ставить ее необходимымъ образомъ въ зависимость отъ какой нибудь другой отрасли знанія.

Чистая Геометрія есть, строго говоря, Геометрія построенія.

Во всякомъ построеніи существуютъ геометрическіе элементы (точки, прямыя) или геометрическія формы (кривыя, фигуры), которые считаются данными, отъ которыхъ это построеніе начинается или на которыхъ оно основывается. Всякое построеніе приводитъ къ нѣкоторымъ новымъ геометрическимъ элементамъ или формамъ, которые составляютъ результатъ построенія и которые въ противоположность съ данными можно называть искомыми.

Понятіе о построеніи какъ о нѣкоторомъ процессѣ, какъ о совокупности извѣстнаго рода элементарныхъ геометрическихъ операцій не зависитъ, очевидно, отъ частныхъ особенностей данныхъ, на которыхъ оно основывается. Построеніе можетъ быть, слѣдовательно, исполнѣ опредѣленнымъ и неизмѣннымъ, когда данныя будутъ измѣняющіяся или даже неопредѣленныя.

При измѣненіи данныхъ, но безъ измѣненія построенія, должны, вообще говоря, измѣняться и искомыя. Отсюда понятіе о соотвѣтствіи между данными и искомыми, понятіе, основывающееся на чисто геометрическихъ началахъ.

Во всѣхъ изслѣдованіяхъ древнихъ геометровъ данныя, а слѣдовательно и искомыя, при всякомъ построеніи разсматриваются въ неизмѣнномъ состояніи, и это составляетъ отличительный характеръ древней Геометріи предъ Геометріей новой. Въ послѣдней напротивъ измѣняемость положенія данныхъ и искомыхъ, а съ тѣмъ вмѣстѣ и понятіе о соотвѣтствіи, устанавливаемомъ тѣмъ или другимъ родомъ построенія, играетъ преобладающую роль и составляетъ характеристическую особенность всѣхъ основныхъ принциповъ и методовъ.

Всѣ новѣйшіе способы изслѣдованія состоятъ почти исключительно въ преобразованіи однихъ фигуръ или геометрическихъ формъ, свойства которыхъ намъ извѣстны, въ другія, свойства которыхъ подлежатъ изученію, преобразованію, которое въ сущности есть не что иное какъ установленіе геометрическаго соотвѣтствія.

И такъ, повторяемъ, идея о соотвѣтствіи есть основная во всей новой Геометріи.

7. Одинъ и тотъ же родъ соотвѣтствія можетъ быть изучаемъ съ различныхъ точекъ зрѣнія, т.-е. на основаніи различныхъ его опредѣленій или основныхъ свойствъ. Такъ въ Аналитической Геометріи соотвѣтствія могутъ быть разсматриваемы и независимо отъ построенія на основаніи только общихъ аналитическихъ соотношеній между символами, обозначающими геометрическіе элементы или формы (координаты, уравненія).

Совсѣмъ съ другой стороны должны быть изучаемы соотвѣтствія въ Геометріи чистой или синтетической. Въ послѣдней всякій родъ соотвѣтствія можетъ только тогда разсматриваться какъ вполне опредѣленный, когда извѣстно построеніе его устанавливающее. Только такіа соотвѣтствія могутъ подлежать изученію чистой Геометріи и только такіа мы будемъ называть *соотвѣтствіями геометрическими*.

8. Геометрическіа соотвѣтствія тѣмъ болѣе могутъ представлять разнообразія, чѣмъ сложнѣе геометрическіа формы, къ которымъ они относятся.

Извѣстно, что въ чистой Геометріи признаются три рода или три степени основныхъ или элементарныхъ формъ (Grundgebilde). Подраздѣленіе это основывается на степени многообразія элементовъ, входящихъ въ составъ этихъ формъ *).

Основными формами первой степени считаются: 1° *прямолинейный рядъ* (gerades Gebilde, Punktreihe), элементы котораго суть точки, расположенныя на прямой; 2° *плоскій*

*) *Staudt*.—„Geometrie der Lage.“—Nürnberg 1847.

Reye.—„Geometrie der Lage.“—Hannover 1866. Erste Abth. p. 9—13.

пучекъ (ebenes Strahlenbüschel), элементы котораго суть прямыя, проходящія чрезъ одну точку и лежащія въ одной плоскости; и 3^о *пучекъ плоскостей* (Ebenenbüschel), элементы котораго суть плоскости, проходящія чрезъ одну прямую.

Основными формами второй степени считаются: 1^о *плоская форма* (Ebenes System), элементы которой суть точки и прямыя, лежащія въ одной плоскости; 2^о *пространственный пучекъ* или *связка* (Bündel), элементы котораго суть прямыя и плоскости, проходящія чрезъ одну точку.

За основную форму третьей степени принимается *пространство* (Raum, räumliches System), въ которомъ элементы суть точки, прямыя линіи и плоскости.

9. Между двумя формами первой степени возможенъ, собственно говоря, только одинъ родъ соотвѣтствія, которое состоитъ въ томъ, что каждому элементу одной формы соотвѣтствуетъ одинъ или нѣсколько элементовъ другой. Все возможное здѣсь разнообразіе заключается только въ числѣ соотвѣтствующихъ элементовъ. Если каждому элементу одной формы соотвѣтствуетъ только одинъ элементъ другой, также какъ и обратно, то соотвѣтствіе есть однозначное (eindeutige Verwandtschaft); если же каждому элементу одной формы соотвѣтствуетъ нѣсколько элементовъ въ другой, то соотвѣтствіе называется многозначнымъ (mehrdeutige Verwandtschaft).

Ученіе объ однозначномъ (проективномъ или гомографическомъ) соотвѣтствіи составляетъ, такъ сказать, первый шагъ новой Геометріи. Оно развито въ настоящее время съ большою полнотою и систематичностью и замѣчательно по своей простотѣ, а также важности и обилію приложений. На немъ одномъ, какъ на дающемъ геометрическое опредѣленіе кривыхъ втораго порядка, основывается, какъ извѣстно, вся теорія этихъ кривыхъ. *)

*) Steiner.—„Theorie der Kegelschnitte gestützt auf project. Eigensch.“ —Leipzig 1876. 2-te Aufl.

Chasles.—„Traité des sections coniques.“—Paris 1865.

Что же касается многозначных соотвѣтствій, то это есть область самыхъ новѣйшихъ и, относительно говоря, весьма трудныхъ изслѣдованій. Большинство сочиненій и мемуаровъ, трактующихъ объ этомъ предметѣ съ геометрической точки зрѣнія, ограничиваются лишь частными или наиболѣе простыми случаями. *)

Въ слѣдующихъ главахъ мы постараемся развить самыя общія геометрическія начала для установленія помощію построенія такихъ многозначныхъ соотвѣтствій формъ первой степени, при которыхъ число элементовъ каждой формы, соотвѣтствующихъ любому элементу другой, не болѣе четырехъ. Это, какъ увидимъ, приведетъ насъ непосредственно къ способу построенія на плоскости общихъ геометрическихъ кривыхъ до пятого порядка включительно и многихъ группъ, характеризующихся нѣкоторыми частностями, кривыхъ высшихъ порядковъ **).

10. Переходя отъ основныхъ формъ первой степени къ основнымъ формамъ второй степени, легко понять, что

*) Профессоръ *Em. Weyr* даетъ въ своемъ сочиненіи: „*Theorie der mehrdeutigen geometrischen Elementargebilde*“ (Leipzig 1869) вполне точное геометрическое опредѣленіе одно-двузначному соотвѣтствію, т. е. такой геометрической зависимости, при которой каждому элементу первой формы соотвѣтствуетъ единственный элементъ второй и каждому элементу второй—два (дѣйствительные или мнимые) элемента первой. Ему же принадлежатъ изслѣдованія о многихъ видахъ соотвѣтствій высшихъ порядковъ, помѣщенные частію въ отчетахъ вѣнской Академіи Наукъ (*Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften*), частію же въ изданіяхъ чешскаго ученаго Общества (*Sitzungsberichte und Abhandlungen der königl. böhm. Gesellschaft der Wissenschaften*). Въ 1875 году авторъ настоящаго сочиненія публиковалъ въ Харьковѣ изслѣдованіе „О геометрическомъ образованіи плоскихъ кривыхъ“, которое представляетъ (если не ошибаемся) первый опытъ геометрическаго установленія взаимно-двузначнаго соотвѣтствія въ самомъ общемъ его видѣ.

**) Мы будемъ говорить только о плоскихъ пучкахъ прямыхъ. Распространеніе тѣхъ же выводовъ на ряды точекъ и пучки плоскостей не представляетъ, какъ извѣстно, никакой трудности.

здѣсь возможно гораздо болѣе разнообразіа соотвѣтствій, и это зависитъ отъ двухъ обстоятельствъ. Вопервыхъ оттого, что каждая изъ формъ второй степени включаетъ въ себѣ два рода элементовъ. Во вторыхъ оттого, что число элементовъ какъ того, такъ и другого рода, входящихъ въ составъ каждой формы второй степени, въ бесконечное число разъ болѣе числа элементовъ какой либо формы первой степени. Именно, если обозначимъ черезъ ∞ бесконечное число элементовъ какой либо формы первой степени (напр. число точекъ на прямой), то число элементовъ какъ того такъ и другого рода во всякой формѣ второй степени (напр. число точекъ или прямыхъ на плоскости) будетъ ∞^2 .

Вслѣдствіе перваго изъ этихъ обстоятельствъ изъ всякаго, какимъ бы ни было образомъ установленнаго, соотвѣтствія между двумя формами второй степени можно получать новые виды соотвѣтствія, замѣняя по закону двойственности въ одной или обѣихъ формахъ элементы, фигурирующие какъ соотвѣтственные, элементами другого рода. Такимъ образомъ изъ коллинеарнаго или проективнаго соотвѣтствія между двумя плоскостями, соотвѣтствія, при которомъ каждой точкѣ одной плоскости соотвѣтствуетъ одна точка другой и при томъ точкамъ, лежащимъ на какой либо прямой въ одной плоскости, — точки на прямой въ другой, получается соотвѣтствіе коррелятивное или взаимное (*Reciprocität, figures correlatives*), состоящее въ томъ, что каждой точкѣ одной плоскости соотвѣтствуетъ прямая въ другой и точкамъ, лежащимъ на какой либо прямой, прямая, проходящая чрезъ одну точку *). Такимъ же точно образомъ можно преобразовать всякое соотвѣтствіе.

*) Геометрическія опредѣленія и основныя свойства коллинеарнаго и коррелятивнаго соотвѣтствій мы будемъ предполагать извѣстными читателю и потому не считаемъ лишнимъ указать мѣста нѣкоторыхъ сочиненій, трактующія объ этомъ предметѣ.

Chasles. — „Traité de géométrie supérieure“. — Paris 1852. Chapitre XXV, p. 362 и chapitre XXVI, p. 413.