Ф.А. Слудский

Триангуляция без базиса

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 93
ББК 63.3
Ф11

Ф.А. Слудский

Ф11 Триангуляция без базиса / Ф.А. Слудский – М.: Книга по Требованию, 2021. – 53 с.

ISBN 978-5-518-08899-3

ISBN 978-5-518-08899-3

I.

Фигура земли.

1.

Руководствуясь началами прямолинейной Тригонометріи и аналитической Геометріи можно определять положеніе всѣхъ точекъ земной поверхности относительно какой нибудь системы прямоугольныхъ осей координатъ, связавши эти точки цѣпью треугольниковъ; можно за тѣмъ опредѣлить видъ и величину земли, — найти форму и размѣры геометрической поверхности, наиболѣе приближающейся къ поверхности земли. Можно — въ теоріи, но не на практикѣ. Положеніе всѣхъ точекъ суши мы можемъ опредѣлить упомянутымъ сейчасъ способомъ; но какъ мы приложимъ этотъ способъ къ опредѣленію положенія точекъ моря, покрывающаго большую часть земной поверхности, какъ тріангулируемъ мы море, какъ изслѣдуемъ его ровную, правильную, сравнительно съ поверхностью суши, поверхность?

Форма поверхности жидкости вполнѣ обусловливается силами, дѣйствующими на частицы жидкости: поверхность жидкости есть поверхность уровня. Вотъ основаніе для рѣшенія вопроса о формѣ моря.— Какія же силы дѣйствуютъ на частицы моря? Сколько мы знаемъ, эти силы суть: притяженіе частицъ земли, центробѣжная сила и притяженіе небесныхъ тѣлъ. — Обративши вниманіе на то обстоятельство, что сила притяженія частицъ земли зависитъ отъ фигуры земли и отъ распредѣленія въ землѣ массы, можно спросить: что же, — наше основаніе для рѣшенія вопроса о формѣ моря вводитъ насъ въ заколдованный кругъ, мы ничего не выигрываемъ нашими разсужденіями? Нѣтъ—выигрываемъ. Каждый элементъ земли притягиваетъ частицы моря по закону Ньютона, по закону квадратовъ разстояній, а потому поверхность моря есть одна изъ поверхностей уровня, обусловливаемыхъ дѣйствіемъ центробѣжной силы и силы ньютоніанскаго притяженія нѣкоторой массы. Вотъ, что мы выигрываемъ во первыхъ; мы выигрываемъ и кое что еще. Форма поверхности моря обусловливается дѣйствіемъ силъ, которыя проявляются и въ каждой точки суши. При помощи наблюденій, сдѣланныхъ на сушѣ, можно опредѣлить эти силы, опредѣлить форму поверхности уровня ими обусловливаемой, опредѣлить форму моря. Изъ наблюденій надъ качаніями маятника можно найти въ каждой точкѣ суши величину равнодѣйствующей всѣхъ силъ; перенеся частичку моря на землю (заключивши ее въ уровень), мы можемъ опредѣлить положеніе равнодѣйствующей посредствомъ астрономическихъ наблюденій. Опредѣливши за тѣмъ, посредствомъ тріангуляціи, положеніе точекъ наблюденій, мы будемъ имѣть все нужное для опредѣленія формы и размѣровъ конечной части поверхности уровня на основаніи общихъ свойствъ поверхностей этого рода Такъ какъ поверхность уровня есть поверхность геометрическая, поверхность выражаемая уравненіемъ, то изслѣдованной части ея достаточно для полнаго ея опредѣленія.

Вотъ единственно возможный, единственно надежный, способъ опредѣленія формы моря, формы поверхности уровня. Онъ крайне сложенъ, — нельзя ли его упростить? Можно.

Если бы многочисленныя наблюденія показали, что законъ измѣненія величины и направленія равнодѣйствующей на сушѣ довольно простъ, что онъ строго представляется формулою, содержащею незначительное число постоянныхъ, то, убѣдившись въ его возможности при дѣйствіи нашихъ силъ, мы могли бы, по предыдущему, принять его вѣрнымъ для всѣхъ земныхъ точекъ. Если бы наблюденія обнаружили, что измѣненіе равнодѣйствующей мало отступаетъ отъ такого простаго закона, то мы могли бы принять этотъ законъ за фундаментальный, отступленія отъ него счесть возмущеніями, силы обусловливающія его принять за фундаментальныя, всѣ же остальныя силы за возмущающія, —могли бы, для облегченія изслѣдованія, разбить вопросъ о формѣ поверхности уровня по двѣ части: на вопросъ о невозмущенной поверхности уровня и на вопросъ объ ея возмущеніяхъ.—Наблюденія, вызванныя теоретическими изслѣдованіями фигуры земли, обнаружили существованіе фундаментальнаго закона; дѣленіе нашего вопроса на части возможно. Мы его раздѣлимъ.

Въ настоящемъ сочиненіи мы ограничимся изслѣдованіемъ первой части вопроса, изслѣдованіемъ закона измѣненія равнодѣйствующей фундаментальныхъ силъ, изслѣдованіемъ вопроса о системѣ невозмущенныхъ поверхностей уровня и о тѣхъ соотношеніяхъ между широтами, долготами, азимутами и зенитными разстояніями земныхъ точекъ, которыя обусловливаются существованіемъ этой системы.

2.

Вопросъ о фигурѣ земли (формѣ поверхности уровня) издавна уже интересуетъ ученыхъ. Ученые древняго міра, руководимые философскими воззрѣніями своего времени, принимали землю за шаръ. Ученые позднѣйшіе, исходя изъ довольно вѣроятной гипотезы о жидкомъ состояніи земли въ первобытныя времена и допустивши однородность земной массы, доказали, что земля можетъ быть эллипсоидомъ. Они сдѣлали даже попытку рѣшить вопросъ о фигурѣ земли при допущеніи разнородности земной массы: эта попытка привела къ довольно сложному рѣшенію. Изслѣдованія теоретическія вызвали рядъ практическихъ. Практическія изслѣдованія показали, что поверхность уровня мало отличается отъ эллипсоида вращенія, имѣющаго однако не то сжатіе, какое даетъ теорія при допущеніи однородности земной массы.

Въ практическихъ изслѣдованіяхъ фигуры земли намъ нужно искать отвѣта на первый изъ предстоящихъ намъ вопросовъ: изъ какого рода поверхностей состоитъ система невозмущенныхъ поверхностей уровня. Основываясь на нихъ мы примемъ, что эта система состоитъ изъ эллипсоидовъ вращенія.

Но имѣемъ ли мы право сдѣлать такое допущеніе? Можетъ ли система эллипсоидовъ вращенія быть системой поверхностей уровня при дѣйствіи центробѣжной силы и силы притяженія всей земной массы, или, по крайней мѣрѣ, большей части ея? (Притяженіе небесныхъ тѣлъ, производящее малыя измѣненія формы поверхности уровня, а также притяженіе нѣкоторой части земной массы мы можемъ отнести и отнесемъ къ числу силъ возмущающихъ). Если можетъ, то параметръ ея, мѣняющійся отъ одной поверхности къ другой и характеризующій каждую изъ нихъ, долженъ удовлетворять нѣкоторому условію, подобно тому, какъ потенціалъ (параметръ системы поверхностей уровня, обусловливаемыхъ при женіемъ массы какого нибудь тѣла) удовлетворяетъ условію, выражаемому извѣстнымъ уравненіемъ Пуассона.

Выведемъ условіе, которому долженъ удовлетворять параметръ U системы невозмущенныхъ поверхностей уровня.

Возмемъ систему прямоугольныхъ осей координатъ, ось z которой совпадала бы съ осью вращенія земли. Означимъ чрезъ ω угловую скорость вращенія. На основаніи теоріи поверхностей уровня будемъ имѣть

$$U = \int (X dx + Y dy + Z dz) + \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2),$$

гдѣ X, Y, Z, суть составляющія силы притяженія земной массы по осямъ координатъ.

Взявъ вторыя частныя производныя функціи U относительно x, y, z, сложивъ ихъ и припомнивъ извѣстную теорему Пуассона, получимъ

$$\frac{d^2U}{dx^2}+\frac{d^2U}{dy^2}+\frac{d^2U}{dz^2}=2\omega^2-4\pi\mu\rho,\ (1)$$

гдѣ μ означаетъ притяженіе единицы массы на разстояніи равномъ единицѣ, ρ — плотность элемента массы въ точкѣ, координаты которой суть x, y, z.

Вотъ условіе, которому долженъ удовлетворять параметръ системы невозмущенныхъ поверхностей уровня.

Посмотримъ, можетъ ли входить и какъ можетъ входить такой параметръ въ уравненіе системы эллипсоидовъ вращенія. Ограничимъ наше изслѣдованіе только тѣмъ случаемъ, когда эллипсоиды, составляющіе систему, суть эллипсоиды вращенія около оси z, имѣющіе общій центръ въ началѣ координатъ, т. е. когда уравненіе системы эллипсоидовъ представляется въ видѣ

$$\frac{x^2+y^2}{p}+\frac{z^2}{P}=1,\ (2)$$

гдѣ $P=f(p)$, а p есть геометрическій параметръ системы. Параметръ U, случайно, можетъ быть равнымъ p, но вообще долженъ быть фукціею p, если система поверхностей, выражаемая ур. (2), можетъ быть системой невозмущенныхъ поверхностей уровня. Примемъ же $p=F(U)$ и постараемся опредѣлить видъ функцій f и F подъ условіемъ, чтобъ ур. (1) удовлетворялось по вставкѣ въ него вторыхъ частныхъ производныхъ U, опредѣленныхъ изъ ур. (2). Если наша попытка увѣнчается успѣхомъ, то мы убѣдимся въ своемъ правѣ допустить, что система невозмущенныхъ поверхностей уровня состоитъ изъ эллипсоидовъ вращенія, и найдемъ рѣшеніе вопроса б параметрѣ этой системы.

Считая U функціею p и условившись обозначать, слѣдуя Ламе,

$\frac{d^2p}{dx^2}+\frac{d^2p}{dy^2}+\frac{d^2p}{dz^2}$ чрезъ $\Delta_2 p$, $\left(\frac{dp}{dx}\right)^2+\left(\frac{dp}{dy}\right)^2+\left(\frac{dp}{dz}\right)^2$ чрезъ $\Delta_1 p$, мы можетъ ур. (1) дать видъ

$$\frac{dU}{dp}\Delta_2 p+\frac{d^2U}{dp^2}\Delta_1 p=2\omega^2-4\pi\mu\rho. \quad (3)$$

Во вторую часть ур. (3) входитъ ρ, входитъ плотность среды, въ которой лежитъ система невозмущенныхъ поверхностей уровня. Потому, еслибъ мы отнесли наше изслѣдованіе къ уравненію этой системы внутри всей земной массы, то, для рѣшенія интересующаго насъ вопроса, должны бы были сдѣлать гипотезу о строеніи земли. Но намъ нѣтъ надобности такъ расширять задачу; для насъ достаточно знать уравненіе системы только внутри тѣхъ предѣловъ, въ которыхъ лежатъ точки наблюденій, достаточно убѣдиться, что въ этихъ предѣлахъ система невозмущенныхъ поверхностей уровня можетъ состоять изъ эллипсоидовъ вращенія. Ограничимъ же соотвѣтственно этому нашу задачу. Намъ нужно сдѣлать гипотезу о плотности среды въ упомянутыхъ сейчасъ предѣлахъ. Сдѣлаемъ,—примемъ эту часть среды однородною.

Замѣтимъ, что наша гипотеза не гипотеза. Мы имѣемъ дѣло только съ фундамендальной массой земли, а потому принимаемъ однородною не часть среды, а только фундаментальную массу ея, дѣлаемъ не гипотезу, а выборъ фундаментальной массы. Такой выборъ мы имѣемъ полное право сдѣлать, такъ какъ нашъ произволъ въ этомъ отношеніи ограничивается только тѣмъ требованіемъ, чтобъ возмущенія были не слишкомъ велики.

Итакъ, на основаніи нашего допущенія, ρ величина постоянная, вторая часть ур. (3) величина постоянная. Давши ρ нѣкоторую опредѣленную числовую величину, что мы имѣемъ такое же полное право сдѣлать, какъ принять ρ постояннымъ, мы можемъ вторую часть ур. (3) обратить въ нуль. Но, для общности, допустимъ, что она не равна нулю. Въ такомъ случаѣ первая часть ур. (3) должна быть величиной постоянной, отличной отъ нуля. Вотъ требованіе, которому намъ нужно удовлетворить.

$\frac{dU}{dp}$ и $\frac{d^2U}{dp^2}$ суть функціи p, $\Delta_1 p$ и $\Delta_2 p$ суть функціи p и координатъ x, y, z. Итакъ въ первую часть ур. (3) войдутъ p и координаты. Очевидно, она можетъ быть постоянною только тогда, когда координаты войдутъ въ нее такъ, что могутъ быть исключены посредствомъ ур. (2).

Взявъ первыя частныя производныя p относительно координатъ и означивъ $\frac{dP}{dp}$ чрезъ P′, получимъ

$$2x - \left[\frac{x^2+y^2}{p} + \frac{p\,P'\,z^2}{P^2}\right]\frac{dp}{dx} = 0,$$

$$2y - \left[\frac{x^2+y^2}{p} + \frac{p\,P'\,z^2}{P^2}\right]\frac{dp}{dy} = 0,$$

$$\frac{2pz}{P} - \left[\frac{x^2+y^2}{p} + \frac{p\,P'\,z^2}{P^2}\right]\frac{dp}{dz} = 0,$$

или, исключивъ отсюда $\frac{x^2+y^2}{p}$ посредствомъ ур. (2) и означивъ $\left[1 - \frac{z^2}{P}\left(1 - \frac{p\,P'}{P}\right)\right]$ чрезъ H,

$$2x - H\frac{dp}{dx} = 0,\ 2y - H\frac{dp}{dy} = 0,\ \frac{2pz}{P} - H\frac{dp}{dz} = 0. \quad (4)$$

Изъ ур. (4), означивъ $\left[1 - \frac{z^2}{P}\left(1 - \frac{p}{P}\right)\right]$ чрезъ G, найдемъ

$$\Delta_1 p = \frac{4pG}{H^2}\,.$$

Возмемъ вторыя частныя производныя p относительно координатъ. Исключивъ изъ нихъ $\frac{x^2+y^2}{p}$ посредствомъ ур. (2), замѣнивъ въ нихъ $\frac{dp}{dx}$, $\frac{dp}{dy}$ и $\frac{dp}{dz}$ ихъ величинами изъ ур.

(4) и условившись для краткости обозначать $\frac{d^2 P}{dp^2}$ чрезъ P'', $\left[1-\frac{z^2}{P}\left(1+\frac{p^2 P''}{2P}-\frac{p^2 P'^2}{P^2}\right)\right]$ чрезъ K, получимъ

$$2-\frac{8x^2}{pH}+\frac{2K}{p}\left(\frac{dp}{dx}\right)^2-H\frac{d^2p}{dx^2}=0,$$

$$2-\frac{8y^2}{pH}+\frac{2K}{p}\left(\frac{dp}{dy}\right)^2-H\frac{d^2p}{dy^2}=0, \qquad (5)$$

$$\frac{2p}{P}-\frac{8p^2 P' z^2}{P^3 H}+\frac{2K}{p}\left(\frac{dp}{dz}\right)^2-H\frac{d^2p}{dz^2}=0.$$

Когда определимъ отсюда $\Delta_2 p$ и внесемъ найденныя величины $\Delta_1 p$ и $\Delta_2 p$ въ ур. (3), то увидимъ, что первая часть этого уравненія представится въ видѣ дроби, въ знаменатель которой войдетъ несокращающаяся функція H. Потому, первая часть ур. (3) можетъ быть постоянной, можетъ не зависѣть отъ координатъ точекъ, только тогда, когда функція H отъ нихъ не зависитъ, когда коеффиціентъ при z^2 въ этой функціи равенъ нулю, когда $1-\frac{pP'}{P}=0$, когда $P=m^2p$, гдѣ m — произвольное постоянное.

При $P=m^2p$ уравненія (4) обращаются въ

$$\frac{dp}{dx}=2x,\ \frac{dp}{dy}=2y,\ \frac{dp}{dz}=\frac{2z}{m^2};$$

уравненія (5) — въ

$$\frac{d^2p}{dx^2}=2,\ \frac{d^2p}{dy^2}=2,\ \frac{d^2p}{dz^2}=\frac{2}{m^2};$$

$\Delta_1 p$ дѣлается равной $4p\left[1-\frac{z^2}{m^2p}\left(1-\frac{1}{m^2}\right)\right]$; $\Delta_2 p$ дѣлается равной $4+\frac{2}{m^2}$; уравненіе (3) обращается въ

$$\frac{dU}{dp}\left(4+\frac{2}{m^2}\right)+4p\frac{d^2U}{dp^2}\left[1-\frac{z^2}{m^2p}\left(1-\frac{1}{m^2}\right)\right]-2\omega^2-4\pi\mu\rho. \quad (6)$$

Первая часть послѣдняго уравненія можетъ быть постоянною только въ двухъ случаяхъ: 1) при $m = 1$; 2) при $\frac{d^2U}{dp^2} = 0$. Первый случай мы отвергнемъ: при m равномъ единицѣ система эллипсоидовъ обращается въ систему сферъ, а еслибъ мы приняли, что система невозмущенныхъ поверхностей уровня состоитъ изъ сферъ, то возмущенія вышли бы довольно значительны. Мы допустимъ, что $\frac{d^2U}{dp^2} = 0$. При такомъ допущеніи $\frac{dU}{dp}$ дѣлается равной нѣкоторому произвольному постоянному C, уравненіе (6), обращается въ

$$C\left(4 + \frac{2}{m^2}\right) = 2\omega^2 - 4\pi\mu\rho,$$

требованіе выполняется

Мы убѣдились такимъ образомъ въ своемъ правѣ принять за систему невозмущенныхъ поверхностей уровня систему эллипсоидовъ вращенія, уравненіе которой

$$\frac{x^2 + y^2}{p} + \frac{z^2}{m^2 p} = 1, \quad (7)$$

гдѣ p есть параметръ мѣняющійся отъ одной поверхности къ другой и характеризующій каждую изъ нихъ, m^2 — параметръ общій для всѣхъ поверхностей.

Того же результата мы могли бы достигнуть другимъ болѣе легкимъ путемъ, мы могли бы его достигнуть, припомнивши формулы притяженія однороднаго эллипсоида. Естествено поэтому спросить насъ: на какомъ основаніи мы выбрали нашъ путь для рѣшенія вопроса. Мы выбрали его потому, что онъ путь общій, что онъ можетъ дать нѣсколько рѣшеній вопроса о томъ, какимъ образомъ параметръ U можетъ входить въ уравненіе системы эллипсоидовъ вращенія, что онъ можетъ дать всѣ его рѣшенія. *) Имѣя всю систему рѣшеній, изъ которыхъ каждое соотвѣтствуетъ особому распредѣленію фундаментальной массы, можно сдѣлать выборъ между ними, основываясь на степени согласія результатовъ изъ нихъ вытекающихъ съ результатами наблюденій. Мы не получили, да и не желали получить всей системы рѣшеній вопроса, потому что не имѣли въ виду сравнивать результатовъ ихъ съ наблюденіями. Мы желали только обратить на этотъ вопросъ вниманіе особъ, которые захотѣли бы заняться обстоятельнымъ его изслѣдованіемъ.

За основаніе нашихъ дальнѣйшихъ изслѣдованій мы примемъ найденное нами рѣшеніе вопроса, примемъ, *что система невозмущенныхъ поверхностей уровня выражается ур.* (7), что она состоитъ изъ эллипсоидовъ вращенія около оси z, имѣющихъ общій центръ и общій эксцентрицитетъ, разнящихся только величиною большой полуоси, какъ показываетъ сравненіе ур. (7) съ извѣстнымъ уравненіемъ

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{a^2(1-e^2)}=1.$$

Будемъ надѣяться, что единственное требованіе, ограничивающее нашъ произволъ въ выборѣ той или другой системы невозмущенныхъ поверхностей уровня, требованіе незначительности возмущеній, выполнится при нашемъ выборѣ.

Примѣчаніе. Говоря: *мы убѣдились такимъ образомъ въ своемъ правѣ принять за систему невозмущенныхъ поверхностей уровня* и проч., мы допускаемъ, что ур. (1) выражаетъ не

---

*) Такъ на примѣръ, давши ρ опредѣленную числовую величину, обращающую вторую часть ур. (3) въ нуль, мы получили бы, между прочими, слѣдующее рѣшеніе вопроса:

$$\frac{x^2+y^2}{c^2\sec^2 U}+\frac{z^2}{c^2 tg^2 U}=1.$$