Н. Н. Бухгольц

Основной курс теоретической механики

Часть 2. Динамика системы материальных точек

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 53
ББК 22.3
Н11

Н. Н. Бухгольц
Н11 Основной курс теоретической механики: Часть 2. Динамика системы материальных точек / Н. Н. Бухгольц – М.: Книга по Требованию, 2013. – 332 с.

ISBN 978-5-458-31537-1

«"Основной курс теоретической механики" профессора Н. Н. Бухгольца (1880-1944) построен на материале лекций, которые он в течение многих лет читал в Московском государственном университете. Курс, выдержавший при жизни автора пять изданий, зарекомендовал себя как хороший учебник для студентов университетов и как ценное пособие для учащихся других вузов, а также для инженеров, желающих пополнить и углубить свои знания в области механики. Большой заслугой Н. Н. Бухгольца явилось то, что он в своем курсе, своеобразном как по содержанию, так и по форме изложения, впервые в нашей стране систематически применил векторный метод, наиболее подходящий для изложения механики и ставший сейчас общепринятым. Курс разбит на две части. Первая часть содержит кинематику, геометрическую и аналитическую статику и динамику точки. Во второй части дается динамика системы материальных точек, динамика твердого тела и аналитическая механика... Со времени выхода в свет последних изданий книг Н. Н. Бухгольца прошло 20 лет. Естественно, что за эти годы изменились и программы курса теоретической механики и требования, предъявляемые к самим учебникам. Поэтому, несмотря на все достоинства «Основного курса теоретической механики», при настоящем его переиздании нельзя было ограничиться только устранением отдельных вкравшихся в текст погрешностей или опечаток; чтобы сохранить курс как учебник, оказалось необходимым переработать весь материал книги и внести в нее ряд дополнений...»

ISBN 978-5-458-31537-1

ПРЕДИСЛОВИЕ К ЧЕТВЕРТОМУ ИЗДАНИЮ

«Основной курс теоретической механики» профессора Н. Н. Бухгольца (1880—1944), выдержавший при жизни автора несколько изданий, зарекомендовал себя как хороший учебник для студентов университетов и ценное пособие, которым могут пользоваться студенты других вузов, а также инженеры, желающие пополнить и углубить свои знания в области механики.

Вторая часть этого курса, как и первая, построена на материале лекций, читанных автором в течение многих лет в Московском государственном университете, и содержит динамику системы материальных точек, динамику твердого тела и начала аналитической механики; подробнее содержание книги видно из оглавления. Несмотря на сравнительно небольшой объем книги, весь материал в ней изложен с достаточной полнотой и иллюстрируется целым рядом задач и примеров.

При подготовке к печати настоящего издания (предыдущее третье издание вышло в свет в 1945 г.) часть материала книги подверглась переработке и в нее внесен ряд дополнений, учитывающих, в частности, и изменения в программе университетского курса теоретической механики; одновременно устранены замеченные погрешности и опечатки.

Наиболее существенные изменения внесены в материал п. 1 § 17, пп. 1 и 3 § 18 и п. 8 § 26. Добавлены п. 8 в § 2, § 4, пп. 3 и 11 в § 8, п. 6 в § 9, пп. 4 и 6 в § 26 и п. 4 в § 30. Небольшие изменения и добавления сделаны и во многих других местах книги. Кроме того, в бóльшую часть параграфов добавлены задачи и примеры.

Как и в первой части, нумерация параграфов для удобства ссылок сделана общей по всей книге. Термин «материальная частица» заменен на принятый в первых изданиях термин «материальная точка»; изменен также в целях единообразия ряд обозначений в гл. VIII. Все остальные термины и обозначения, принятые автором, в основном сохранены.

Внесенные при переработке материала изменения и дополнения в тексте книги специально не оговариваются; это лишь мешало бы пользоваться книгой как учебником.

При чтении книги следует иметь в виду, что все содержащиеся в ней ссылки на первую часть даются по шестому изданию [1]).

С. М. Тарг

---

[1]) Н. Н. Бухгольц, Основной курс теоретической механики, часть первая, изд. шестое, Изд-во «Наука», 1965.

ГЛАВА ПЕРВАЯ

ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ СИСТЕМЫ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК

§ 1. Основные понятия. Связи

1. Механическая система. Виды связей. Механической системой называется такое множество материальных точек, в котором движение каждой точки зависит от положения и движения остальных точек системы. Условия, налагающие ограничения на движение точек системы, называются связями; эти условия аналитически выражаются в виде уравнений, связывающих между собой координаты и скорости точек системы, а также время (см. ч. I, § 14, п. 5). Уравнение неосвобождающей связи дается равенством вида

$$f(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots, x_n, y_n, z_n; \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \dot{x}_2, \dot{y}_2, \dot{z}_2, \ldots, \dot{x}_n, \dot{y}_n, \dot{z}_n; t) = 0,$$

где n есть число точек системы, или, сокращенно,

$$f(x, y, z; \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}; t) = 0\ [1]. \tag{1}$$

Для освобождающей же связи это уравнение имеет вид неравенства

$$f(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) \geqslant 0. \tag{1'}$$

Так как при движении системы координаты x, y, z и скорости $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ являются функциями времени, то время в уравнения связи входит неявно через эти аргументы; кроме того, оно может входить и явно. Связь, не зависящая явно от времени, называется склерономной или стационарной; если же связь явно зависит от времени, то

[1] При отсутствии индексов условимся в выражениях вида $f(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ под x понимать всю совокупность величин $x_1, x_2, \ldots, x_n$, под y — совокупность $y_1, y_2, \ldots, y_n$ и т. д.

она называется реономной или нестационарной. Уравнение склерономной связи имеет вид

$$f(x,\ y,\ z,\ \dot{x},\ \dot{y},\ \dot{z})=0, \tag{2}$$

а связь, выражаемая уравнением вида (1), будет реономной.

Уравнения (1) и (2) определяют связи, налагающие ограничения не только на координаты точек системы, но и на их скорости; такие связи носят название кинематических или дифференциальных связей. Связь, которая налагает ограничение только на положения точек системы и, следовательно, выражается уравнением, связывающим только координаты этих точек, называется геометрической или конечной связью; уравнение геометрической связи имеет вид

$$f(x,\ y,\ z;\ t)=0 \quad \text{или} \quad f(x,\ y,\ z)=0. \tag{3}$$

Мы ограничимся рассмотрением кинематических связей, которые выражаются уравнениями, линейными относительно скоростей точек системы. Эти уравнения, если связи реономны, имеют вид

$$\sum_{\nu=1}^{n}(a_\nu\dot{x}_\nu+b_\nu\dot{y}_\nu+c_\nu\dot{z}_\nu)+a=0, \tag{4}$$

где a_ν, b_ν, c_ν, a суть функции координат x, y, z и, возможно, времени t, т. е.

$$a_\nu,\ b_\nu,\ c_\nu,\ a \left| \begin{matrix} x,\ y,\ z, \\ t \end{matrix} \right. .$$

Если же эти связи склерономны, то они выразятся уравнениями вида

$$\sum_{\nu=1}^{n}(a_\nu\dot{x}_\nu+b_\nu\dot{y}_\nu+c_\nu\dot{z}_\nu)=0, \tag{5}$$

где a_ν, b_ν, c_ν зависят только от координат x, y, z.

Умножая уравнения (4) и (5) на dt, получим выражения уравнений кинематических связей в виде

$$\sum_{\nu=1}^{n}(a_\nu\,dx_\nu+b_\nu\,dy_\nu+c_\nu\,dz_\nu)+a\,dt=0 \tag{4a}$$

для реономной связи и

$$\sum_{\nu=1}^{n}(a_\nu\,dx_\nu+b_\nu\,dy_\nu+c_\nu\,dz_\nu)=0 \tag{5a}$$

для склерономной связи. Левые части уравнений (4a) и (5a) представляют собой линейные формы относительно дифференциалов координат и, может быть, времени; если эти линейные дифференциальные многочлены являются полными дифференциалами какой-нибудь функции координат и времени (т. е. интегрируются), то после интегрирования дифференциальная связь перестает быть таковой и становится конечной связью, налагающей условия только на координаты точек системы, т. е. геометрической связью. Следовательно, связь будет дифференциальной только в том случае, если она неинтегрируема.

По терминологии Г. Герца механическая система, имеющая только связи, выраженные в конечной форме (геометрические), называется голономной; если же на систему наложены дифференциальные неинтегрируемые связи, то система называется неголономной.

Примерами неголономных систем являются твердые тела, вынужденные катиться без скольжения по какой-либо шероховатой поверхности. Кинематический характер такой связи виден из того, что скорость точки касания тела с поверхностью должна равняться нулю. Если уравнения, выражающие это условие, не могут быть проинтегрированы, то связь будет неголономной.

Примеры. 1. Колесо радиуса R катится без скольжения по прямолинейному рельсу (рис. 1). Положение колеса в плоскости движения Oxy определяется координатами x_C, y_C центра C колеса (полюса) и углом поворота φ. Если ось x направить вдоль рельса, то $y_C = R$ (геометрическая связь). Кроме того, должна быть равна нулю скорость точки касания K колеса с рельсом; это условие дает $\dot{x}_C - R\dot{\varphi} = 0$ (кинематическая связь). Но данное уравнение сразу интегрируется и приводит к соотношению между координатами x_C и φ, имеющему вид $x_C - R\varphi = \text{const}$. Таким образом, рассмотренная система является голономной.

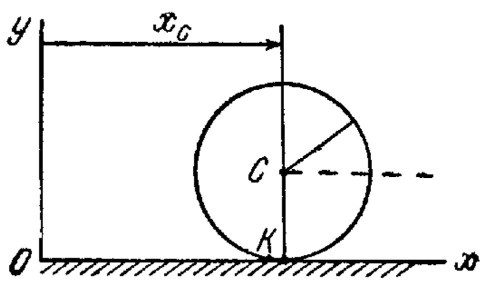

Рис. 1.

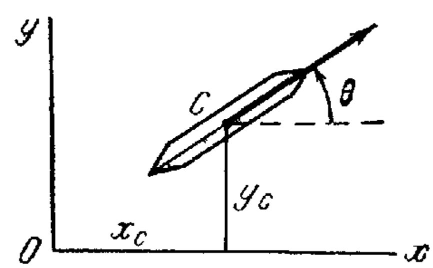

Рис. 2.

2. Колесико планиметра (с острым, режущим краем) катится без скольжения по горизонтальной плоскости, оставаясь перпендикулярным к этой плоскости; вид колесика в проекции на горизонтальную плоскость Oxy показан на рис. 2. Положение колесика определяется координатами x_C, y_C его центра C ($z_C = R$, где R — радиус колесика), углом θ, который плоскость колесика образует с осью x, и углом поворота φ колесика вокруг его оси (на рисунке не показан). Так как скорость точки касания колесика с плоскостью равна нулю, то скорость центра колеса $v_C = R\dot{\varphi}$. Наличие острого края, не допускающего перемещение колесика в направлении, перпендикулярном к его плоскости, требует, чтобы вектор $\boldsymbol{v}_C$ все время лежал

в плоскости колесика. Это приводит к следующим двум соотношениям между координатами x_C, y_C, φ, θ:

$$\dot{x}_C = R\dot{\varphi}\cos\theta, \quad \dot{y}_C = R\dot{\varphi}\sin\theta. \tag{a}$$

Уравнения (а), когда $\theta \neq \text{const}$, не могут быть проинтегрированы; следовательно, система является неголономной.

3. Положение шара радиуса R, катящегося без скольжения по горизонтальной плоскости (рис. 3), определяется координатами x_C, y_C, z_C его центра и тремя углами поворота вокруг центра, например углами Эйлера φ, ψ, θ [ч. I, § 7 (рис. 80)]. Так как скорость точки касания K должна быть равна нулю, то скорость центра C удовлетворяет векторному равенству $\boldsymbol{v}_C + (\boldsymbol{\omega} \times \overline{CK}) = 0$, где $\boldsymbol{\omega}$ — мгновенная угловая скорость шара. Учитывая, что проекции вектора $\overline{CK}$ на неподвижные оси $Oxyz$ равны 0, 0, $-R$, получим в проекциях на оси

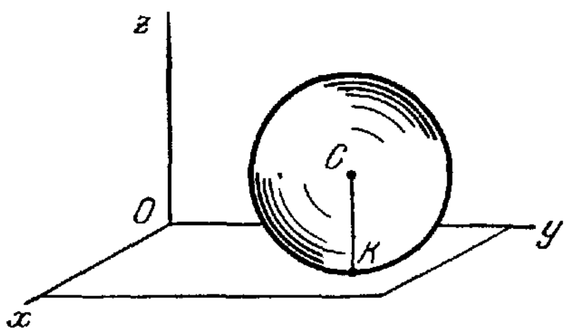

Рис. 3.

$$\dot{x}_C - R\omega_y = 0, \quad \dot{y}_C + R\omega_x = 0, \quad \dot{z}_C = 0. \tag{б}$$

Последнее уравнение интегрируется и дает геометрическое условие $z_C = R$. Первые же два уравнения неинтегрируемы, в чем можно убедиться, выразив ω_x и ω_y через углы φ, ψ, θ и их производные по времени [эти выражения даются ниже уравнениями (4) в § 14, где $p' = \omega_x$, $q' = \omega_y$]. Следовательно, данная система также является неголономной.

2. Условия, налагаемые связями на вариации координат. Рассмотрим голономную систему из n материальных точек, на которую наложено k конечных связей, выражаемых уравнениями вида

$$f_\varkappa(x, y, z; t) = 0 \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, k).$$

Тогда число независимых координат этой системы будет равно $3n - k$ (см. ч. I, § 14, п. 6). Дадим системе некоторое виртуальное перемещение, вследствие которого координаты точек системы получат приращения, равные вариациям этих координат

$$\delta x_\nu, \ \delta y_\nu, \ \delta z_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

Эти вариации, число которых равно $3n$, не будут независимыми, так как вследствие наложенных конечных связей они должны удовлетворять k условиям вида

$$\sum_{\nu=1}^{n}\left(\frac{\partial f_\varkappa}{\partial x_\nu}\delta x_\nu + \frac{\partial f_\varkappa}{\partial y_\nu}\delta y_\nu + \frac{\partial f_\varkappa}{\partial z_\nu}\delta z_\nu\right) = 0 \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, k), \tag{6}$$

которые мы получим, варьируя уравнения связей (см. ч. I, § 28, п. 2). Следовательно, число независимых вариаций будет равно $3n - k$, т. е. числу независимых координат системы.

Предположим теперь, что система неголономна и на нее, кроме конечных связей, выражаемых уравнениями вида

$$f_\varkappa(x, y, z; t) = 0, \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, k),$$

наложено еще r дифференциальных (неинтегрируемых) связей, уравнения которых имеют вид

$$\sum_{\nu=1}^{n} (a_{\rho\nu} dx_\nu + b_{\rho\nu} dy_\nu + c_{\rho\nu} dz_\nu) + a_\rho dt = 0 \qquad (\rho = 1, 2, \ldots, r). \quad (7)$$

Уравнения (7) связывают между собой проекции dx, dy, dz истинных перемещений точек системы, совершаемых за элементарный промежуток времени dt. При виртуальном перемещении изменения координат точек системы выражаются их вариациями δx, δy, δz, причем $\delta t = 0$, так как виртуальное перемещение есть изменение положения системы, соответствующее данному моменту (при определении этих перемещений время не варьируется). Поэтому уравнение, связывающее между собой вариации координат δx, δy, δz, мы получим из уравнения (7) путем замены дифференциалов вариациями, принимая во внимание, что $\delta t = 0$; следовательно, дифференциальные связи типа (7) налагают на вариации координат условия

$$\sum_{\nu=1}^{n} (a_{\rho\nu} \delta x_\nu + b_{\rho\nu} \delta y_\nu + c_{\rho\nu} \delta z_\nu) = 0 \qquad (\rho = 1, 2, \ldots, r). \quad (8)$$

Отсюда ясно, что при дифференциальных связях, так же как и при конечных, виртуальные перемещения совпадают с истинными только в том случае, если связь склерономна, т. е. если уравнение дифференциальной связи имеет вид

$$\sum_{\nu=1}^{n} (a_{\rho\nu} dx_\nu + b_{\rho\nu} dy_\nu + c_{\rho\nu} dz_\nu) = 0,$$

причем $a_{\rho\nu}$, $b_{\rho\nu}$, $c_{\rho\nu}$ будут функциями только координат, но не времени, входящего явно.

Итак, пусть на систему наложено k конечных связей, выражаемых уравнениями вида

$$f_\varkappa(x, y, z; t) = 0 \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, k),$$

и r дифференциальных неинтегрируемых связей, уравнения которых имеют вид

$$\sum_{\nu=1}^{n} (a_{\rho\nu} dx_\nu + b_{\rho\nu} dy_\nu + c_{\rho\nu} dz_\nu) + a_\rho dt = 0 \qquad (\rho = 1, 2, \ldots, r).$$

Число независимых координат системы будет равно $3n - k$, где n есть число точек системы. Вариации же координат будут связаны условиями

$$\sum_{\nu=1}^{n}\left(\frac{\partial f_\varkappa}{\partial x_\nu}\delta x_\nu+\frac{\partial f_\varkappa}{\partial y_\nu}\delta y_\nu+\frac{\partial f_\varkappa}{\partial z_\nu}\delta z_\nu\right)=0 \qquad (\varkappa=1,\ 2,\ \ldots,\ k)$$

и

$$\sum_{\nu=1}^{n}(a_{\rho\nu}\delta x_\nu+b_{\rho\nu}\delta y_\nu+c_{\rho\nu}\delta z_\nu)=0 \qquad (\rho=1,\ 2,\ \ldots,\ r).$$

Число этих условий равно $k+r$, следовательно, число независимых вариаций равно $3n-(k+r)$. Отсюда следует, что в неголономных системах число независимых вариаций меньше числа независимых координат системы, тогда как для голономных систем эти числа совпадают.

Числом степеней свободы системы будем называть число независимых вариаций координат. Тогда для голономной системы число степеней свободы *равно* числу независимых координат, а для неголономной системы *меньше* числа независимых координат.

Обратимся к примерам, рассмотренным в конце п. 1. В примере 1 координаты x_C, y_C, φ колеса удовлетворяют уравнениям $y_C=R$, $x_C-R\varphi=$ $=\mathrm{const}$. Следовательно, положение колеса определяется одной координатой, например x_C; число степеней свободы колеса также равно единице.

В примере 2 положение колесика определяется четырьмя координатами x_C, y_C, φ, θ. Но вариации этих координат, согласно уравнениям (а), связаны соотиошениями

$$\delta x_C=R\delta\varphi\cos\theta, \qquad \delta y_C=R\delta\varphi\sin\theta.$$

Следовательно, независимых вариаций будет две, например $\delta\varphi$ и $\delta\theta$, и колесико имеет две степени свободы.

В примере 3 число координат системы равно пяти: x_C, y_C и углы φ, ψ, θ. Но вариации этих координат будут связаны двумя соотношениями, вытекающими из первых двух равенств системы (б). Следовательно, шар имеет три степени свободы.

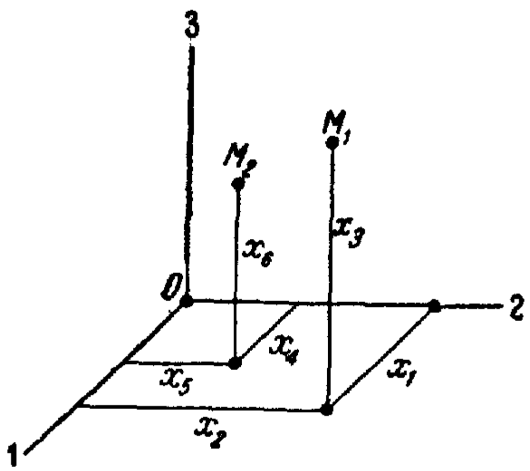

Рис. 4.

3. Иногда бывает удобно обозначать координаты точек одной буквой с различными индексами, соответствующими координатным осям, которые в свою очередь обозначаются номерами 1, 2, 3 (рис. 4). Так, например, координаты

точки M_1 вместо x_1, y_1, z_1 обозначаются x_1, x_2, x_3,
точки M_2 вместо x_2, y_2, z_2 обозначаются x_4, x_5, x_6,
. . . .
точки M_n вместо x_n, y_n, z_n обозначаются x_{3n-2}, x_{3n-1}, x_{3n}.

Массы этих точек для удобства суммирования обозначаются одной буквой с теми же индексами, что и координаты этих точек; например, масса точки M_1 обозначается или m_1, или m_2, или m_3, причем, конечно, $m_1 = m_2 = m_3$; масса точки M_2 обозначается или m_4, или m_5, или m_6, причем $m_4 = m_5 = m_6$; масса точки M_n обозначается или m_{3n-2}, или m_{3n-1}, или m_{3n}, причем $m_{3n-2} = m_{3n-1} = m_{3n}$. Такими обозначениями мы будем иногда пользоваться.

§ 2. Основные динамические величины

1. Рассмотрим систему n материальных точек, находящихся в движении. Тогда в любой момент времени количество движения каждой точки системы с массой m_ν будет изображаться вектором $m_\nu \boldsymbol{v}_\nu$, приложенным в этой точке. Приведем систему векторов $m_\nu \boldsymbol{v}_\nu$ к какому-нибудь центру O (рис. 5). В результате получим: 1) главный вектор[1])

$$\boldsymbol{Q} = \sum_\nu m_\nu \boldsymbol{v}_\nu,$$

который равен геометрической сумме количеств движения всех точек системы и называется *главным вектором количеств движения системы* или просто *количеством движения системы*, и 2) главный момент

$$\boldsymbol{G}_O = \sum_\nu (\boldsymbol{r}_\nu \times m_\nu \boldsymbol{v}_\nu),$$

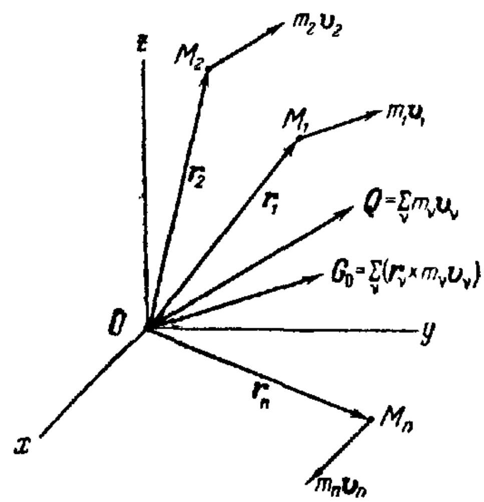

Рис. 5.

который равен геометрической сумме моментов количеств движения всех точек системы относительно центра O и носит название *главного момента количеств движения системы* или *кинетического момента системы* относительно центра O.

2. **Количество движения системы.** Преобразуем выражение количества движения системы

$$\boldsymbol{Q} = \sum_\nu m_\nu \boldsymbol{v}_\nu.$$

Так как $\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$, то

$$\boldsymbol{Q} = \sum_\nu m_\nu \frac{d\boldsymbol{r}_\nu}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_\nu m_\nu \boldsymbol{r}_\nu.$$

[1]) Условимся в дальнейшем для краткости во всех случаях, когда это не может вызвать недоразумений, вместо $\sum\limits_{\nu=1}^{n}$ писать просто $\sum\limits_\nu$ или $\sum$.

Но из формулы, определяющей радиус-вектор $\boldsymbol{r}_C$ центра масс системы, следует, что

$$\sum_\nu m_\nu \boldsymbol{r}_\nu = M\boldsymbol{r}_C,$$

где $M = \sum\limits_\nu m_\nu$ есть масса всей системы; поэтому

$$\boldsymbol{Q} = M\frac{d\boldsymbol{r}_C}{dt} = M\boldsymbol{v}_C, \tag{1}$$

где $\boldsymbol{v}_C$ есть скорость центра масс. Отсюда имеем теорему: *количество движения системы равно количеству движения, которое имел бы центр масс системы, если бы в нем была сосредоточена масса всей системы*. Иными словами, количество движения системы равно произведению массы системы на скорость ее центра масс.

Проекции количества движения системы на оси координат будут

$$Q_x = \sum_\nu m_\nu \dot{x}_\nu = M\dot{x}_C, \quad Q_y = \sum_\nu m_\nu \dot{y}_\nu = M\dot{y}_C,$$
$$Q_z = \sum_\nu m_\nu \dot{z}_\nu = M\dot{z}_C.$$

Из доказанной теоремы следует, что количество движения системы по отношению к любым осям $Cx'y'z'$, имеющим начало в центре масс C и перемещающимся вместе с этим центром, равно нулю, так как относительно этих осей $\boldsymbol{v}_C = 0$. В частности, очевидно, будет равно нулю количество движения твердого тела, вращающегося вокруг оси, проходящей через центр масс этого тела.

3. Кинетический момент системы. Кинетическим моментом относительно центра O называется, как было указано выше, векторная величина, определяемая равенством

$$\boldsymbol{G}_O = \sum_\nu (\boldsymbol{r}_\nu \times m_\nu \boldsymbol{v}_\nu) = \sum_\nu \left(\boldsymbol{r}_\nu \times m_\nu \frac{d\boldsymbol{r}_\nu}{dt}\right). \tag{2}$$

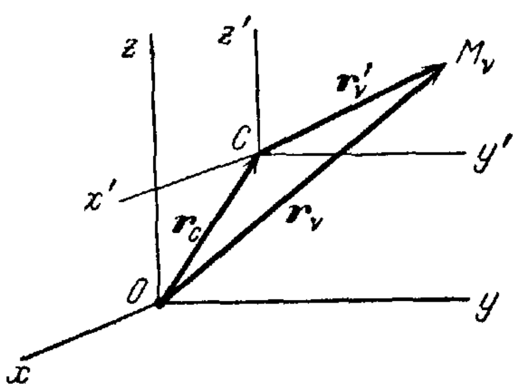

Рис. 6.

Преобразуем это выражение. Проведем через центр масс C системы оси $Cx'y'z'$ (рис. 6), которые будут перемещаться по отношению к основной инерциальной системе отсчета $Oxyz$ *поступательно* вместе с центром масс. Обозначим радиус-вектор любой точки M_ν системы с массой m_ν по отношению к осям $Oxyz$ через $\boldsymbol{r}_\nu$, а по отношению к осям $Cx'y'z'$ через $\boldsymbol{r}'_\nu$; радиус-вектор центра масс назовем $\boldsymbol{r}_C$. Тогда

$$\boldsymbol{r}_\nu = \boldsymbol{r}_C + \boldsymbol{r}'_\nu. \tag{3}$$