

А. Тилло

**Геодезические исследования
Гаусса, Бесселя и Ганзена**

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 528
ББК 38.2
А11

А11 **А. Тилло**
Геодезические исследования Гаусса, Бесселя и Ганзена / А. Тилло – М.: Книга
по Требованию, 2021. – 368 с.

ISBN 978-5-458-59503-2

ISBN 978-5-458-59503-2

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2021

© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2021

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.



Серия Книжный Ренессанс

www.samizday.ru/reprint

ОБЩЕЕ

РѢШЕНИЕ ВОПРОСА:

какъ изобразить части данной поверхности на другой
данной поверхности такъ, чтобы сохранялось подобіе
въ малѣйшихъ частяхъ.

К. Ф. ГАУССА.

1. Свойство какой-либо кривой поверхности определяется уравнением между координатами x, y, z , относящимися къ каждой точкѣ этой поверхности. Каждая изъ переменныхъ, входящихъ въ уравненіе, можетъ быть разсматриваема какъ функція отъ остальныхъ двухъ; но наше представленіе сдѣлается болѣе общимъ, если введемъ еще двѣ новыя переменныя t, u , въ зависимости отъ которыхъ и выразимъ каждую изъ величинъ x, y, z ; такъ что, вообще говоря, определеннымъ значеніямъ переменныхъ t и u всегда будетъ соответствовать определенная точка поверхности, и обратно.

2. Пусть для какой-либо другой кривой поверхности X, Y, Z, T, U означаютъ соответственно тоже самое, что x, y, z, t, u въ отношеніи къ первой поверхности.

3. *Изобразить* первую поверхность на второй *значитъ найти законъ*, по которому каждой точкѣ первой поверхности должна соответствовать определенная точка второй поверхности. Мы удовлетворимъ такому требованію, если примемъ T и U определенными функціями отъ переменныхъ t и u . Въ тѣхъ случаяхъ, когда изображеніе должно будетъ удовлетворять извѣстнымъ условіямъ, вышеозначенныя функціи не будутъ произвольными. А такъ какъ вмѣстѣ съ тѣмъ X, Y, Z будутъ также функціями отъ t и u , то эти функціи должны будутъ удовлетворять не только условіямъ, происходящимъ отъ свойства второй поверхности, но и тѣмъ условіямъ, которыя должны быть выполнены при изображеніи.

4. Задача, предложенная въ 1822 г. копенгагенскимъ обществомъ наукъ, требуетъ, чтобы изображеніе было подобно оригиналу въ безконечно малыхъ частяхъ. А потому, прежде всего, надлежитъ выразить это условіе аналитически.

Дифференцируя функции отъ t и u , которыя служатъ выраженіями для x, y, z, X, Y, Z , получимъ слѣдующія уравненія:

$$dx = a dt + a' du$$

$$dy = b dt + b' du$$

$$dz = c dt + c' du$$

$$dX = A dt + A' du$$

$$dY = B dt + B' du$$

$$dZ = C dt + C' du$$

Для удовлетворенія требуемому условію, нужно, во первыхъ, чтобы существовала пропорціональность между всѣми безкопечно малыми линіями, проведенными на первой поверхности изъ-какой либо ея точки, и соотвѣтствующими линіями на другой поверхности; а во вторыхъ, чтобы углы, заключающіеся между означенными линіями на первой поверхности, были равны угламъ, образуемымъ соотвѣтствующими линіями на второй поверхности.

Длина линейнаго элемента на первой поверхности

$$= \sqrt{(aa + bb + cc) dt^2 + 2(aa' + bb' + cc') dt \cdot du + (a'a' + b'b' + c'c') du^2}$$

а длина соотвѣтствующаго элемента на второй поверхности

$$= \sqrt{(AA + BB + CC) dt^2 + 2(AA' + BB' + CC') dt \cdot du + (A'A' + B'B' + C'C') du^2}$$

Эти элементы, согласно вышеизложенному условію, должны быть между собою въ опредѣленномъ соотношеніи, независимо отъ величинъ dt и du ; а потому, ясно, что три величины

$$aa + bb + cc, aa' + bb' + cc', a'a' + b'b' + c'c'$$

должны быть соотвѣтственно пропорціональны величинамъ

$$AA + BB + CC, AA' + BB' + CC', A'A' + B'B' + C'C'$$

Если конечнымъ точкамъ втораго элемента на первой поверхности соотвѣтствуютъ значенія:

$$t, u \text{ и } t + \delta t, u + \delta u$$

то косинусъ угла между этимъ вторымъ элементомъ и вышеозначеннымъ первымъ элементомъ

$$= \frac{(adt + a'du)(a\delta t + a'\delta u) + (bdt + b'du)(b\delta t + b'\delta u) + (cdt + c'du)(c\delta t + c'\delta u)}{\sqrt{((adt + a'du)^2 + (bdt + b'du)^2 + (cdt + c'du)^2) \cdot ((a\delta t + a'\delta u)^2 + (b\delta t + b'\delta u)^2 + (c\delta t + c'\delta u)^2)}}$$

а для косинуса угла между соотвѣтствующими элементами второй

поверхности будемъ имѣть выраженіе точно такого же вида, только вмѣсто буквъ a, b, c, a', b', c' въ немъ будутъ буквы A, B, C, A', B', C' . Не трудно видѣть, что эти два выраженія будутъ между собою равны, коль скоро имѣетъ мѣсто вышеозначенная пропорціональность, такъ что второе условіе само собой удовлетворяется, если первое выполнено. Въ справедливости только что сказаннаго можно, впрочемъ, убѣдиться и непосредственнымъ разруженіемъ.

Итакъ, аналитическое выраженіе нашей задачи будетъ заключаться въ слѣдующихъ равенствахъ:

$$\frac{AA' + BB' + CC'}{aa + bb + cc} = \frac{AA' + BB' + CC'}{aa' + bb' + cc'} = \frac{A'A' + B'B' + C'C'}{a'a' + b'b' + c'c'}$$

Обозначимъ выраженіе это, которое будетъ конечною функциею отъ t и u , черезъ m , такъ что m будетъ означать то отношеніе, въ коемъ линейныя величины на первой поверхности будутъ больше или меньше *) соответствующихъ изображеній на второй поверхности. Отношеніе это, вообще говоря, будетъ различно для различныхъ мѣстъ на поверхности. Въ томъ частномъ случаѣ, когда m есть постоянная величина, подобіе будетъ существовать и въ конечныхъ частяхъ; если же, сверхъ того $m = 1$, то между изображеніями будетъ существовать полное равенство, такъ что первая поверхность можетъ слиться со второю.

5. Полагая, для краткости,

$$(aa + bb + cc) dt^2 + 2(aa' + bb' + cc') dt \cdot du + (a'a' + b'b' + c'c') du^2 = \omega$$

замѣтимъ, что дифференціальное уравненіе $\omega = 0$ допускаетъ два интегрированія. Именно, если разложить трехчленъ ω на два множителя, линейные относительно dt и du , то либо тотъ, либо другой множитель долженъ равняться нулю, что и допускаетъ два различныхъ интегрированія.

Одно изъ интегрированій будетъ соответствовать уравненію

$$0 = (aa + bb + cc) dt + \{aa' + bb' + cc' + i\sqrt{(aa + bb + cc)(a'a' + b'b' + c'c') - (aa' + bb' + cc')^2}\} du$$

(причемъ $i = \sqrt{-1}$, ибо легко убѣдиться, что ирраціональная часть этого уравненія мнимая); а другое интегрированіе будетъ соответ-

*) Смотря по тому, m больше или меньше единицы.

ствовать такому же выраженью, какъ предыдущее, только вмѣсто i въ немъ нужно поставить $-i$. Итакъ, если интеграломъ перваго уравненія будетъ выраженье

$$p + iq = \text{Const}$$

гдѣ p и q суть вещественныя функціи отъ t и u , то другой интегралъ будетъ равенъ

$$p - iq = \text{Const}$$

А по существу предмета

$$(dp + idq)(dp - idq) \text{ или } (dp^2 + dq^2)$$

будетъ множителемъ ω

или
$$\omega = n (dp^2 + dq^2)$$

гдѣ n означаетъ конечную функцію отъ t и u .

Отъ подстановки въ выраженье

$$dX^2 + dY^2 + dZ^2$$

вмѣсто dX , dY , dZ ихъ значеній, выраженныхъ помощью T , U , dT , dU , получимъ трехчленъ, который назовемъ чрезъ Ω ; и примемъ, что, на вышеизложенныхъ основаніяхъ, интегралами уравненія $\Omega = 0$ будутъ выраженья:

$$P + iQ = \text{Const}$$

$$P - iQ = \text{Const}$$

$$\text{и } \Omega = N(dP^2 + dQ^2)$$

гдѣ P , Q , N означаютъ вещественныя функціи отъ T и U .

Ясно, что означенныя интегрированія могутъ быть произведены до рѣшенія нашей главной задачи.

Если вмѣсто T и U подставимъ такія функціи отъ t и u , которыя бы удовлетворяли условію нашей главной задачи, то Ω обратится въ $m\omega$, и будемъ имѣть:

$$\frac{(dP + idQ) \cdot (dP - idQ)}{(dp + idq) \cdot (dp - idq)} = \frac{mn}{N}$$

Легко видѣть, что числитель первой части этого уравненія только тогда дѣлится на знаменателя, когда

либо $dP + idQ$ дѣлится на $dp + idq$ и $dP - idQ$ на $dp - idq$,

либо $dP + idQ$ дѣлится на $dp - idq$ и $dP - idQ$ на $dp + idq$.

Въ первомъ случаѣ, при $dp + idq = 0$, $dP + idQ$ тоже равно нулю, слѣдовательно, когда $p + iq$ дѣлается постояннымъ, то $P + iQ$ также становится постояннымъ, а это сводится къ тому, что $P + iQ$ функція только отъ $p + iq$, и точно также $P - iQ$ будетъ функціей только отъ $p - iq$. Въ другомъ же случаѣ $P + iQ$ будетъ функціею отъ $p - iq$, а $P - iQ$ функціею отъ $p + iq$. Не трудно убѣдиться, что эти же самыя заключенія можно сдѣлать и въ обратномъ порядкѣ: если принять $P + iQ$, $P - iQ$ функціями отъ $p + iq$, $p - iq$, то окажется, что частное отъ раздѣленія Ω на ω есть конечная величина, откуда будетъ слѣдовать та пропорціональность, которая найдена была выше, въ силу принятаго условія.

Если положимъ, наприимѣръ,

$$P + iQ = f(p + iq), \quad P - iQ = f'(p - iq)$$

то не трудно удостовѣриться, что свойство функціи f' обуславливается уже функціею f . Такъ, если всѣ постоянныя, которыя могутъ входить въ f , будутъ вещественныя величины, то f' должна быть функціею тождественною съ f , для того, чтобы вещественнымъ значеніямъ p и q всегда соответствовали вещественныя величины P и Q ; въ обратномъ же случаѣ f' будетъ только тѣмъ отличаться отъ f , что въ мнимыхъ элементахъ, заключающихся въ сей послѣдней функціи, нужно поставить $-i$ вмѣсто i .

Затѣмъ, будемъ имѣть:

$$P = \frac{1}{2} f(p + iq) + \frac{1}{2} f'(p - iq)$$

$$iQ = \frac{1}{2} f(p + iq) - \frac{1}{2} f'(p - iq)$$

а такъ какъ f можетъ быть выбрана какъ угодно (даже съ постоянными мнимыми величинами), то будетъ тоже самое если скажемъ, что P равняется вещественной части функціи $f(p + iq)$, а iQ (при второмъ рѣшеніи $-iQ$) равняется мнимой части той же функціи; откуда, посредствомъ исключенія, можно будетъ выразить T и U въ зависимости отъ t и u . Таковое выраженіе и послужитъ исполнѣ общимъ и полнымъ рѣшеніемъ требуемаго вопроса.

6. Если $p' + iq'$ представляетъ произвольную, опредѣленную функцію отъ $p + iq$, причѣмъ p' , q' суть вещественныя функціи отъ p , q , то

$$p' + iq = \text{Const} \text{ и } p' - iq = \text{Const}$$

будутъ также интегралами дифференціального уравненія $\omega = 0$; въ самомъ дѣлѣ, эти выраженія совершенно однозначны съ вышеприведенными интегралами:

$$p + iq = \text{Const} \text{ и } p - iq = \text{Const}$$

Точно также

$$P' + iQ' = \text{Const} \text{ и } P' - iQ' = \text{Const}$$

будутъ интегралами дифференціального уравненія $\Omega = 0$, и имѣютъ такое же значеніе, какъ вышеприведенные интегралы:

$$P + iQ = \text{Const} \text{ и } P - iQ = \text{Const}$$

если только $P' + iQ'$ представляетъ произвольную, опредѣленную функцію отъ $P + iQ$ (причемъ P' , Q' суть вещественныя функціи отъ P , Q). Изъ сказаннаго явствуетъ, что въ общемъ рѣшеніи нашей задачи, данномъ въ предыдущемъ параграфѣ, можно замѣнить p и q величинами p' и q' , а вмѣсто P , Q ввести P' , Q' . Хотя измѣненія такого рода не могутъ придать рѣшенію большей общности, но въ практикѣ будетъ иногда удобнѣе предпочесть для извѣстной цѣли одну форму другой.

7. Обозначимъ функціи, происходящія отъ дифференцированія произвольныхъ функцій f и f' , черезъ φ и φ' , такъ что

$$dfv = \varphi v dv, \quad df'v = \varphi' v dv.$$

Тогда, на основаніи нашего общаго рѣшенія, будемъ имѣть:

$$\frac{dP + idQ}{dp + idq} = \varphi(p + iq), \quad \frac{dP - idQ}{dp - idq} = \varphi'(p - iq)$$

откуда

$$\frac{m m n}{N} = \varphi(p + iq) \varphi'(p - iq)$$

Такъ что для опредѣленія масштаба послужитъ слѣдующая формула:

$$m = \sqrt{\left\{ \frac{dp^2 + dq^2}{\frac{\Omega}{dP^2 + dQ^2}} \cdot \varphi(p + iq) \varphi'(p - iq) \right\}}$$

8. Пояснимъ теперь наше общее рѣшеніе нѣкоторыми примѣрами, которые покажутъ, какъ оно прилагается въ практикѣ, и послужатъ вмѣстѣ съ тѣмъ къ указанію на нѣкоторыя встрѣчающіяся при этомъ обстоятельства.

Положимъ, во первыхъ, что обѣ поверхности суть плоскости, такъ что можно принять

$$x=t, \quad y=u, \quad z=0 \\ X=T, \quad Y=U, \quad Z=0.$$

Въ этомъ случаѣ выраженья:

$$t+iu = \text{Const}, \quad t-iu = \text{Const} \text{ и} \\ T+iU = \text{Const}, \quad T-iU = \text{Const}$$

будутъ соответственно интегралами дифференціальныхъ уравненій

$$\omega = dt^2 + du^2 = 0 \text{ и} \\ \Omega = dT^2 + dU^2 = 0$$

Итакъ, два общія рѣшенія задачи будутъ:

$$\text{I. } T+iU = f(t+iu), \quad T-iU = f'(t-iu) \\ \text{II. } T+iU = f(t-iu), \quad T-iU = f'(t+iu)$$

А такъ какъ характеристика f означаетъ произвольную функцію, то полученный выводъ можетъ быть выраженъ еще слѣдующимъ образомъ: для X слѣдуетъ принять вещественную часть $f(x+iy)$, а для Y и для $-Y$ мнимую часть той же функціи, безъ множителя i .

Если придадимъ характеристикамъ φ, φ' такія значенія, какъ въ § 7, и положимъ

$$\varphi(x+iy) = \xi + i\eta, \quad \varphi'(x-iy) = \xi - i\eta$$

гдѣ, очевидно, ξ и η суть вещественныя функціи отъ x и y , то для перваго рѣшенія будемъ имѣть

$$dX + idY = (\xi + i\eta) (dx + idy) \\ dX - idY = (\xi - i\eta) (dx - idy)$$

и слѣдовательно

$$dX = \xi dx - \eta dy \\ dY = \eta dx + \xi dy.$$

Далѣе, пусть ds означаетъ линейный элементъ на первой поверхности, g уголъ, заключающійся между этимъ элементомъ и линіей абсциссъ, dS соответствующій линейный элементъ на второй поверхности, а G наклоненіе онаго къ линіи абсциссъ, и положимъ:

$$\xi = \sigma \cdot \cos \gamma, \quad \eta = \sigma \cdot \sin \gamma \\ dx = ds \cdot \cos g, \quad dy = ds \cdot \sin g \\ dX = dS \cdot \cos G, \quad dY = dS \cdot \sin G$$

тогда предыдущія уравненія дадутъ:

$$dS \cdot \cos G = \sigma \cdot ds \cdot \cos (g + \gamma)$$

$$dS \cdot \sin G = \sigma \cdot ds \cdot \sin (g + \gamma)$$

А такъ какъ мы вправѣ считать σ положительною величиною, то

$$dS = \sigma \cdot ds, \quad G = g + \gamma$$

Отсюда видно, что величина σ (согласно съ § 7) представляетъ отношеніе величины элемента ds къ величинѣ элемента изображенія dS , и, какъ должно быть, этотъ масштабъ не зависитъ отъ g . Уголъ γ тоже не зависитъ отъ g , откуда слѣдуетъ, что соответствующіе элементы линий, исходящихъ изъ той же точки, образуютъ на обѣихъ поверхностяхъ равные углы и, притомъ, въ томъ же направленіи.

Если для f выберемъ линейную функцію

$$fv = A + Bv$$

постоянные коэффиціенты которой имѣютъ видъ

$$A = a + bi, \quad B = c + ei$$

то

$$fv = B = c + ei$$

слѣдовательно

$$\sigma = \sqrt{(cc + ee)}, \quad \gamma = \text{Arc. tang } \frac{e}{c}$$

Итакъ, масштабъ постояненъ во всѣхъ точкахъ, такъ что изображеніе совершенно подобно изображаемой фигурѣ.

Для всякой другой функціи f легко доказать, что масштабъ не будетъ постояненъ, а потому подобіе сохранится только въ безконечно малыхъ частяхъ.

Если опредѣленному числу точекъ, данныхъ на первой поверхности, должны соответствовать извѣстные мѣста на поверхности изображенія, то не трудно найти по простой интерполяціи самую простую алгебраическую функцію f , удовлетворяющую принятому условію. Обозначивъ значенія $x + iy$, относящіяся къ даннымъ точкамъ, чрезъ a, b, c и т. д., а соответствующія значенія $X + iY$ чрезъ A, B, C и т. д., будемъ, слѣдовательно, имѣть:

$$fv = \frac{(v-b)(v-c)\dots}{(a-b)(a-c)\dots} A + \frac{(v-a)(v-c)\dots}{(b-a)(b-c)\dots} B + \frac{(v-a)(v-b)\dots}{(c-a)(c-b)\dots} C + \text{etc.}$$

Выраженіе это есть алгебраическая функція отъ v , и порядокъ ея единицей меньше, противъ числа назначенныхъ точекъ; такъ что для двухъ таковыхъ точекъ эта функція дѣлается линейною, а потому изображенія будутъ совершенно подобны между собою.