

Эдвин Эббот, Дионис Бюргер

Флатландия , Сферландия

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 82-053.2
ББК 74.27
Э18

Э18 **Эдвин Эббот**
Флатландия , Сферландия / Эдвин Эббот, Дионис Бюргер – М.: Книга
по Требованию, 2012. – 356 с.

ISBN 978-5-458-26546-1

Книги англичанина Э. Эббота и голландца Д. Бюргера были написаны на разных языках и с интервалом почти в столетие. Однако именно их, наравне с бессмертной "Алисой" Льюиса Кэрролла, чаще всего цитируют сегодня авторы серьезных научных трактатов по многомерной геометрии и теории относительности... Авторы в увлекательной форме вводят читателя в русло важных геометрических идей, таких, как размерность, связность, кривизна, демонстрируя абстрактные объекты в различных "житейских" ситуациях.

ISBN 978-5-458-26546-1

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2012

© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2012

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

Однако для первого знакомства с четырехмерным миром нам кажется более подходящим метод аналогии. Основываясь на наглядно-геометрических представлениях о размерности геометрических фигур, мы можем совершать постепенное восхождение по шкале размерностей и переходить от одномерных фигур к двумерным, от двумерных — к трехмерным и, наконец, сделать решающий шаг: воспользоваться замеченными закономерностями и перейти к рассмотрению четырехмерных фигур. Таков обычный путь использования аналогии — лестницы, ведущей от известного к неизвестному и позволяющей не только овладевать накопленными знаниями, но и открывать новое. Менее традиционное применение аналогии состоит в том, что мы мысленно пытаемся представить себе трудности, с которыми сталкивается двумерное существо при попытке наглядно вообразить себе третье измерение, и экстраполируем свое превосходство над обитателем двумерного мира... на самих себя!

Именно этот не совсем обычный способ изучения (или, лучше сказать, «ностижения») геометрии четырехмерного евклидова пространства и искривленного расширяющегося пространства избрали авторы «Флатландии» и «Сферландии»: английский педагог Эдвин Э. Эбботт и голландский ученый Дионис Бюргер. Написанные в разное время различными авторами и на разных языках, эти произведения объединены не только преемственностью тематики, но и «родственными узами» героев, от лица которых ведется повествование. Если у Эбботта в роли рассказчика выступает Квадрат, то у Бюргера его сменяет Шестиугольник, который доводится Квадрату внуком. Мир, в котором живет Шестиугольник, устроен гораздо сложнее евклидовой плоскости его деда: этот мир искривлен (Шестиугольник обитает на поверхности огромной сферы) и к тому же расширяется. В этом различии — отзвук великих перемен в воззрениях на природу реального пространства, происшедших с выхода в свет первого издания «Флатландии» (1880 г.) до появления «Сферландии» (1957 г.). Юмор, причудливая, подчас гротескная литературная форма, множество убедительных математических подробностей двумерного бытия сделали произведения Эбботта и Бюргера необычайно популярными. Их (наравне с бессмертной

«Алисой» Льюиса Кэррола) охотно цитируют авторы серьезных научных трактатов по многомерной геометрии и теории относительности.

Не следует думать, будто произведения Эбботта и Бюргера, столь разительно отличающиеся от обычных «курсов», «введений» и «популярных очерков», служат своего рода четвертым измерением, «перпендикулярным» всей прочей литературе по занимательной математике. Яркие и самобытные, эти книги преследуют ту же цель, что и их «трехмерные» (то есть более привычные по форме) сородичи по жанру: учить математике так, как постигают мир дети, — играя. Именно общность цели в гораздо большей степени, чем сходство тех или иных особенностей изложения, роднит «Флатландию» и «Сферландию» с произведениями таких мастеров этого жанра, как Кэррол, Гарднер и Штейнгауз, уже известными нашему читателю.

Вместе с тем нельзя не отметить, что во Флатландии, и даже в Сферландии, с точки зрения физики не все обстоит благополучно. На первый взгляд кажется, что обитатели двумерия действительно не могут ничего узнать о существовании третьего измерения. Уступая искусству авторов, читатели склонны согласиться и с тем, что четвертое измерение, возможно, существует, но просто недоступно нашему непосредственному восприятию.

Все это правильно лишь до тех пор, пока речь идет о геометрии и о механике. (Кстати, говоря об измерении расстояний при помощи света, автор «Сферландии» действует в приближении геометрической оптики: свет распространяется в виде «лучей», а не «волновых фронтов»!) Прямая «выглядит» одинаково и в двух, и в трех измерениях, и по траектории материальной точки нельзя определить размерность того пространства, в котором она движется. Но стоит лишь от механики частиц перейти к распространению волн, как все изменяется.

Если в двумерном мире распространяются колебания, то картина будет различной в зависимости от того, будут ли сами колебания истинно двумерными или двумерны лишь приборы и наблюдатель, регистрирующие трехмерные колебания. Колебания, происходящие в трехмерном пространстве, нельзя удержать на двумерной поверхности: они будут расходиться в трех измерениях, и двумерный наблюдатель обнаружит утечку энер-

гии. (Удержать на плоскости можно лишь цилиндрическую волну, излучаемую перпендикулярным плоскости стержнем. Однако цилиндрическая волна, пройдя через какую-то точку, не исчезнет бесследно. Она оставит за собой «хвост» — колебания, приходящие от все более и более удаленных точек излучателя.) В теории дифференциальных уравнений доказывается, что волны в пространствах четной и нечетной размерностей ведут себя неодинаково. Различаются по своему поведению в пространствах четной и нечетной размерностей и волновые функции. Изучая квантовые свойства атома, можно убедиться в том, что наше пространство трехмерно.

Более того, даже в обычной механике «изгнать» трехмерность пространства далеко не просто. Например, используя при решении задачи принцип наименьшего действия, мы сравниваем действие вдоль всех возможных траекторий. При этом, разумеется, немаловажную роль играет выбор класса допустимых траекторий. Разрешив сравнивать траектории, выходящие за пределы трехмерного пространства, мы будем вынуждены приписать такому расширению нашего мира конкретные физические свойства, например высказать какие-то утверждения о скорости распространения света, характере полей и т. п. вдоль четвертого измерения, ибо в противном случае любая «волновая задача» утратит смысл. Следовательно, если бы наш трехмерный мир был вложен в четырехмерное пространство (подчеркнем, что речь идет не о четырехмерном пространстве — времени, а о четырех пространственных измерениях!), то физические свойства четвертого измерения мы могли бы изучить, оставаясь в своем трехмерном пространстве. Справедливость законов волновой механики и термодинамики убедительно свидетельствует о том, что наш мир истинно трехмерен. Аналогичным образом мог бы узнать о размерности того пространства, к которому он прикован по воле авторов «Флатландии» и «Сферландии», и обитатель двумерного мира.

Быть может, сын или внук Шестиугольника еще напишут о тех изменениях во взглядах на структуру пространства, которые произошли в Сферландии при жизни их поколения.

Более традиционному комбинаторному изложению первоначальных сведений из геометрии четырехмерного

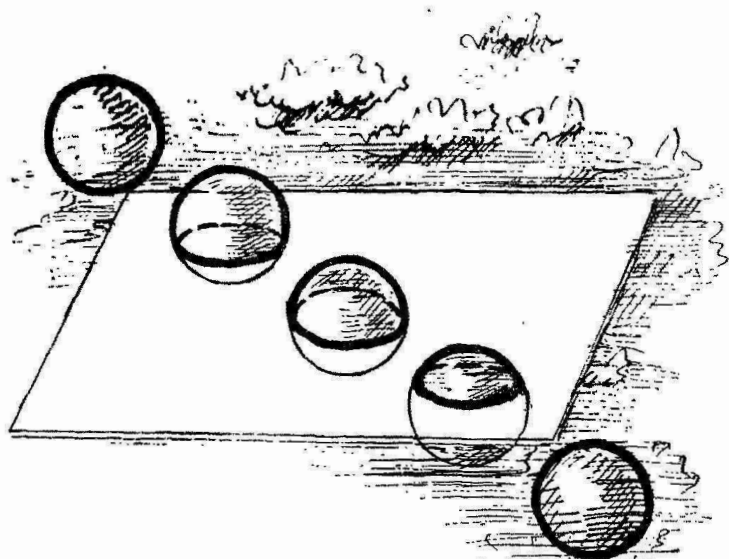
пространства посвящены очерки, составляющие дополнение к «Флатландии» и «Сферландии». Их авторы — участники и один из арбитров (профессор Генри Мэннинг) конкурса на лучшую популярную работу о четвертом измерении, проведенного в 1910 г. редакцией журнала *Scientific American*. В конкурсе приняли участие 245 авторов из разных стран мира: США, Турции, Австрии, Голландии, Индии, Австралии, Германии. Победителем стал американец Грэхэм Денби Фитч. По просьбе редакции *Scientific American* он написал (уже вне конкурса) также вторую статью «Неевклидова геометрия и четвертое измерение». Сборник работ, представленных на этот конкурс, впервые вышел в 1910 г. под названием «Простое объяснение четвертого измерения» и был переиздан в 1960 г.

Читателям предстоит проделать немалое путешествие по просторам Флатландии и Сферландии, и нам не хотелось бы задерживать их на самом пороге удивительных приключений. Поэтому мы закончим свое напутствие словами известного венгерского математика Ласло Фейеша Тота: необходимо «создавать бесконечное множество новых миров, законы которых можно постичь, хотя нога человека никогда не оставит на них следа».

Ю. Данилов
Я. Смородинский

Эдвин Э. Эбботт
ФЛАТЛАНДИЯ

Роман
о
четвертом измерении
с иллюстрациями автора,
Квадрата



Всем обитателям Трехмерного Пространства вообще
и Г. К. в частности
посвящает свой труд
скромный житель Флатландии
в надежде,
что, подобно тому как он смог постичь тайны
Трех Измерений,
хотя до того был знаком
лишь с Двумя,
обитатели небесной области
смогут воспарить еще выше
и постичь тайны Четырех, Пяти и даже Шести
Измерений,
тем самым способствуя
развитию воображения
и распространению
наиболее редкого и превосходного дара скромности
среди высших рас обитателей
Трехмерия

ПРЕДИСЛОВИЕ ИЗДАТЕЛЯ
КО ВТОРОМУ, ПЕРЕСМОТРЕННОМУ ИЗДАНИЮ

Если бы мой несчастный флатландский друг сохранил остроту ума, которой обладал, приступая к работе над своими мемуарами, мне не пришлось бы писать вместо него это предисловие. Мой друг просил меня, во-первых, поблагодарить читателей и критиков из Трехмерия, чья неожиданно высокая оценка привела ко второму изданию его труда, во-вторых, принести свои извинения за некоторые ошибки и опечатки (впрочем, ответственность за них лежит не только на нем) и, в-третьих, **объяснить** отдельные трудные места. Но ныне он не тот **Квадрат**, каким был прежде. Годы заключения и тяжкий груз всеобщего недоверия и насмешек вместе с естественным упадком сил, вызванным его преклонным возрастом, стерли из памяти многие идеи, понятия, терминологию, приобретенные им во время кратковременного пребывания в Трехмерии. Учитывая это, автор просил меня от его имени ответить на два возражения, одно из которых чисто умозрительного, а другое — морального характера.

Первое возражение вызвано тем, что флатландцы, глядя на Отрезок прямой, видят нечто, обладающее не только длиной, но и толщиной (ибо Отрезок не был бы виден, если бы не обладал некоторой толщиной). Следовательно, заключают критики, флатландец не может не признать, что его соотечественники обладают не только

длиной и шириной, но и некоторой, хотя и весьма малой, толщиной, или высотой. Это возражение на первый взгляд кажется настолько убедительным (а для жителя Трехмерия почти неопровержимым), что, впервые услышав его, я попросту лишился дара речи. Но, я думаю, ответ моего старого бедного друга полностью устраняет сомнения.

— Я не отрицаю,— заявил Квадрат по этому поводу,— достоверности тех фактов, на которые ссылается критик, но не могу согласиться со сделанным им выводом. Мы, обитатели Флатландии, действительно обладаем Третьим, не известным нам Измерением, называемым «высотой», так же, как вы, обитатели Трехмерия, обладаете Четвертым, не известным вам Измерением, не получившим пока еще особого названия. Я назову его гипервысотой. Но мы, флатландцы, способны воспринимать нашу «высоту» ничуть не в большей степени, чем вы, обитатели Трехмерия, свою «гипервысоту». Даже я, единственный флатландец, побывавший в Трехмерии и удостоенный привилегии в течение двадцати четырех часов воочию постигать сокровенный смысл понятия «высота», повторяю, даже я перестал теперь понимать, что это такое, и не могу более ни наглядно представить себе высоту, ни тем более доказать ее существование. Мне остается лишь одно: принять существование высоты на веру.

Причина моих затруднений очевидна. Каждое пространственное измерение подразумевает некое направление, означает возможность указывать размеры тел вдоль этого направления, возможность отличать большие тела от меньших. В то же время все Отрезки, наблюдаемые нами во Флатландии, имеют одинаковую исчезающе малую толщину (или, если угодно, высоту) и, следовательно, не содержат в себе ничего такого, что бы рождало в наших умах представление об этом Измерении. Никакой «сверхчувствительный микрометр» (им

предложил воспользоваться один излишне торопливый критик из Трехмерия) не принес бы нам ни малейшей пользы, ибо мы не знали бы ни того, что следует измерять, ни того, в каком направлении это надо делать. Когда мы видим Отрезок прямой, мы видим нечто длинное и светящееся. Светимость, так же как и длина, необходима для его существования. Отрезок, который перестает светиться, погибает. Именно поэтому все мои флатландские друзья, когда я заводил с ними разговор о не известном нам Измерении, каким-то образом проявляющемся в Отрезке, заявляли: «Вы, должно быть, имеете в виду яркость». Если я отвечал им, что имею в виду реальное Измерение, то они возражали: «Реальное Измерение? Тогда укажите нам размеры Отрезка вдоль этого измерения или сообщите, в каком направлении оно простирается». Это заставляло меня умолкнуть, поскольку я не мог сделать ни того, ни другого. Не далее как вчера, когда Верховная Окружность (иначе говоря, наш Высший Жрец), прибыв с инспекцией, совершаемой ею раз в году, в государственную тюрьму, принесла мне седьмой визит и в седьмой раз спросила: «Так ли я высока, как прежде?», я попытался убедить ее в том, что она, сама того не ведая, обладает высотой, а не только длиной и шириной. И каков же был ее ответ? «Вы говорите, что я «высока». Измерьте мою высоту, и я поверю вам». Что мне оставалось делать? Как мне было ответить на вызов Верховной Окружности? Я был подавлен, а она, торжествуя, покинула мою камеру.

Вам кажется все это странным? Тогда представьте себя в аналогичном положении. Предположим, что Некто из Четырехмерного Пространства, удостоив вас своим посещением, обращается к вам со словами: «Когда бы вы ни открыли глаза, вы видите плоскую Фигуру (обладающую двумя Измерениями) и делаете заключение о том, что видите объемное Тело (обладающее тре-

мя Измерениями), но в действительности вы также видите (хотя и не сознаете этого) Четвертое Измерение. Под ним я понимаю не цвет и не яркость и не что-либо в том же роде, а истинное Измерение, хотя я не могу указать вам ни направление, в котором оно простирается, ни способ, позволяющий устанавливать размеры тел вдоль него».

Что бы вы сказали такому гостю? Разве не постарались бы упрятать его за семью замками? Именно такая участь и постигла меня: для нас, флатландцев, ничуть не менее естественно посадить под замок Квадрат, утверждающий, будто существует Третье Измерение, чем для вас, жителей Трехмерия, заключить в темницу Куб, распространяющийся о существовании Четвертого Измерения. Сколь сильно семейное сходство слепо подвергать гонениям все необычное прослеживается у представителей всех Размерностей! Точки, Отрезки прямых, Квадраты, Кубы, Гиперкубы — все мы склонны к одним и тем же ошибкам, все в равной мере являемся рабами предрассудков своей размерности. Как сказал один из ваших поэтов:

Одно прикосновение природы,
И в множестве миров
Мы прозреваем родственные узы¹.

В этом пункте защита Квадрата представляется мне безупречной. Столь же ясен и убедителен его ответ и на возражение морального характера. Некоторые читатели обвинили автора в женоненавистничестве. Поскольку на этом обвинении особенно рьяно настаивали те, кто по велению природы составляет большую часть населения Трехмерия, мне хотелось бы опровергнуть его

¹ Непонимание некоторыми критиками этого важного обстоятельства вынудило автора включить в свой диалог со Сферой (см. стр. 110—113) кое-какие замечания, проливающие свет на указанное родство между мирами различных размерностей. Ранее эти замечания были им опущены как излишние и утомительные. (Это примечание добавлено по просьбе автора.)