Перельман Я. И.

Занимательная геометрия

на вольном воздухе и дома

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 51
ББК 22.1
П27

Перельман Я. И.

П27 Занимательная геометрия: на вольном воздухе и дома / Перельман Я. И. – М.: Книга по Требованию, 2013. – 256 с.

ISBN 978-5-458-25153-2

Эта книга написана не столько для друзей математики, сколько для ее недругов. Она имеет в виду, главным образом, не тех, у кого есть уже склонность к математике, и не тех также, кто вовсе еще не приступал к ее изучению. Автор предназначает книгу всего более для той обширной категории читателей, которые знакомились в школе (или сейчас еще знакомятся) с этой наукой без особого интереса и одушевления, питая к ней в лучшем случае лишь холодную почтительность. Сделать геометрию для них привлекательной, внушить охоту и воспитать вкус к ее изучению - прямая задача настоящей книги. Лучшее средство для этого - показать предмет, до некоторой степени известный читателю, с новой, незнакомой, порою неожиданной стороны, способной возбудить интерес и привлечь внимание.

ISBN 978-5-458-25153-2

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ.

ГЕОМЕТРИЯ НА ВОЛЬНОМ ВОЗДУХЕ.

Первые основы геометрии должны быть заложены не в школьной комнате, а на вольном воздухе. Покажите мальчику, как измеряется площадь луга, обратите его внимание на высоту колокольни, на длину тени, отбрасываемой ею, на соответствующее положение солнца—и он гораздо быстрее, правильнее и притом с бо́льшим интересом усвоит математические соотношения, чем когда понятия измерения угла, а то и какой-либо тригонометрической функции внедряются в его голову помощью слов и чертежа на доске.

Альберт Эйнштейн.

ГЛАВА I.

ГЕОМЕТРИЯ В ЛЕСУ.

По длине тени.

Еще сейчас памятно мне то изумление, с каким смотрел я в первый раз на седого лесничего, который, стоя возле огромной сосны, измерял ее высоту маленьким карманным прибором. Когда он нацелился своей квадратной дощечкой в вершину дерева, я ожидал, что старик сейчас начнет взбираться туда с мерной цепью. Вместо этого, он спрятал прибор обратно в карман и об'явил, что измерение кончено. А я думал, еще не начиналось...

Я был тогда очень молод, и такой способ измерения, когда человек определяет высоту дерева, не срубая его и не взбираясь на верхушку, являлся в моих глазах чем-то вроде маленького чуда. Лишь позднее, когда меня посвятили в начатки геометрии, я понял, до чего просто выполняются такого рода чудеса. Существует множество различных способов производить подобные измерения помощью весьма незамысловатых приборов и даже без всяких приспособлений.

Самый легкий и самый древний способ,—без сомнения, тот, которым греческий мудрец Фалес за шесть веков до нашей эры определил в Египте высоту пирамиды. Он воспользовался для этого ее тенью. Жрецы и фараон, собравшиеся у подножия высочайшей пирамиды, озадаченно смотрели на северного пришельца, отгадывавшего по тени высоту огромного сооружения. Фалес—говорит предание—избрал день и час, когда длина собственной его тени равнялась его росту; в этот момент высота пирамиды должна также равняться длине отбрасываемой ею тени *). Вот, пожалуй, единственный случай, когда человек может из своей тени извлечь пользу.

Задача греческого мудреца представляется нам теперь детски-простой,—но не будем забывать, что мы смотрим на нее с высоты геометрического здания, воздвигнутого уже после Фалеса. Он жил задолго до Евклида, автора замечательной книги, по которой обучались геометрии в течение двух тысячелетий после его смерти. Заключенные в ней истины, известные теперь каждому школьнику, еще не были открыты в эпоху Фалеса. А чтобы воспользоваться тенью для решения задачи о высоте пирамиды, надо было знать уже некоторые геометрические свойства треугольника,—именно, следующие два (из которых первое Фалес сам открыл):

1) что углы при основании равнобедренного треугольника равны, и, обратно,—стороны, лежащие против равных углов треугольника, равны между собою;

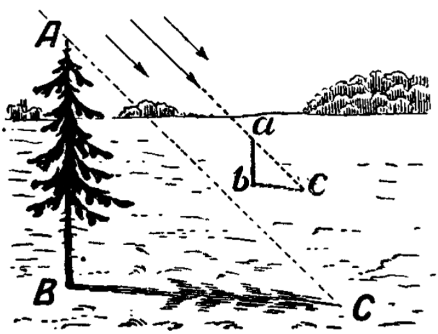
2) что сумма углов всякого треугольника (или, по крайней мере, прямоугольного) равна двум прямым углам.

---

*) Конечно, длину тени надо было считать от средней точки квадратного основания пирамиды; ширину этого основания Фалес мог измерить непосредственно.

Только вооруженный этим знанием, Фалес в праве был заключить, что, когда его собственная тень равна его росту, солнечные лучи встречают ровную почву под углом в половину прямого, и, следовательно, вершина пирамиды, середина ее основания и конец ее тени должны образовать равнобедренный треугольник.

Этим простым способом очень удобно, казалось бы, пользоваться в ясный солнечный день для измерения одиноко стоящих деревьев, тень которых не сливается с тенью соседних. Но в наших широтах не так легко подстеречь нужный для этого момент, как в Египте: солнце у нас низко стоит над горизонтом, и тени бывают равны высоте отбрасывающих их предметов лишь в околополуденные часы летних месяцев. Поэтому способ Фалеса в указанном виде применим не всегда.



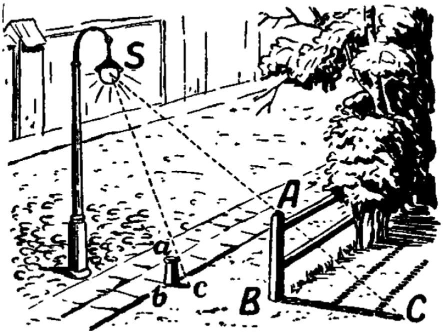
Черт. 1.

Не трудно, однако, изменить этот способ так, чтобы можно было пользоваться любой тенью, какой бы длины она ни была. Измерив, кроме того, и свою тень или тень какого-нибудь шеста, вычисляют искомую высоту из пропорции (см. черт. 1):

$$AB : ab = BC : bc,$$

т.-е. высота дерева во столько же раз больше вашей собственной высоты (или высоты шеста), во сколько раз тень дерева длиннее вашей тени (или тени шеста). Это вытекает, конечно, из геометрического подобия треугольников ABC и abc (по двум углам).

Иные читатели возразят, пожалуй, что столь элементарный прием не нуждается вовсе в геометрическом обосновании: неужели и без геометрии не ясно что во сколько раз дерево выше, во столько раз и тень его длиннее. Дело, однако, не так просто, как кажется. Попробуйте применить это правило к теням, отбрасываемым при свете уличного фонаря или комнатной лампы,—оно не оправдается. На черт. 2 вы видите, что столбик AB выше тумбы ab, примерно, втрое, а тень столбика больше тени тумбы (BC : bc) раз в восемь. Здесь треугольники ABC и abc не подобны, как было в случае солнечных лучей. Об'яснить, почему в одном случае способ применим, в другом нет, — невозможно без геометрии.



Черт. 2.

Задача № 1.

Рассмотрим поближе, в чем тут разница. Суть дела сводится к тому, что солнечные лучи между собою параллельны, лучи же фонаря--непараллельны. Последнее очевидно; но почему мы в праве считать лучи солнца параллельными, хотя все они безусловно пересекаются в том месте, откуда исходят?

Решение.

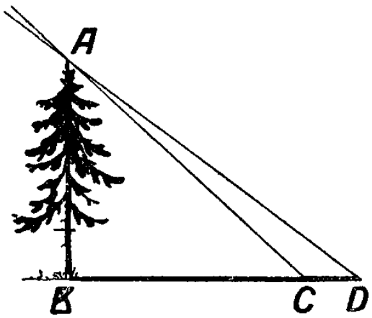
Лучи Солнца, падающие на Землю, мы можем считать параллельными потому, что угол между ними чрезвычайно мал, практически равен нулю. Несложный ге́ометрический расчет убедит вас в этом. Вообразим два луча, исходящие из какой-нибудь точки Солнца и падающие на Землю в расстоянии, скажем, одного километра друг от друга. Значит, если бы мы поставили одну ножку циркуля в эту точку Солнца, а другою описали окружность на расстоянии Земли, то между нашими двумя лучами-радиусами оказалась бы дуга в один километр длиною. Полная длина этой исполинской окружности была бы равна $2\pi \times 150\,000\,000 = 942\,500\,000$ километров *). Один градус ее, конечно, в 360 раз меньше, т. е. около 2 610 000 километров; одна дуговая минута—в 60 раз меньше градуса, т. е. равна 43 500 *км*, а одна дуговая секунда—еще в 60 раз меньше: 725 *км*. Но наша дуга имеет в длину всего только 1 *км*; значит, она соответствует углу в $^1/_{725}$ секунды. Такой ничтожный угол неуловим даже для точнейших астрономических инструментов, и, следовательно, мы на практике можем считать лучи Солнца, падающие на Землю, за параллельные прямые.

Если бы эти геометрические соображения были нам неизвестны, мы не могли бы обосновать рассматриваемый способ определения высоты по тени.

Пробуя применять способ теней на практике, вы сразу же убедитесь, однако, что нельзя получить помощью его вполне надежный результат. Тени не отграничены так отчетливо, чтобы измерение их длины можно было выполнить вполне точно. Каждая тень, отбрасываемая при свете Солнца, имеет неясно очерченную серую кайму полутени, которая и придает границе тени неопределенность. Происходит это оттого,

*) Расстояние от Земли до Солнца — 150 000 000 *км*.

что Солнце—не точка, а целое светящееся тело, испускающее лучи из многих точек. На черт. 3 показано, почему вследствие этого тень BC дерева имеет еще придаток в виде полутени CD, постепенно сходящей на нет Угол CAD между крайними границами полутени равен тому углу, под которым мы всегда видим солнечный диск, т. е. половине градуса. Ошибка, происходящая оттого, что обе тени измеряются не вполне точно, может при не слишком низком стоянии Солнца достигать 5% и более. Эта ошибка прибавляется к другим неизбежным ошибкам — от неровности почвы и т. д.— и делает окончательный результат мало надежным. В местности гористой, например, способ этот совершенно неприменим.

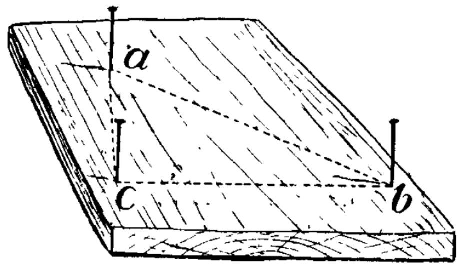


Черт. 3.

Еще два способа.

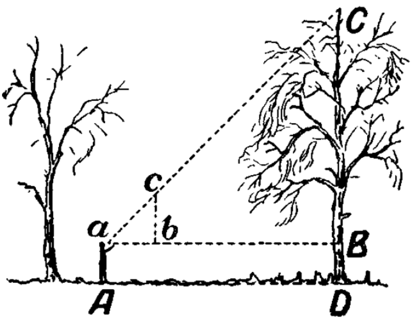
Однако, вполне возможно обойтись при измерении высоты без помощи теней. Таких способов много; начнем с двух простейших.

Прежде всего, мы можем воспользоваться свойством равнобедренного прямоугольного треугольника, обратившись к услугам весьма простого прибора, который легко изготовить из дощечки и трех булавок. На дощечке любой формы, даже на куске коры, если у него есть плоская сторона, намечают 3 точки— вершины равнобедренного прямоугольного треугольника, и в этих точках втыкают торчком по булавке (черт. 4). У вас нет под рукой чертежного треугольника для построения прямого угла и циркуля для отложения равных сторон? Перегните тогда любой лоскут бумаги один раз, а затем поперек первого сгиба еще раз так, чтобы обе части первого сгиба совпали,—и получите прямой угол. Та же бумажка пригодится и вместо циркуля, чтобы отметить равные расстояния. Как видите, прибор может быть целиком изготовлен в бивуачной обстановке.



Черт. 4.

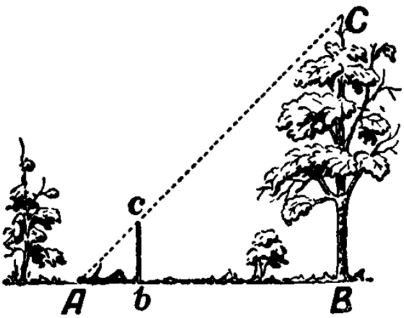
Обращение с ним не сложнее изготовления. Отойдя немного от измеряемого дерева, вы держите прибор так, чтобы один из катетов треугольника был направлен отвесно, для чего можете воспользоваться ниточкой с грузиком, привязанной к верхней булавке. Приближаясь к дереву или удаляясь от него, вы всегда найдете такое место A (черт. 5), из которого, глядя на булавки a и c, увидите, что они покрывают верхушку C дерева: это значит, что продолжение гипотенузы ac проходит через точку C. Тогда, очевидно, расстояние aB равно CB, так как угол $a = 45°$. Следовательно, измерив расстояние aB (или, на ровном месте, одинаковое с ним расстояние AD) и



Черт. 5.

прибавив BD, т. е. высоту глаза над землей, — получите искомую высоту дерева.

По другому способу вы обходитесь даже и без булавочного прибора. Зато здесь нужен шест, который вам придется воткнуть отвесно в землю так, чтобы выступающая часть как раз равнялась вашему росту*). Место для шеста надо выбрать так, чтобы, лежа, как показано на черт. 6, вы видели верхушку дерева на одной прямой линии с верхней точкой шеста. Так как треугольник Abc — равнобедренный и прямоугольный, то угол $A = 45°$, и, следовательно, $AB = BC$, т. е. искомой высоте дерева.



Черт. 6.

По способу Жюля Верна.

Следующий, тоже весьма несложный способ измерения высоких предметов очень наглядно описан у Жюля Верна в известном романе „Таинственный остров".

„ — Сегодня нам надо измерить высоту площадки Далекого Вида,—сказал инженер.

„ — Вам понадобится для этого инструмент?—спросил Герберт.

„ — Нет, не понадобится. Мы будем действовать несколько иначе, но прибегнем к не менее простому и точному способу.

*) Точнее, расстоянию от подошв до глаз.