Г.В. Емельянов, В.П. Скитович

Задачник по теории вероятностей и математической статистике

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 51
ББК 22.1
Г11

Г.В. Емельянов
Г11 Задачник по теории вероятностей и математической статистике / Г.В. Емельянов, В.П. Скитович – М.: Книга по Требованию, 2013. – 334 с.

ISBN 978-5-458-32859-3

Сборник содержит 782 задачи, посвящённые основным вопросам теории вероятностей, математической статистике, теории случайных процессов, теории массового обслуживания и теории информации

ISBN 978-5-458-32859-3

Глава I

ПОНЯТИЕ ВЕРОЯТНОСТИ СЛУЧАЙНОГО СОБЫТИЯ, ФОРМУЛЫ СЛОЖЕНИЯ И УМНОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ, ФОРМУЛА ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ, ФОРМУЛА БАЙЕСА

Элементарно. Каждый „эксперимент" завершается некоторым исходом или событием. События обозначают латинскими буквами A, B, C, ... Если каждое осуществление данного эксперимента *à priori* вызывает появление события A, это событие называется *достоверным*; если событие A заведомо не произойдет при осуществлении данного эксперимента, то оно называется *невозможным; случайным* называется событие, которое может произойти, а может и не произойти в результате осуществления данного эксперимента. Все достоверные события будем обозначать буквой U; все невозможные — буквой V.

Суммой (объединением) двух событий A и B называется событие $A+B$ (или $A\cup B$), состоящее в том, что происходит хотя бы одно из них (т. е. либо A, либо B, либо A и B). *Произведением* (совмещением) AB (или $A\cap B$) двух событий называется событие, состоящее в совместном появлении A и B. Если каждое появление события A сопровождается появлением B, то пишут $A\subset B$ и говорят, что A *влечет* B, или A есть частный случай B. События A и B называются *несовместимыми*, если $AB=V$. События A и $\bar{A}$ называются *противоположными*, если $A\bar{A}=V$ и $A+\bar{A}=U$. События $A_1, A_2, \ldots, A_n$ образуют *полную группу событий*, если $A_1+A_2+\ldots+A_n=U$ и $A_iA_j=V$, $i=1, 2, \ldots, n$; $j=1, 2, \ldots, n$ $(i\neq j)$.

Аксиоматически. Пусть имеется множество Ω некоторых объектов ω, которые назовем *элементарными событиями*. (Конечно, эти объекты всегда можно изображать точками в евклидовом пространстве нужного числа измерений.) Образуем какую-нибудь совокупность $\mathbf{B}$ подмножеств множества Ω, обладающую следующими свойствами: 1) все множество Ω является элементом $\mathbf{B}$; 2) если $A\in\mathbf{B}$, то и множество $\bar{A}$, состоящее из всех элементов Ω, не принадлежащих A, также принадлежит $\mathbf{B}$; 3) если $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ — любая конечная или счетная последовательность множеств из **B**, то их сумма и произведение (пересечение) также принадлежит **B**. Эта совокупность множеств **B** называется *борелевским телом множеств*, или σ-алгеброй множеств. Элементы A множества **B** называются (случайными) событиями. Тогда (всё) множество Ω будет достоверным событием U, а пустое множество — невозможным событием V.

Вероятностью случайного события A называется значение неотрицательной вполне аддитивной функции $P(A)$, определенной на множестве **B** и равной 1 для множества Ω. Это значит, что для любого $A \in \mathbf{B}$ $P(A) \geqslant 0$, и для любого конечного или счетного набора непересекающихся множеств A_i из **B** $P\left\{\sum_i A_i\right\} = \sum_i P(A_i)$.

Следствия: 1) $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$ для любого A; 2) $P(V)=0$; 3) $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$; 4) если $A \subset B$, то $P(A) \leqslant P(B)$.

Классическое определение вероятностей. Пусть в результате эксперимента возможны только n несовместимых и равновозможных исходов $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Пусть событие B есть сумма определенных m из них, т. е. $B = A_{i_1} + A_{i_2} + \ldots + A_{i_m}$. Тогда $P(B) = \frac{m}{n}$.

Формула сложения вероятностей. Для любых двух событий A и B $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.

$P(A/B)$ обозначает условную вероятность события A при условии, что событие B произошло. Для независимых событий $P(A/B) = P(A)$; $P(B/A) = P(B)$.

Формула умножения вероятностей. Для любых двух событий

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B/A) = P(B) \cdot P(A/B).$$

Формула полной вероятности. Если $B = BA_1 + BA_2 + \ldots + BA_n$ и события BA_i попарно несовместимы, то

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(B/A_i).$$

Формула Байеса. В тех же условиях

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B/A_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(A_k)\, P(B/A_k)}.$$

ЗАДАЧИ К ГЛ. I

1. Бросаются две игральные кости. Пусть A — событие, состоящее в том, что сумма очков нечетная; B — событие, заключающееся в том, что хотя бы на одной из костей выпала единица. Описать события AB, $A+B$, $A\bar{B}$.

2. Из множества супружеских пар наугад выбирается одна пара. Событие A: „мужу больше 30 лет", событие B: „муж старше жены", событие C: „жене больше 30 лет".

а) Выяснить смысл событий ABC, $A-AB$, $A\overline{B}C$.

б) Проверить, что $A\overline{C} \subset B$.

3. Пусть A, B, C — три произвольных события. Найти выражения для событий, состоящих в том, что из A, B, C а) произошло только A; б) произошли только A и B; в) все три события произошли; г) произошло по крайней мере одно из событий; д) произошли по крайней мере два события; е) произошло одно и только одно событие; ж) произошли два и только два события; з) ни одно событие не произошло; и) произошло не более двух событий.

4. Пусть A, B, C — случайные события. Выяснить смысл равенств:

а) $ABC = A$; б) $A + B + C = A$.

5. Пусть A, B, C—случайные события. Упростить следующие выражения для событий: а) $(A+B)(B+C)$; б) $(A+B) \times (A+\overline{B})$; в) $(A+B)(A+\overline{B})(\overline{A}+B)$.

6. Пусть A, B, C—произвольные события. Доказать следующие равенства:

а) $\overline{\overline{A} \cdot \overline{B}} = A+B$; б) $\overline{\overline{A} + \overline{B}} = AB$; в) $\overline{A_1 + A_2 + \ldots + A_n} = \overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot \ldots \cdot \overline{A}_n$; г) $\overline{A_1 A_2 \ldots A_n} = \overline{A}_1 + \overline{A}_2 + \ldots + \overline{A}_n$.

7. Пусть A и B — произвольные события, U — достоверное, а V—невозможное событие. Доказать, что A, $\overline{A} \cdot B$, $\overline{A+B}$, U, V образуют полную группу событий.

8. Пусть $A \subset B$. Упростить выражения: а) AB; б) $A+B$; в) ABC; г) $A+B+C$.

9. Доказать, что события а) $(A+B)(A+\overline{B})+(\overline{A}+B)(\overline{A}+\overline{B})$ и б) $(A+B)(\overline{A}+\overline{B})+(A+\overline{B})(\overline{A}+B)$ достоверны.

10. Доказать, что событие $(A+B)(A+\overline{B})(\overline{A}+B)(\overline{A}+\overline{B})$ невозможно.

11. Каково условие совместимости событий $A+B$, $\overline{A}+B$ и $A+\overline{B}$?

12. Равносильны ли события A и B, если а) $\overline{A} = \overline{B}$? б) $A+C = B+C$? в) $AC = BC$?

13. Пусть A и B — случайные события. Доказать тождества: а) $P(\overline{A} \cdot \overline{B}) = 1 - P(A) - P(B) + P(AB)$; б) $P(A) + P(\overline{A} \cdot B) = P(B) + P(\overline{B} \cdot A)$.

14. В урне имеется 10 шаров: 3 белых и 7 черных. Из урны наугад вынимается один шар. Какова вероятность того, что он будет а) белый? б) черный?

15. Наугад указывается месяц и число некоторого не високосного года. Какова вероятность того, что это будет воскресенье, если всего в этом году 53 воскресенья, а соответствие чисел дням недели неизвестно?

16. В кармане имеется несколько монет достоинством в 2 коп. и 10 коп. (на ощупь неразличимых). Известно, что двухкопеечных монет втрое больше, чем гривенников. Наугад вынимается одна монета. Какова вероятность того, что это будет гривенник?

17. В партии из 1000 изделий может оказаться не более четырех некачественных (брак). Наугад выбирается из партии одно изделие. Какова вероятность того, что оно будет отвечать стандарту?

18. Для беспрепятственного полета над некоторой территорией самолет, приближаясь к ней, посылает по радио парольную кодовую группу, состоящую из нескольких точек и тире. Найти вероятность того, что радист, не знающий парольной группы, угадает ее, передав какую-нибудь группу наугад, если известно, что число кодовых элементов в группе (точек и тире) а) 5; б) 7.

19. Из полной колоды карт (52 карты) вынимаются наугад сразу три карты. Найти вероятность того, что эти карты будут: тройка; семерка; туз.

20. Четырехтомное сочинение расположено на полке в случайном порядке. Найти вероятность того, что тома стоят в должном порядке справа налево или слева направо.

21. Числа 1, 2, 3, 4, 5 написаны на пяти карточках. Наугад последовательно выбираются три карточки, и вынутые таким образом цифры ставятся слева направо. Найти вероятность того, что полученное при этом трехзначное число будет четным.

22. Полная колода карт (52 карты) делится пополам. Найти вероятность того, что число черных и красных карт в обеих пачках будет одинаковым (13).

23. При записи фамилий членов некоторого собрания, общее число которых равно 360, оказалось, что начальной буквой у семи была А, у пяти — Е, у восьми — И, у девяти — О, у четырех — У, у двух — Ю, у всех прочих фамилия начиналась с согласной буквы. Найти вероятность того, что фамилия члена данного собрания начинается с гласной.

24. Каждая из букв А, У, К, С, З написана на одной из пяти карточек. Карточки раскладываются в произвольном порядке. Найти вероятность того, что при этом образуется слово КАЗУС.

25. Из шести карточек с буквами Л, И, Т, Е, Р, А выбираются наугад в определенном порядке четыре. Найти вероятность того, что при этом получится слово ТИРЕ.

26. Телефонный номер состоит из пяти цифр. Найти вероятность того, что все цифры различны.

27. Буквенный замок содержит на общей оси 4 диска, каждый из которых разделен на 6 секторов, отмеченных определенными буквами. Замок открывается только в том случае, когда буквы образуют определенную комбинацию. Какова вероят-

ность открыть замок, установив произвольную комбинацию букв?

28. В урне 2 белых и 4 черных шара. Из урны один за другим вынимаются все находящиеся в ней шары. Найти вероятность того, что последний вынутый шар будет черным.

29. Ребенок играет с десятью буквами азбуки: А, А, А, М, М, Т, Т, Е, И, К. Найти вероятность того, что он случайно сложит слово МАТЕМАТИКА.

30. Бросаются две игральные кости. Найти вероятность того, что а) выпадет одинаковое число очков на обеих костях; б) выпадет различное число очков.

31. В старинной игре в кости необходимо было для выигрыша получить при бросании трех игральных костей сумму очков, превосходящую 10. Найти вероятности: а) выбросить 11 и 12 очков; б) выигрыша.

32. В шахматном турнире участвуют 20 человек, которые по жребию распределяются в 2 группы по 10 человек. Найти вероятность того, что а) двое наиболее сильных игроков будут играть в разных группах; б) четверо наиболее сильных попадут по два в разные группы.

33. Из колоды в 32 карты наугад выбираются 4. Найти вероятность того, что среди них окажется хотя бы один туз.

34. Из колоды в 32 карты берется наугад 10 карт. Найти вероятность того, что среди них будут 8 одномастных.

35. Бросаются четыре игральные кости. Найти вероятность того, что на всех выпадет одинаковое число очков.

36. Общество из n человек садится за круглый стол. Найти вероятность того, что два определенных лица окажутся рядом.

37. В лотерее 100 билетов; среди них один выигрыш в 50 руб., 3 выигрыша по 25 руб., 6 выигрышей по 10 руб. и 15 выигрышей по 3 руб. Некто покупает один билет. Найти вероятность: а) выиграть не менее 25 руб; б) выиграть не более 25 руб.

38. В условиях предыдущей задачи найти вероятность хоть какого-нибудь выигрыша, если куплено 3 билета.

39. Имеется ящик, в котором содержалось 20 коробок по 10 карандашей. При вскрытии ящика 4 коробки уронили и графиты карандашей в них разбились. Все 20 коробок были сданы на склад, откуда затем изъяли две коробки, и карандаши раздали учащимся. Найти вероятность того, что взятый наугад один из этих карандашей имеет разбитый графит.

40. В партии, состоящей из N изделий, имеется M бракованных. Наудачу выбирается n изделий из этой партии ($n<N$). Найти вероятность того, что среди них окажется m бракованных ($m \leqslant M$).

41. Бросается монета n раз. Найти вероятность нечетного числа появлений герба.

42. Колода карт (52 карты) произвольным образом делится пополам. Найти вероятность того, что в каждой половине будет по два туза.

43. Из урны, содержащей шары с номерами 1, 2, ..., N, k раз вынимается шар и каждый раз возвращается обратно. Найти вероятность того, что номера вынутых шаров образуют возрастающую последовательность.

44. Решить предыдущую задачу при условии, что вынутые шары в урну не возвращаются.

45. Технический контроль проверяет изделия из партии, состоящей из m изделий первого сорта и n изделий второго сорта. Проверка первых b изделий ($b<n$), выбранных из партии наугад, показала, что все они второго сорта. Найти вероятность того, что среди следующих двух наугад выбранных изделий из числа непроверенных по меньшей мере одно изделие окажется второго сорта.

46. Из колоды карт (52 карты) наугад берется 6 карт. Найти вероятность того, что среди этих карт будут представители всех четырех мастей.

47. Общество состоит из 5 мужчин и 10 женщин. Найти вероятность того, что при случайной группировке их на 5 групп по три человека в каждой группе будет мужчина.

48. Из последовательности чисел 1, 2 ..., n отмечено число k. Найти вероятность того, что среди двух чисел, выбранных наудачу из этой последовательности, одно окажется меньше, а другое больше k.

49. Двадцать человек, среди которых 10 мужчин и 10 женщин, случайным образом группируются попарно. Найти вероятность того, что каждая из 10 пар состоит из лиц разного пола.

50. Бросается n игральных костей. Найти вероятность того, что выпадет n_1 единиц, n_2 двоек, ..., n_6 шестерок.

51. 9 пассажиров наудачу рассаживаются в трех вагонах. Найти вероятность того, что а) в каждый вагон сядет по 3 пассажира; б) в один вагон сядут 4, в другой — 3 и в третий — 2 пассажира.

52. Бросается n игральных костей. Найти вероятность получить сумму очков, равную а) n; б) $n+1$; в) заданному числу S.

53. Из последовательности чисел, 1, 2, ..., N выбирают наудачу K чисел. Найти вероятность того, что а) все выбранные числа будут кратны данному числу q; б) каждое из этих чисел будет кратно хотя бы одному из двух взаимно-простых чисел q_1, q_2.

54. Последовательность чисел 1, 2, ..., $4N$ разбивается наудачу на две равные группы. Найти вероятность того, что а) в каждой группе будет поровну четных и нечетных чисел; б) все числа, кратные N, окажутся в первой группе; в) числа, кратные N, поделятся поровну между группами.

55. Что вероятнее извлечь из урны с n шарами: четное или нечетное число шаров, если возможности захватить любую группу равновероятны?

56. В сосуде имеется N билетов с различными номерами. Из сосуда вынимают m раз по n билетов, каждый раз возвращая их обратно. Найти вероятность того, что а) k билетов не появятся; б) все билеты появятся.

57. Из последовательности чисел 1, 2, ..., N отобраны наудачу n чисел: $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$. Найти вероятность того, что $x_m = M$.

58. Партия содержит N изделий, из которых n подвергаются испытанию. Партия принимается, если среди этих n изделий будет обнаружено меньше m бракованных. Найти вероятность того, что партия будет принята, если число бракованных изделий во всей партии равно M.

59. Из урны, содержащей шары с номерами 1, 2, ..., N, производится последовательное извлечение n шаров. Каждый раз шар по извлечении возвращается обратно в урну. Номера вынутых шаров записаны в неубывающем порядке. Найти вероятность того, что номер m-го шара (в записи) окажется равным M.

60. Сколько раз нужно бросить игральную кость, чтобы появление 6 очков имело вероятность: а) большую 0,5; б) большую 0,8; в) большую 0,9.

61. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,7. По мишени производится 7 независимых выстрелов. Найти вероятность того, что будет хотя бы одно попадание в мишень.

62. Каково наименьшее число m карт, которое нужно взять из колоды (52 карты), чтобы вероятность $p(m)$ того, что среди них найдутся две одномастные карты, была больше $\frac{1}{2}$?

63. Сколько раз нужно бросать пару игральных костей, чтобы с вероятностью, большей $\frac{1}{2}$, ожидать сумму очков, равную 12, хотя бы один раз? (Задача де-Мере.)

64. Сколько раз нужно повторять испытание, чтобы с вероятностью, не меньшей r, утверждать, что хотя бы один раз произойдет событие A, вероятность которого в каждом испытании равна p?

65. Бросаются одновременно 2 игральные кости. Найти вероятность того, что произведение выпавших очков будет четным.

66. Производится стрельба осколочными снарядами по аэростату. Для того чтобы сбить аэростат, достаточно попадания в него хотя бы одного осколка. Вероятность попадания хотя бы одного осколка при одном выстреле равна 0,05. Сколько нужно сделать выстрелов для того, чтобы сбить аэростат с вероятностью, большей 0,8?

67. Из ящика, содержащего 20 белых и 2 черных шара, вынимается m шаров, причем после каждого вынимания шар кладется обратно в ящик. Требуется найти наименьшее значение ν_0 числа выниманий, при котором вероятность p достать один раз черный шар будет больше $\frac{1}{2}$.

68. В условиях предыдущей задачи найти наименьшее значение числа выниманий (если шар не кладется обратно), чтобы вероятность достать хотя бы один раз черный шар была больше $\frac{1}{2}$.

69. Три самолета, независимо друг от друга, производят одиночное бомбометание по некоторой цели. Первый самолет сбрасывает 4 бомбы по 250 *кг*, второй — 2 бомбы по 500 *кг*, третий — 1 бомбу в 1000 *кг*. Вероятность попадания для первого самолета равна 0,2, для второго — 0,3, для третьего — 0,4. Для разрушения цели достаточно попадания одной бомбы весом не менее 500 *кг* или двух — весом по 250 *кг*. Найти вероятность разрушения цели.

70. Из трех точек A, B, C на плоскости отмечаются направления на четвертую точку D. При этом происходят случайные угловые ошибки, в результате чего на площади образуется треугольник. Будем считать угловые ошибки положительными, если это уклонение отмеченного направления от истинного произошло против часовой стрелки, и отрицательным — в противном случае. Считая равновероятными положительные и отрицательные ошибки для каждой точки и засечки направлений на D из точек A, B, и C — независимыми, найти вероятность того, что точка D окажется внутри треугольника, если эта точка а) не лежит ни на одной из сторон треугольника ABC; б) лежит на одной из сторон этого треугольника.

71. Два игрока по очереди бросают игральную кость, каждый по одному разу. Выигравшим считается тот, кто получит большее число очков. Найти вероятность выигрыша первого игрока.

72. Самолет-бомбардировщик для выполнения боевого задания должен пройти через зону зенитной обороны противника, в которой по нему, независимо друг от друга, ведут огонь четыре зенитных орудия. Каждое орудие производит по 10 выстрелов, вероятность попадания в самолет при каждом из которых равна 0,02. Для сбития самолета достаточно одного попадания. В случае если самолет не будет сбит огнем зенитной артиллерии, он выходит на цель и сбрасывает бомбы. Вероятность выполнения боевого задания при этом равна 0,6. Найти вероятность того, что бомбардировщик выполнит задание, несмотря на противодействие зенитной артиллерии.

73. Радист трижды вызывает корреспондента. Вероятность того, что будет принят первый вызов, равна 0,2, второй вызов —

0,3, третий вызов — 0,4. По условиям приема, события, состоящие в том, что данный вызов будет услышан, независимы. Найти вероятность того, что корреспондент вообще услышит вызов.

74. Два игрока бросают монету по 4 раза каждый. Выигравшим считается тот, кто получит больше гербов. Найти вероятность того, что выиграет первый игрок.

75. Производится три независимых выстрела по мишени, состоящей из «яблочка» и двух концентрических колец. При одном выстреле вероятность попадания в «яблочко» 0,12, в первое кольцо — 0,15, во второе кольцо — 0,18. Найти вероятность того, что в результате стрельбы будет два попадания в яблочко и одно — в первое кольцо.

76. Производится стрельба по некоторой цели, вероятность попадания в которую при одном выстреле равна 0,2. Стрельба прекращается при первом попадании. Найти вероятность того, что будет произведено ровно 6 выстрелов.

77. Два игрока вынимают по очереди по одной кости из полного набора домино. Каждый имеет право вынуть не более трех костей. Выигравшим считается тот, кто первый вынет двойную кость («дупель»). Найти вероятность выигрыша каждого игрока.

78. Боезапас самолета составляет 120 патронов. Стрельба ведется очередями длительностью 1 *сек*. Скорострельность оружия — 600 выстрелов в минуту. Стрельба прекращается при попадании в цель. Вероятность хотя бы одного попадания для каждой очереди равна 0,1. Найти вероятность того, что самолет израсходует весь свой боезапас.

79. Самолет состоит из трех различных по уязвимости частей. Для вывода из строя самолета достаточно одного попадания в первую часть, или двух попаданий во вторую, или трех попаданий в третью часть. При условии попадания снаряда в самолет вероятность попасть в первую часть $P_1=0,15$, во вторую — $P_2=0,30$, в третью — $P_3=0,55$. (Вероятности P_1, P_2, P_3 приближенно равны отношению площадей первой, второй и третьей частей самолета к площади всего самолета.) Найти вероятность вывода самолета из строя при наличии а) одного, б) двух, в) трех попаданий.

80. Из полной колоды (52 карты) вынимают одновременно три карты. Найти вероятность того, что среди вынутых карт найдется хотя бы одна карта красной масти.

81. В урне 2 белых, 3 черных и 5 красных шаров. Три шара вынимаются наугад. Найти вероятность того, что среди вынутых шаров хотя бы два будут разного цвета.

82. По железнодорожному мосту, независимо один от другого, производят серийное бомбометание три самолета. Каждый самолет сбрасывает одну серию бомб. Вероятность попадания хотя бы одной бомбы из серии для первого самолета равна 0,2, для второго — 0,3, для третьего — 0,4. Найти вероятность того, что мост будет разрушен.

83. Из сосуда, содержащего 2 белых и 4 черных шара, двое поочередно извлекают шар. Найти вероятность вынуть первым белый шар каждому из участников.

84. В приемнике имеется 14 радиоламп двух типов: 6 ламп первого типа и 8 ламп второго типа. Вероятность выхода из строя в течение времени T для каждой лампы первого типа равна 0,002, для лампы второго типа — 0,004. Найти вероятность выхода приемника из строя в результате выхода из строя хотя бы одной лампы.

85. Двое игроков бросают по очереди монету. Выигравшим считается тот, кто первым откроет решетку. Во сколько раз более вероятен выигрыш начавшего, если бросание монеты может быть продолжено сколь угодно долго.

86. Из сосуда, содержащего 2 белых и 4 черных шара, двое поочередно извлекают шар и, фиксируя его цвет, возвращают в сосуд. Извлечение прекращается при появлении белого шара. Найти вероятность извлечения первым белого шара каждым из участников, если шар извлекается не более $2k$ раз.

87. 6 билетов с номерами 1, 2, 3, 4, 5, 6, последовательно вынимаемых из ящика, имеют одинаковую вероятность появиться в любом порядке. Найти вероятность того, что порядковый номер по крайней мере у одного из билетов совпадает с его собственным номером.

Решить ту же задачу, если число билетов неограниченно возрастает.

88. Сосуд содержит m белых и n черных шаров. Два игрока по очереди вынимают шар и возвращают его обратно. Выигрывает тот, кто первый вынет белый шар. Найти вероятность выиграть первому, если игра может продолжаться неограниченно.

89. Из урны, содержащей n шаров, n раз наугад вынимается по одному шару с возвращением каждый раз шара обратно. Найти вероятность того, что в руке перебывают все шары.

90. Предполагается, что вероятность наугад выбранному целому числу оказаться кратным n равна $\frac{1}{n}$. Найти вероятность того, что оно окажется простым.

91. В условиях предыдущей задачи найти вероятность того, что два наугад взятых натуральных числа окажутся взаимно простыми. (Задача П. Л. Чебышева.)

92. В тех же условиях найти вероятность того, что наугад взятое натуральное число не будет делиться ни на один квадрат.

93. Имеется 10 карточек, на которых написаны числа 3, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 6. Две из этих карточек вынимаются одна за другой. Число, написанное на первой карточке, берется за числитель, на второй — за знаменатель дроби. Найти вероятность того, что полученная дробь будет правильной.