

В.А. Стеклов

**Основы теории интегрирования
обыкновенных дифференциальных
уравнений**

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 51
ББК 22.1
С79

С79 **Стеклов В.А.**
Основы теории интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений / В.А. Стеклов – М.: Книга по Требованию, 2014. – 433 с.

ISBN 978-5-458-56908-8

ISBN 978-5-458-56908-8

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2014
© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2014

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первоизданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

ровании простейших дифференциальных уравнений математической физики (напр. в задаче об охлаждении тел линейных размеров). Эти уравнения приводят в первую очередь к интегрированию обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка вида:

$$V''(x) + [\lambda p(x) - q(x)] V(x) = 0, \quad (3)$$

где λ — постоянный параметр, а $p(x)$ и $q(x)$ — заданные функции, определяющиеся характером задачи. Функции $V(x)$, удовлетворяющие этому дифференциальному уравнению и некоторым определенным дополнительным условиям, и являются фундаментальными функциями Стеклова.

Обыкновенно, задача приводит к ряду значений параметра λ , $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k, \dots)$, которым и соответствуют фундаментальные функции:

$$V_0(x), V_1(x), V_2(x), \dots, V_k(x), \dots \quad (4)$$

Особый интерес представляют фундаментальные функции (4), когда они являются ортогональными по отношению к функции $p(x)$. Разложение интегралов обыкновенных дифференциальных уравнений теоретической физики в ряды по соответствующим ортогонально-фундаментальным функциям и есть задача, которую Стеклов поставил и в широких пределах решил. Методы, которые разворачивались в течение столетия, были таким образом объединены в стройную систему единой идеей, выдвинутой В. А. Стекловым. Исследование фундаментальных функций составляет основу его аналитических работ. Но куда они собственно относятся: к чистой или к прикладной математике?

В области собственно механики В. А. Стеклова наиболее интересовали вопросы гидродинамики и те задачи теории упругости, которые, с математической точки зрения, сближаются с задачами гидродинамики. По существу, и общая электростатическая задача, впервые формулированная Дирихле и К. Нейманом, относится к тому же типу. Дело сводится к интегрированию уравнений Лапласа и Пуассона, получающих многообразные видоизменения в различных предельных условиях. Роббеном, Шварцем, Пуанкаре были скорее намечены, чем разработаны методы решения этих задач, когда ими занялись два выдающихся русских математика — А. М. Ляпунов и В. А. Стеклов. В широких пределах они дали исчерпывающие их решения.

Когда в начале текущего столетия развернулось учение об интегральных уравнениях, в руках В. А. Стеклова был готовый аппарат, которым он был в состоянии решить многие из проблем, этим учением поставленных. В. А. Стеклов некоторое время был даже противником теории интегральных уравнений, руководясь тем, что к решению ее задач он имел возможность подойти прежними классическими средствами. В сочинении „Основные задачи математической физики“ в двух частях, выпущенном Академией Наук в 1922 и 1923 г.г., В. А. Стеклов объединил важнейшие работы, составившие дело его жизни, в одну стройную систему. В этом сочинении читатель найдет указание на оригинальные работы, из которых эта система составила.

Однако эти книги, как и подлинные мемуары Стеклова, требуют большой математической подготовки. Предлагаемое сочинение имело целью помочь молодым математикам получить эту подготовку. За ним должна была последовать другая книга — об интегрировании уравнений в частных производных. Неожиданная кончина В. А. Стеклова лишила нас возможности эту книгу получить.

В. А. Стеклов принадлежал к числу тех ученых, которые после Октябрьской революции ни на один день не уклонились от живой, интенсивной работы и творчески содействовали развитию научной работы в СССР, прежде всего в области точного знания. Но как выдающийся организатор, в качестве вице-президента Академии Наук, он развернул деятельность, далеко выходящую за пределы тех наук, которым были посвящены его работы, и имя его всегда будет тесно связано с организацией научной работы в первые годы существования Советской России.

Имея около 70 лет от роду, В. А. Стеклов производил впечатление крепкого, жизнерадостного и трудоспособного человека. В феврале 1926 года в Казани, на праздновании столетия открытия неевклидовой геометрии, он был душой торжества, и никому не могло притти в голову, что В. А. доживает последние месяцы своей жизни. Но вскоре случайное легочное заболевание развернулось в тяжелый и острый туберкулезный процесс. 30-го мая 1926 г. В. А. Стеклова не стало.

Научный Отдел Гиза с особенною гордостью преподносит русским математикам это наследие В. А. Стеклова, которое осталось в портфеле Отдела. К сожалению, вторая часть сочинения не была покойным подготовлена к печати.

ПРЕДИСЛОВИЕ.

В предлагаемом курсе излагаются основные начала теории интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений и дается основной материал, предварительное знание которого необходимо для изучения общей аналитической теории дифференциальных уравнений.

Особое внимание обращено на выяснение основных понятий об интегралах, общих интегралах, интегральных уравнениях, о частных и особенных решениях, а также на различные приемы преобразования одних систем дифференциальных уравнений в другие, взаимно эквивалентные.

После выяснения этих основных понятий, поясненных различными конкретными примерами, рассматриваются главнейшие типы уравнений сначала первого порядка, а затем уравнений какого угодно порядка, интегралы которых получаются при помощи конечного числа действий и представляются либо в элементарных функциях, либо в квадратурах, т.-е. излагаются важнейшие результаты классических работ творцов теории: Эйлера, Коши, Лагранжа, Д'Аламбера, Абеля, Лиувилля, Гаусса, Якоби и др.

Особое внимание обращено на теорию линейных уравнений и, в особенности, уравнений с постоянными коэффициентами ввиду их чрезвычайно важных и частых применений, встречающихся во всех областях физико-математических наук.

Здесь также, после выяснения основных свойств этих уравнений и их решений, вопрос рассматривается преимущественно с практической точки зрения, т.-е. указываются приемы, при помощи которых можно в известных случаях на самом деле получить в определенном виде окончательное решение задачи, и лишь отчасти затрагивается вопрос о разложении в бесконечные ряды интегралов линейных уравнений в области критических точек их коэффициентов.

Каждый отдел теории иллюстрируется разнообразными примерами из различных областей анализа, геометрии, общей механики и астрономии.

В виде дополнения к курсу присоединено доказательство существования интеграла Коши для какой угодно нормальной системы дифференциальных уравнений по методу Коши-Пикара, изложены: общий способ Коши интегрирования систем линейных уравнений с постоянными коэффициентами и доказательство двух теорем, выражающих условие зависимости (и независимости) n функций, зависящих от n аргументов, которыми постоянно приходится пользоваться как в теории обыкновенных, так, в особенности, в теории уравнений с частными производными.

Читателю, основательно усвоившему предлагаемый материал, уже не трудно будет перейти к изучению теории интегрирования уравнений с частными производными, а также и новейших методов интегрирования дифференциальных уравнений, получивших в настоящее время широкое развитие и имеющих не только первостепенное теоретическое, но и такое же практическое значение.

Вопросы интегрирования нелинейных систем дифференциальных уравнений находятся в столь тесной связи с теорией дифференциальных уравнений с частными производными, что важнейшие из них (начало последнего множителя Якоби, интегрирование канонических уравнений и т. п.) будут рассмотрены в первом отделе второй части курса, посвященном теории дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка.

Академик *В. Стеклов.*

Ленинград, 15 июля 1923 г.

СОДЕРЖАНИЕ.

От научного отдела государственного издательства	Стр. V
Предисловие	VII

ГЛАВА I.

ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ.

I.	Предварительные замечания	1
	Определение дифференциальных уравнений обыкновенных и с частными производными. — Различные задачи анализа, геометрии, общей механики, астрономии и математической физики, приводящие к определению неизвестных величин при помощи дифференциальных уравнений. — Понятие об интегрировании дифференциальных уравнений, об их решениях или интегралах .	1—6 .
II.	Преобразование одних дифференциальных уравнений в другие, им эквивалентные. Нормальные системы дифференциальных уравнений первого порядка	16
	Одно дифференциальное уравнение какого угодно порядка с одной неизвестной функцией. — Приведение этого уравнения к системе дифференциальных уравнений первого порядка. — Общий тип нормальных систем первого порядка. — Приведение какой угодно системы дифференциальных уравнений к одному уравнению. — Порядок системы. — Приведение какой угодно системы дифференциальных уравнений к нормальной системе первого порядка . .	16—34
III.	Примеры преобразования одних уравнений в другие	34
IV.	Об интегралах дифференциальных уравнений.	39
	Определение интеграла нормальной системы дифференциальных уравнений, число различных интегралов. — Общий интеграл и частные интегралы (или решения). — Различные свойства общего интеграла. — Примеры. — Общий интеграл одного уравнения какого угодно порядка; интегралы различных порядков, число их. — Упрощение задачи об интегрировании дифференциального уравнения, когда известно некоторое число его первых, вторых	

	<i>Стр.</i>
и т. д. интегралов. — Примеры. — Системы дифференциальных уравнений какого угодно порядка, их общий интеграл. — Общий интеграл Коши нормальной системы дифференциальных уравнений	39—86
V. ОСОБЕННЫЕ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ	86
Особенные решения нормальной системы дифференциальных уравнений. — Особенности решения различных родов, особые группы особенных решений, добавочные особенные решения. — Различные примеры	86—97
VI. ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА. ИХ СВЯЗЬ С СИСТЕМАМИ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ	97
Уравнения однородные и неоднородные. — Приведение неоднородных линейных уравнений к однородным. — Нормальная система обыкновенных уравнений, эквивалентная данному линейному уравнению с частными производными первого порядка. — Общий интеграл линейного уравнения с частными производными первого порядка	97—102

ГЛАВА II.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА.

I. УРАВНЕНИЯ С РАЗДЕЛЕННЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ . .	102
Примеры	102—105
II. ДВА ОБЩИХ ПРИЕМА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДАННОГО УРАВНЕНИЯ В ДРУГОЕ С РАЗДЕЛЕННЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ	105
Способ множителя, способ изменения переменных. — Примеры . .	105—114
III. ГЛАВНЕЙШИЕ ТИПЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА, ИНТЕГРИРОВАНИЕ КОТОРЫХ ПРИ ПОМОЩИ УКАЗАННЫХ ВЫШЕ ПРИЕМОВ ПРИВОДИТСЯ К КВАДРАТУРАМ	114
Неполные уравнения. — Параметрическая форма интеграла, его геометрическое значение. — Однородные уравнения. — Однородные уравнения первой степени и уравнения к ним приводимые. — Геометрические приложения. — Линейные уравнения первого порядка (И. в. Бернулли), различные приемы их интегрирования; уравнения, приводимые к линейным. — Уравнение Якова Бернулли. — Уравнение Эйлера-Рикатти. — Уравнения	

	<i>Стр.</i>
Буля и Риккатти. — Случаи их интегрируемости в квадратурах. — Связь с уравнением Бесселя. — Уравнение Якоби. — Примеры	114—158
IV. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПО- РЯДКА, ИНТЕГРИРУЕМЫЕ ПО СПОСОБУ ДИФФЕРЕН- ЦИРОВАНИЯ	158
Уравнение Лагранжа. — Уравнение Клеро. — Общий инте- грал и особенные решения. — Геометрическое значение особенных решений. — Применение к различным задачам анализа и геометрии	158—172
V. ИНТЕГРИРУЮЩИЙ МНОЖИТЕЛЬ ЭЙЛЕРА. БЕСКО- НЕЧНО МАЛЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ	172
Общая теория интегрирующего множителя. — Уравнение, опреде- ляющее множитель. — Составление уравнений, допускающих мно- житель данного вида. — Множитель, зависящий от одной из пере- менных; множитель, равный произведению [двух функций, одна из которых зависит от одной, другая от другой переменной. — Интегрирующий множитель однородного уравнения. — Общие формулы интеграла дифференциального уравнения, когда известен его интегрирующий множитель. — Бесконечно малые transforma- ции С. Ли и их связь с интегрирующим множителем. — Простей- шие типы бесконечно малых преобразований и им соответствую- щие дифференциальные уравнения. — Обобщение однородных уравнений. — Бесконечно малые преобразования для уравнения Абеля и простейшие случаи его интегрирования в квадратурах .	172—199
VI. НЕКОТОРЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ . . .	199
Задача о траекториях. — Криволинейные координаты. — Траекто- рии для семейства парабол. — Ортогональные траектории кониче- ских сечений; эллиптические координаты. — Линии кривизны на данной поверхности и их дифференциальные уравнения в декар- товых координатах и в параметрической форме. — Линии кри- визны на геликоиде; случай винтовой поверхности с прямоуголь- ной нарезкой. — Линии кривизны на поверхности вращения; случай сферы. — Асимптотические линии на данной поверхности, их дифференциальные уравнения. — Асимптотические линии на поверхности геликоида и поверхности вращения. — Асимптотиче- ские линии на линейчатой поверхности; случай линейчатой поверх- ности, направляющей плоскостью которой служит одна из коор- динатных плоскостей. — Уравнение Эйлера и его геометрическое значение. — Применение к выводу теоремы сложения аргументов для эллиптических функций	199—225
VII. ОБ ОСОБЕННЫХ РЕШЕНИЯХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА	225
Способы нахождения особенных решений независимо от общего интеграла. — Критерий Коши-Пуассона отличия частного решения от особенного. — Различные примеры	225—237

ГЛАВА III.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПОРЯДКА ВЫШЕ
ПЕРВОГО.

- I. Простейшие типы уравнений, интегрирование которых приводится к квадратурам или понижается их порядок преобразованием переменных 238
- Уравнения, содержащие только независимую или зависимую переменную и производную от неизвестной функции порядка n . — Общий интеграл; приведение n -кратной квадратуры к простой. — Уравнения порядка n , не содержащие неизвестной функции и ее первых производных до порядка $k < n$. — Уравнения вида $f(y^{(n-2)}, y^{(n-1)}, y') = 0$, их применение в динамике точки. — Уравнения, не содержащие независимой переменной. — Уравнение Лиувилля. — Уравнения однородные относительно неизвестной функции и ее производных. — Линейные однородные уравнения; связь линейного однородного уравнения с уравнением Эйлера-Рикатти. — Уравнение Лагранжа (обобщение уравнения Клеро). — Примеры 238—262
- II. Об особенных решениях какого угодно дифференциального уравнения порядка n 262
- Получение особенного интеграла из общего. — Примеры 262—265
- III. Некоторые применения предыдущей теории к геометрии и механике 265
- Определение плоской кривой, радиус кривизны которой пропорционален длине нормали. — Плоская кривая, касательные к диаметральной линии которой пересекаются в одной точке. — Погонная кривая. — Геодезические линии. — Геодезические линии на цилиндрической поверхности и на поверхности вращения; случай сферы. — Движение материальной точки в среде, сопротивление которой пропорционально квадрату скорости, под действием центральной силы, пропорциональной расстоянию точки от центра. — Движение тяжелой материальной точки по вертикали в среде, сопротивление которой пропорционально кубу скорости . 265—285

ГЛАВА IV.

ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ.

- I. Общие свойства линейных дифференциальных уравнений 286
- Уравнения однородные и неоднородные. — Частные решения однородных линейных уравнений. — Совокупность независимых реше-

Стр.

ний, их наибольшее число. — Существование совокупности n независимых между собою частных решений нормальной системы n линейных однородных уравнений в промежутке изменения независимой переменной, в котором коэффициенты уравнений остаются непрерывными. — Общий интеграл нормальной системы линейных однородных уравнений. — Переход к одному линейному уравнению порядка n . — Совокупность n линейно независимых его частных решений. — Общий интеграл. — Приведение интегрирования уравнения порядка n к интегрированию линейного же уравнения порядка $n - k$, когда известно k линейно независимых частных его решений. — Примеры. — Полиномы Якоби, Лежандра и Чебышева. — Линейное сопряженное уравнение. — Преобразование независимой переменной; приложение к преобразованию линейного уравнения Эйлера к уравнению с постоянными коэффициентами	286—323
II. Линейные неоднородные уравнения. Метода изменения произвольных постоянных	323
Приведение задачи к интегрированию однородного уравнения, когда известно частное решение неоднородного. — Примеры. — Общая метода Лагранжа изменения произвольных постоянных для случая одного уравнения порядка n . — Примеры	323—334
III. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами	334
Частные решения линейного однородного уравнения порядка n . — Характеристическое уравнение. — Случай простых корней. — Общий интеграл. — Случай кратных корней. — Способ Коши восстановления частных решений, сливающихся в одно в случае кратных корней. — Способ нахождения n первых интегралов линейного однородного уравнения порядка n . — Примеры	334—345
IV. Системы линейных дифференциальных уравнений	345
Приведение системы n линейных однородных уравнений первого порядка к одному линейному уравнению порядка n . — Примеры. — Независимые между собою решения системы линейных однородных уравнений. — Основная система независимых решений. — Общий интеграл. — Приведение задачи к интегрированию системы $n - k$ линейных уравнений, когда известна совокупность k независимых между собою частных решений. — Примеры из анализа и общей механики. — Системы неоднородных линейных уравнений. — Приведение задачи к интегрированию системы линейных однородных уравнений, когда известно частное решение уравнений неоднородных. — Общая метода Лагранжа изменения произвольных постоянных. — Примеры	345—366

	<i>Стр.</i>
V. Системы линейных уравнений с постоянными коэффициентами	367
Интегрирование по способу Эйлера. — Характеристическое уравнение. — Случай простых корней. — Кратные корни. — Частные решения, соответствующие простым и кратным корням. — Общий интеграл. — Примеры. — Система трех линейных однородных уравнений с постоянными коэффициентами. — Ее кинетическая интерпретация и связь с интегрированием уравнения первого порядка Якоби. — Пример. — Способ интегрирования Д'Аламбера и его применение к частным случаям. — Системы линейных уравнений не в нормальной форме и приемы их интегрирования.	367—386
VI. Интегрирование дифференциальных линейных уравнений при помощи рядов	386
Критические точки коэффициентов линейного уравнения и его интегралов. — Разложение интеграла вблизи критических точек в бесконечные ряды по степеням независимой переменной. — Дифференциальное уравнение Бесселя, его критические точки и определяющее уравнение. — Частные решения под видом рядов. — Функции Бесселя первого и второго рода. — Различные уравнения второго порядка, приводимые к уравнению Бесселя преобразованием переменных. — Случаи применения ряда Маклорена. — Дифференциальное уравнение гипергеометрического ряда и его критические точки. — Определяющее уравнение для точки $x=0$. Гипергеометрический ряд Гаусса	386—398
<i>ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ СТАТЬИ.</i>	
I. Общие условия существования интеграла Коши для какой угодно системы дифференциальных уравнений	399
II. Метода Коши интегрирования системы однородных линейных уравнений с постоянными коэффициентами.	409
III. Доказательство теорем № 33 отдела, главы IV.	416