Ж. Адамар

Элементарная геометрия

Часть вторая. Стереометрия

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 51
ББК 22.1
Ж11

Ж. Адамар

Ж11 Элементарная геометрия: Часть вторая. Стереометрия / Ж. Адамар – М.: Книга по Требованию, 2024. – 760 с.

ISBN 978-5-458-25327-7

Настоящее второе издание второй части книги существенно отличается от первого в двух отношениях. Прежде всего, из материала первого издания сохранены лишь разделы, посвященные непосредственно стереометрии вместе с её дополнительными главами (инверсия, теорема Эйлера, правильные многогранники и группы вращений).

ISBN 978-5-458-25327-7

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2024
© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2024

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

Серия Книжный Ренессанс
www.samizday.ru/reprint

Стр.

410—412. Прямой и прямоугольный параллелепипеды 87
413—416. Пирамида. Сечения пирамиды параллельными плоскостями. Боковая поверхность правильной пирамиды 88
417. Всякий многогранник можно разложить на пирамиды 90
Упражнения 531—550 91

Глава II. **Объём призмы.**

418—419. Определение понятия объёма многогранника 92
420—422. Объём прямоугольного параллелепипеда 93
423. Всякая наклонная призма равновелика прямой призме, основанием которой служит перпендикулярное сечение, а высотой — боковое ребро данной призмы 96
424—425. Объём прямого параллелепипеда и прямой призмы . . . . . . —
426—427. Объём произвольного параллелепипеда и произвольной призмы . 98
Упражнения 551—554 99

Глава III. **Объём пирамиды.**

428. Две треугольные пирамиды, имеющие равновеликие основания и одну и ту же высоту, равновелики 100
429. Объём пирамиды 102
430. Объём усечённой пирамиды . . . . —
431. Объём усечённой призмы 105
Упражнения 555—567. 106
Задачи (568—588) к шестой книге 107

КНИГА VII. **ПЕРЕМЕЩЕНИЯ. СИММЕТРИЯ. ПОДОБИЕ.**

Глава I. **Перемещения.**

432—434. Условие равенства двух фигур. Вращение. Транспозиция относительно прямой 110
435. Поступательные перемещения 112
436. Винтовые перемещения 113
437—440. Разложение произвольного перемещения на две транспозиции относительно двух различных прямых. Сложение перемещений. Две равные фигуры всегда можно совместить, если они имеют одну соответственно общую точку, с помощью вращения: в общем случае — с помощью винтового перемещения . . . —
Упражнения 589—612 117

Глава II. **Симметрия.**

441—443. Определения. Две фигуры, симметричные с третьей относительно каких-либо точек или плоскостей, равны 119
444—445. Всякая плоская фигура равна фигуре ей симметричной. Следствия. 120
446. Две симметричные фигуры имеют противоположное расположение. 121
447. Два симметричных многогранника равновелики . . . . —
448. Ось транспозиции, центр и плоскость симметрии данной фигуры. —
Упражнения 613—621 122

Глава III. **Гомотетия и подобие.**

449—450. Определение. Основная теорема 123
451—452. Обратная теорема. Ось подобия трёх фигур; плоскость подобия четырёх фигур 124

Стр.
453—454. Подобные фигуры. Подобные многогранники 126
455. Отношение объёмов подобных многогранников 127
Упражнения 622—629 128
Задачи (630—641) к седьмой книге . . . . —

КНИГА VIII. КРУГЛЫЕ ТЕЛА.

Глава I. Общие определения. Цилиндр.

456. Цилиндрические поверхности 131
457. Прямые, касательные к поверхности. Случай цилиндрической поверхности . . . . —
458—459. Сечения цилиндрической поверхности. Цилиндры 132
460—461. Конические поверхности. Конусы 133
462. Поверхности вращения 134
463—464. Цилиндр с круговым основанием. Боковая поверхность . . 135
465. Объём цилиндра 137
Упражнения 642—652 . . . . —

Глава II. Конус. Усечённый конус.

466—467. Конус вращения. Боковая поверхность конуса вращения . . 138
468. Объём конуса 141
469. Боковая поверхность усечённого конуса вращения . . . . . . —
470. Объём усечённого конуса 142
Упражнения 653—670 143

Глава III. Шар и его свойства.

471—473. Шар как поверхность вращения 144
474—475. Элементы, определяющие шар 146
476—478. Конус и цилиндр, описанные около шара. Касательные плоскости к шару, проходящие через данную прямую 148
479—481. Пересечение шаров 151
482—483. Степень точки относительно шара. Шары, ортогональные между собой 152
484—485. Радикальная плоскость, радикальная ось и радикальный центр . 153
486—491. Шары, гомотетичные между собой. Общие касательные плоскости 155
Упражнения 671—715 158

Глава IV. Поверхность и объём шара.

492. Поверхность, образованная вращением отрезка около оси, лежащей с ним в одной плоскости и его не пересекающей . . 161
493—496. Поверхность шарового пояса. Поверхность шара 162
497. Объём тела, образованного вращением треугольника около оси, лежащей в его плоскости, проходящей через его вершину и его не пересекающей 164
498—499. Объём шарового сектора. Объём шара 167
500—501. Объём шарового кольца. Объём шарового слоя и шарового сегмента 169
Упражнения 716—732 171
Задачи (733—747) к восьмой книге 173

Стр.

ДОПОЛНЕНИЯ КО ВТОРОЙ ЧАСТИ.

Глава I. Полюсы и полярные плоскости относительно шара. Инверсия в пространстве. Дополнения к сферической геометрии.

502—504. Полюсы и полярные плоскости относительно шара 176
505. Взаимные поляры 178
506. Взаимно-полярные фигуры . . . . —
507—510. Инверсия; её основные свойства 180
511—513. Фигура, обратная плоскости или шару. Приложение к тетраэдру. 182
514—517. Фигура, обратная окружности. Антипараллельные сечения наклонного конуса 184
518—519. Стереографическая проекция 186
520. Шары, пересекающие два данных шара под равными углами . 187
521. Конусы, проходящие через две окружности, лежащие на одном шаре 188
522—524. Задача о касании шаров 189
525—526. Приложение инверсии к сферической геометрии 191
527. Неизменяемость сложного отношения при инверсии 192
528—530. Инверсия на шаре. Применение к задаче о касании окружностей 193
Упражнения 748—823 195

Глава II. Площади сферических многоугольников.

531—532. Выбор единиц измерения. Площадь двуугольника 204
533. Равновеликость двух симметричных сферических треугольников. 205
534. Площадь сферического треугольника или многоугольника . . . 206
535—536. Теорема Лекселля 207
Упражнения 824—835 209

Глава III. Теорема Эйлера. Правильные многогранники.

537—538. Предварительные замечания и ограничения 210
539—540. Области, имеющие одинаковую связность 211
541. Односвязные области . . . . —
542—543. Всякий выпуклый многогранник есть многогранник нулевого рода. Примеры многогранников не нулевого рода 212
544. Теорема Эйлера 214
545. Порядок связности многогранной поверхности 215
546. Правильные многогранные углы . . . . —
547—550. Правильные многогранники; общие свойства 218
551. Вращения и симметрии правильных многогранников 222
552—556. Куб. Правильный тетраэдр 223
557—558. Сопряжённые правильные многогранники 229
559. Пример: октаэдр 230
560—562. Существование только пяти типов правильных многогранников —
563. Построение правильных многогранников пяти типов 233
564. Вычисление элементов правильных многогранников 234
Упражнения 836—863 236

ПРИБАВЛЕНИЯ.

Прибавление *F*. О понятии объёма.

565—570. Объём тетраэдра. Объём пирамиды 241
571. Объём многогранника 244

Стр.

Прибавление *G*. О понятиях длины, площади и объёма для любых линий и поверхностей.

572—574. Длина дуги пространственной кривой 245
575—576. Развёртывающиеся поверхности 250
577—585. Объёмы тел, ограниченных кривыми поверхностями 252
586—591. Площадь кривой поверхности 259

Прибавление *H*. О правильных многогранниках и группах вращений.

592—593. Группы перемещений 263
594. Преобразование перемещений 265
595—609. Конечные группы. Соответствующие правильные многогранники 266
610—611. Фундаментальные области 282

Прибавление *K*. Теорема Коши о выпуклых многогранниках.

612—613. Формулировка теоремы. Предварительные замечания 285
614—615. Леммы I, II, III 288
616—618. Доказательство теоремы Коши 293

РЕШЕНИЯ УПРАЖНЕНИЙ И ЗАДАЧ.

Составлены *Д. И. Перепёлкиным*

КНИГА ПЯТАЯ. **ПЛОСКОСТЬ И ПРЯМАЯ ЛИНИЯ.**

Упражнения 297
Задачи 370

КНИГА ШЕСТАЯ. **МНОГОГРАННИКИ.**

Упражнения 391
Задачи 416

КНИГА СЕДЬМАЯ. **ПЕРЕМЕЩЕНИЯ. СИММЕТРИЯ. ПОДОБИЕ.**

Упражнения 434
Задачи 476

КНИГА ВОСЬМАЯ. **КРУГЛЫЕ ТЕЛА.**

Упражнения 501
Задачи 583

ДОПОЛНЕНИЯ КО ВТОРОЙ ЧАСТИ.

Упражнения 597

Указатель содержания задач 759

ПРЕДИСЛОВИЕ КО 2-му РУССКОМУ ИЗДАНИЮ.

Настоящее — второе — издание перевода второй части „Элементарной геометрии“ Адамара существенно отличается от первого в двух отношениях.

Прежде всего, из большого и разнообразного материала, содержащегося во второй части курса Адамара, в настоящее издание включено лишь около половины. При этом был отобран материал, непосредственно относящийся к стереометрии, включая и некоторые „дополнительные“ её главы (инверсия, теорема Эйлера, правильные многогранники и группы вращений). Разделы, не включённые в настоящее издание, могли бы составить содержание третьей части книги, также представляющей собой законченное целое и посвящённой элементарным методам высшей геометрии. Следует отметить, что такого рода отбор материала, при котором некоторые главы были опущены, не потребовал почти никаких изменений в оставшейся части текста: она оказалась почти совершенно независимой от тех частей книги, которые не вошли в настоящее издание. Существенные изменения пришлось внести лишь в изложение прибавления G.

Далее в настоящем издании помещены решения всех имеющихся в тексте задач. Мы полагаем, что весьма многие из помещённых в книге задач нельзя рассматривать только как темы для упражнений. Они содержат большой и интересный фактический материал, дополняющий содержание книги. Ряд этих задач мог бы по своему содержанию войти в „теоретическую“ часть книги при условии увеличения её объёма. В то же время самостоятельное решение этих, по большей части трудных, задач потребовало бы от читателя весьма большого количества времени и значительных усилий. Таковы были те соображения, по которым в настоящем издании приводятся решения задач (как это было сделано в последнем — 3-м — издании первой части).

Содержание задач перепечатано в основном без изменений. Исправлено лишь несколько ошибок и опечаток, вкравшихся в русский перевод (№№ 458, 587, 628, 799; нумерация везде даётся по настоящему изданию, где задачи были перенумерованы заново). Далее в процессе решения задач выявилась необходимость исправить отдельные погрешности или уточнить редакцию ряда задач, данную Адамаром (№№ 482, 486, 495, 502, 503, 521, 523, 545, 589, 590, 595, 596, 605, 606, 620, 630, 651, 662, 664, 667, 697, 709, 710, 725, 734, 736, 749, 758, 768, 785, 786, 788, 789, 800, 812, 822, 824, 851, 863); в задачах 712 и 813 мы позволили себе опустить имевшиеся там указания на путь решения. В связи с тем, что часть текста была, как указано выше, опущена, пришлось включить одну задачу (№ 821) из опущенной части текста (часть упражнения 921 первого издания), необходимую для понимания следующей за ней задачи. Была также улучшена редакция некоторых задач. Само собой разумеется, что автор этих строк принимает на себя ответственность за внесённые изменения.

Что касается характера помещённых решений, принятой манеры их изложения и т. д., то мы могли бы повторить здесь сказанное по этим вопросам в предисловии к 3-му изданию первой части, к которому непосредственно примыкает настоящее издание второй части.

Чтобы облегчить читателю ориентировку в содержании задач и помочь в подборе задач на ту или иную тему, мы поместили в конце книги небольшой

„Указатель содержания задач". Заметим по этому поводу, что он далеко не исчерпывает и не может исчерпать всего содержания задач.

В переводе тех разделов курса Адамара, которые вошли в первую часть и в настоящее издание второй части, приняли участие: Н. Н. Николаев (книги I и II), Ю. О. Гурвиц (книга III, дополнения к третьей книге, книга V), А. Н. Демме (книги IV, VI и VIII), А. Н Перепёлкина (Дополнения ко второй части; прибавления *F*, *G* и *H*). Наконец, пишущему эти строки принадлежит перевод книги VII и прибавлений *A*, *B*, *C*, *D*, *E* и *K*, а также редакция перевода и составление решений всех задач.

В решении задачи 518 составитель воспользовался любезным содействием проф. А. И. Маркушевича. Ряд полезных указаний составитель решений получил также от рецензента доц. С. И. Зетеля. Составитель выражает им здесь свою искреннюю признательность.

Д. Перепёлкин

Москва, февраль 1950 г.

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ АВТОРА К 7-му ИЗДАНИЮ.

Настоящее издание подверглось значительной переработке.

Я уже давно собирался, следуя указанию покойного Легурга (Lesgourgues), объединить в одно целое теорию многогранных углов и теорию сферических многоугольников; в этом отношении я имел очень полезный для меня пример в работе одного из моих уважаемых коллег, работающего в университете Буэнос-Айреса. Соответствующее видоизменение было уже ранее осуществлено в планиметрии, где оно значительно проще. В этом издании то же самое видоизменение оказалось возможным осуществить и для пространства; наряду с другими преимуществами оно обладает весьма ценной с педагогической точки зрения особенностью: при этом получаются более простые и более ясные чертежи.

Наряду с рядом исправлений мне пришлось пересмотреть доказательство теоремы Коши (прибавление *L*)[1]) о выпуклых многогранниках; по поводу прежнего доказательства этого предложения мне было сделано существенное замечание Жераром (L. Gérard); пользуясь его любезными указаниями, мне удалось устранить сделанное им возражение в новом изложении этого доказательства.

В настоящее время среди преподавателей наблюдается вполне обоснованный отказ от пользования выражением „симметрия относительно прямой", не отражающим того существенного различия, которое имеется между этим видом симметрии и симметрией относительно точки или относительно плоскости. Из различных терминов, предлагаемых взамен этого выражения, я предпочёл термин „транспозиция" (transposition), и притом из соображений чисто грамматического порядка: этот термин допускает удобные обороты речи („le transposé d'un point", „la transposée d'une figure"), в то время как другие предложенные названия, насколько они мне известны, этой гибкостью не обладают[2]).

Как и в предыдущих изданиях, я обращал внимание на подбор упражнений. Основные улучшения касаются здесь сферической (упр. 485 и 486)[3]) и проективной геометрии.

Ж. Адамар.

---

[1]) Прибавление *K* настоящего издания. *Прим. ред. перевода.*

[2]) В переводе термин „транспозиция" сохранён за отсутствием более подходящего термина, могущего заменить выражение „симметрия относительно прямой", хотя он и не обладает в русском языке теми достоинствами, которые отмечает автор. *Прим. ред. перевода.*

[3]) Упражнения 494 и 495 в настоящем издании. *Прим. ред. перевода.*

КНИГА ПЯТАЯ.

ПЛОСКОСТЬ И ПРЯМАЯ ЛИНИЯ.

ГЛАВА I.

ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ.

325. Как мы знаем (Пл., п. 6)[1]), *плоскостью называется поверхность, обладающая тем свойством, что всякая прямая, соединяющая две её точки, лежит в ней целиком.*

Такая поверхность безгранична; однако, чтобы её начертить, изображают ограниченную часть её, чаще всего часть, ограниченную прямоугольником так, как это сделано на чертежах 2 и следующих.

Согласно предыдущему определению, прямая может занимать относительно плоскости три различных положения:

1) Она может иметь с ней две общие точки и, следовательно, лежать в ней целиком; в этом случае говорят также, что плоскость *проходит* через прямую.

2) Она может иметь с ней одну общую точку; в этом случае говорят, что прямая *пересекает* плоскость.

3) Наконец, плоскость и прямая могут не иметь ни одной общей точки; в этом случае говорят, что они *параллельны.*

Принимают, что всякая плоскость делит пространство на две области, расположенные соответственно по обе стороны от этой плоскости. Нельзя перейти из одной из этих областей в другую, не пересекая плоскости. В частности, всякая прямая, которая соединяет две точки, лежащие по разные стороны от плоскости, пересекает плоскость.

Обратно, принимают, что всякая прямая, которая пересекает плоскость, делится точкой пересечения на две полупрямые, расположенные по одну и по другую стороны от плоскости.

Из определения плоскости следует ещё, что

всякая фигура, равная плоскости, есть плоскость.

Обратно, принимают, что какие-либо плоскости могут быть совмещены и притом таким образом, что какая-либо данная полупрямая

---

[1]) Буквы Пл., поставленные перед ссылкой иа какой-либо пункт, указывают на первую часть книги — Планиметрию.

(В тех случаях, когда в решениях упражнеиий и задач приводится ссылка на определённую страницу или определённый чертёж первой части книги, имеется в виду третье издание 1948 г. *Прим. ред. перевода.*)

первой плоскости совмещается с какой-либо данной полупрямой второй (причём их начальные точки также совмещаются).

326. Мы приняли (Пл., п. 6) следующую аксиому:

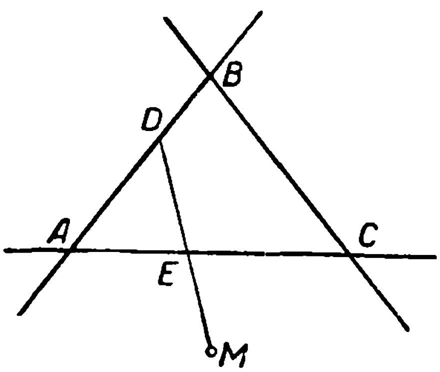
Аксиома. *Через всякие три точки пространства проходит плоскость.*

Мы дополним эту аксиому следующей теоремой:

Теорема. *Через три точки, не лежащие на одной прямой, проходит только одна плоскость.*

Пусть A, B и C — три точки, не лежащие на одной прямой; предположим, что через эти три точки проходят две плоскости P и P'. Я утверждаю, что плоскости P и P' совпадают. Заметим, прежде всего, что эти две плоскости имеют согласно определению общие прямые AB, AC и BC.

Пусть теперь M — какая-либо точка плоскости P. Через эту точку (черт. 1) мы можем провести прямую, которая пересечёт прямую AB в точке D, а прямую AC в точке E. Точки D и E лежат в плоскости P', следовательно, и вся прямая DE лежит в плоскости P', поэтому и точка M лежит в плоскости P'. Таким образом, любая точка плоскости P лежит в плоскости P'; а так как можно тем же путём доказать, что любая точка плоскости P' лежит в плоскости P, то теорема доказана.



Черт. 1.

Аксиому и теорему, приведённые в начале этого пункта, объединяют, говоря:

три точки, не лежащие на одной прямой, определяют плоскость.

Прямая AB и точка C вне её определяют плоскость; действительно, требование, чтобы плоскость проходила через прямую AB и точку C, и требование, чтобы плоскость проходила через три точки A, B и C, сводятся одно к другому.

Точно так же *две пересекающиеся прямые AB и AC определяют плоскость,* а именно ту, которая определяется точками A, B и C; *две параллельные прямые определяют плоскость,* так как согласно определению (Пл., п. 38) существует плоскость, которая содержит обе прямые, и, с другой стороны, — эта плоскость единственная, так как она проходит через одну из прямых и через одну из точек другой прямой (сравнить предыдущий абзац).

В согласии с этим плоскость можно обозначать одной буквой, тремя буквами, соответствующими трём точкам, не лежащим на одной прямой, и, наконец, буквами, обозначающими прямую и точку или две прямые, лежащие в этой плоскости (пересекающиеся или параллельные).

Примечание. Отсюда видно, что *через данную прямую D проходит бесчисленное множество плоскостей;* в самом деле, через эту прямую и какую-либо точку пространства можно провести одну плоскость; через прямую D и точку, не лежащую в первой плоскости, можно провести вторую и т. д.

327. Примечание. *Если фигура, состоящая более чем из одной точки, обладает тем свойством, что прямая, соединяющая две её точки, целиком принадлежит этой фигуре, то данная фигура*

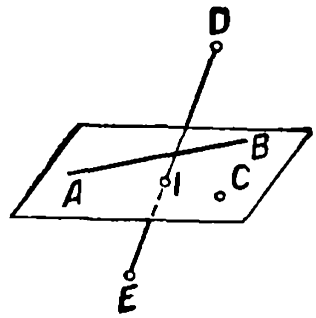
или будет прямой линией,

или будет плоскостью,

или будет состоять из всех точек пространства.

Действительно, рассматриваемая фигура содержит, по условию, по крайней мере, две точки A и B и, следовательно, прямую AB. Если она содержит только эту прямую, то теорема доказана.

В противном случае пусть C — какая-либо точка фигуры, не лежащая на прямой AB; достаточно повторить доказательство теоремы, приведённой в предыдущем пункте, чтобы убедиться, что всякая точка плоскости ABC принадлежит данной фигуре. Если фигура не содержит никакой другой точки, то теорема доказана. В противном случае пусть D — какая-либо точка фигуры, лежащая вне плоскости ABC (черт. 2). Рассматриваемая фигура содержит любую точку E, лежащую с точкой D по разные стороны от плоскости ABC: действительно, прямая DE непременно пересечёт плоскость в некоторой точке I и, следовательно, целиком принадлежит данной фигуре, так как она соединяет две точки D и I, принадлежащие данной фигуре. Но на том же основании фигура содержит любую точку F, лежащую с точкой E по разные стороны от плоскости ABC, другими словами, по ту же сторону от плоскости, где лежит точка D.



Черт. 2.

Таким образом, фигура содержит все точки пространства.

328. Аксиома, приведённая в планиметрии (Пл., п. 40): *через точку, взятую вне прямой, можно провести только одну прямую, параллельную данной прямой,* сохраняет силу и в геометрии пространства. Действительно, прямая, проведённая через точку C параллельно прямой AB, лежит в плоскости ABC, и в этой плоскости можно применить указанную выше аксиому.

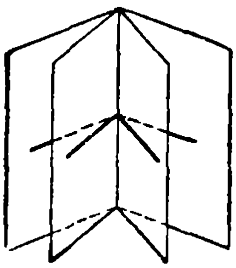
Таким образом мы можем, как и в планиметрии, говорить о *той* прямой, которая параллельна данной прямой и проходит через данную точку, лежащую вне этой прямой.

Точно так же *из точки C, лежащей вне прямой AB, можно опустить на эту прямую перпендикуляр и притом только один,* так как этот перпендикуляр должен лежать в плоскости ABC, а для плоскости теорема доказана (Пл., п. 19).

Напротив, *через точку, взятую на прямой, можно провести к этой прямой бесчисленное множество перпендикуляров,* а именно по одному перпендикуляру в каждой из плоскостей (п. 326, примечание), проходящих через эту прямую (черт. 3).

Отсюда следует, что две прямые могут быть перпендикулярны к одной и той же прямой, не будучи параллельными между собой.

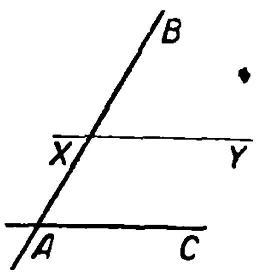
329. Плоскость ABC можно рассматривать как образованную прямой, которая перемещается, проходя постоянно через точку C и опираясь на прямую AB.



Черт. 3.

Действительно, такая прямая остаётся всё время в плоскости ABC, и, с другой стороны, её можно заставить проходить через любую точку плоскости, за исключением точек, лежащих на прямой, проходящей через точку C и параллельной AB.

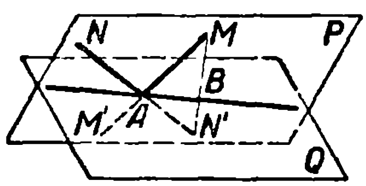
Точно так же прямая XY, которая перемещается, оставаясь параллельной своему первоначальному положению AC (черт. 4) и пересекая данную прямую AB, образует плоскость ABC, или иначе, *геометрическое место прямой линии, которая перемещается, оставаясь параллельной своему первоначальному положению и опираясь на данную прямую* (предполагается, что перемещающаяся прямая в своём первоначальном положении пересекает данную прямую), *есть плоскость*. Действительно, согласно определению геометрического места (Пл., п. 33), это предложение выражает следующие два факта: 1) прямая XY при своём перемещении всё время остаётся в плоскости ABC; 2) через каждую точку этой плоскости проходит прямая XY, параллельная AC и пересекающая AB.



Черт. 4.

330. ***Теорема.*** *Две различные плоскости, имеющие одну общую точку, имеют бесчисленное множество общих точек, образующих прямую линию.*

Пусть P и Q (черт. 5) — две плоскости, которые имеют общую точку A, и при этом, однако, не совпадают. Плоскость Q делит пространство на две области, которые назовём для краткости областью, лежащей над плоскостью, и областью, лежащей под плоскостью.



Черт. 5.

Через точку A проведём в плоскости P произвольную прямую MAM'. Возможно, что эта прямая целиком принадлежит плоскости Q; в таком случае доказано, что обе плоскости имеют общую прямую.

Если же этого не будет, то точка A делит, как мы знаем, нашу прямую на две части, из которых одна расположена над плоскостью Q, другая под плоскостью Q. Предположим для определённости, что точка M расположена над плоскостью Q, точка M' — под ней.

Проведём в плоскости P вторую прямую NAN', и если она не лежит в плоскости Q, то предположим, что точка N расположена над плоскостью Q, а точка N' — под плоскостью Q. Соединим точку M с N'.