

Р. Л. Стратонович

**Условные марковские
процессы и их применение к
теории оптимального
управления**

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 50
ББК 22
Р11

Р. Л. Стратонович
Р11 Условные марковские процессы и их применение к теории оптимального управления / Р. Л. Стратонович – М.: Книга по Требованию, 2014. – 320 с.

ISBN 978-5-458-29616-8

Первая монография, посвященная теории условных марковских процессов. Данная теория относится к новому разделу математической статистики и находит многочисленные применения в теории оптимальной нелинейной фильтрации, теории обнаружения процессов при неполном их наблюдении, статистической теории оптимального управления и др. В книге систематически излагается ряд оригинальных результатов автора как по общей теории, так и (в меньшей степени) по решению отдельных задач. Книга написана как математическая монография с привлечением понятий и аппарата современной теории вероятностей и рассчитана в первую очередь на специалистов в этой области. Ввиду большого прикладного значения теории условных марковских процессов книга представляет интерес также для научных работников, аспирантов и инженеров, работающих в области радиоэлектроники и кибернетики.

ISBN 978-5-458-29616-8

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2014

© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2014

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.



Серия Книжный Ренессанс

www.samizday.ru/reprint

ках теории марковских процессов, мы будем иметь усложнение решения, адекватное усложнению задачи

Согласно сказанному выше выглядит совершенно естественным тот факт, что в настоящее время проявляется большой интерес к марковским процессам. Свидетельством тому является выход в свет ряда монографий, которые посвящены им. Однако, к сожалению, монографии, в которых рассматривалась бы статистика марковских процессов (т. е. изучались бы те случаи, когда наблюдается некоторая функция от марковского процесса), полностью отсутствуют. Настоящая книга призвана в посильной степени заполнить этот пробел.

Если наблюдается некоторая функция $y_t = f(x_t)$ от марковского процесса x_t , то соответствующие этому наблюдению апостериорные вероятности, скажем $P(dx_t | y_t, \tau \leq t)$, отличаются от априорных. Исследование этих апостериорных вероятностей и их эволюции во времени составляет предмет теории условных марковских процессов.

Первые результаты этой теории и основывающейся на ней нелинейной оптимальной фильтрации были доложены автором на Всесоюзной конференции по статистической радиофизике в г. Горьком (1958 г.) и на семинаре при кафедре теории вероятностей МГУ (Стратонович [1]). Результаты указанного периода опубликованы в работе автора [2].

К ним относится дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial \omega_t(x)}{\partial t} = (B\omega_t)(x) - \omega_t(x) \int (B\omega_t)(x') dx'$$

для апостериорной плотности (по мере Лебега) распределения вероятностей

$$\omega_t(x) = P(dx_t | y_t, \tau \leq t) / dx_t.$$

Здесь x_t — точка многомерного фазового пространства; B — основной апостериорный оператор, зависящий от наблюдаемого процесса y_t и от априорных статистических данных.

Приведенное уравнение замечательно тем, что оно является нелинейным относительно ω_t . По-видимому, впервые в теории вероятностей встречается уравнение, нелинейное относительно вероятностей.

Позже была введена специфическая, ненормированная (т. е. не вероятностная) основная апостериорная мера $V_s^t(x_s, \Gamma)$, которая обладает марковскими свойствами (удовлетворяет уравнению Чепмена—Колмогорова). Ее плотность

$$v(x_s, s; x_t, t) = V_s^t(x_s, dx_t) / dx_t$$

удовлетворяет уже линейному уравнению

$$\frac{\partial v}{\partial t} = Bv$$

с тем же самым оператором. Различные апостериорные вероятности могут быть выражены через эту меру.

В тривиальном и практически мало интересном частном случае, когда наблюдаемый процесс y_t является марковским сам по себе, указанное вначале уравнение оказывается линейным и надобность в введении вспомогательной меры V отпадает. Именно к этому случаю относятся результаты, приведенные без доказательства в заметке Лян Чжи-Шуэна [1]. В ней, помимо предположения о существовании условных распределений, вводятся топологические ограничения фазового пространства (предположена его сепарабельность). По нашему мнению, введение топологии в фазовом пространстве не является необходимым для теории.

Лицом марковского процесса является его инфинитезимальный оператор. Априорно марковский процесс характеризуется априорным оператором. Основная апостериорная мера описывается основным апостериорным оператором (B в приведенном уравнении). Через него можно выразить другие апостериорные операторы. Вид основного апостериорного оператора зависит от априорного, а также от способа наблюдения. Получение вида апостериорного оператора для различных конкретных случаев является центральной задачей теории условных марковских процессов. В настоящей книге эта задача решается для нескольких важных частных случаев, соответствующих диффузионным процессам. Для дискретного времени вместо дифференциальных уравнений выступают рекуррентные преобразования.

Нелинейная фильтрующая система в главной своей части реализует указанные уравнения или преобразования. Вместо апостериорных вероятностей можно рассматривать также заменяющие их параметры. Если найден апостериорный оператор, то алгоритм рекуррентных преобразований определяется без особого труда. Результирующее сложное преобразование является следствием более простых поэтапных преобразований. Таким образом, синтез фильтрующей системы не требует трудоемких вычислений.

Задачи, связанные с решением или моделированием уравнений (рекуррентных преобразований) для апостериорных вероятностей или параметров, их заменяющих, мы называем *первичными*, а соответствующие уравнения — *первичными апостериорными уравнениями*.

Теория условных процессов Маркова позволяет решать также *вторичные задачи*, в которых рассматриваются функ-

ции от апостериорных вероятностей или заменяющих их параметров. Для этих функций можно записать дифференциальные уравнения (вторичные уравнения), оператор которых можно назвать *вторичным* апостериорным оператором. Его получение также является важной задачей теории.

Функцией, зависящей от достаточных координат, т. е., помимо прочих переменных, от апостериорных вероятностей или заменяющих параметров, в теории оптимального управления является условный риск. Оптимальное управление сопровождается минимизацией этого риска. Отыскание оптимальных решений и оптимальных условных рисков происходит одновременно. Более того, нахождение условных рисков помогает отыскать оптимальное решение, и отсюда видна большая роль, которую играют условные риски в теории оптимального управления.

Зная вторичный апостериорный оператор, мы легко можем записать уравнение для урезанных условных рисков — основное уравнение теории. Установление этого уравнения и его решение — в этом заключается стандартный путь, рекомендуемый теорией оптимального управления.

При обобщении теории на случай непрерывного времени удобно использовать понятие оптимальных условных рисков (определенных при помощи условных минимизаций и усреднений функции штрафов) как более первичное, чем даже понятие оптимального решения. Переходу к непрерывному времени помогает введение ступенчатого индекса (когда время меняется непрерывно, а информация приходит в дискретные моменты) занимает промежуточное положение между случаем дискретного времени и случаем непрерывного времени и непрерывного индекса (непрерывного притока информации). В последнем (вдвойне непрерывном) случае трудно продуктивным образом определить оптимальные решения, но не представляет труда дать определение «оптимальных» условных рисков. После того как это определение дано, берется ступенчатая аппроксимация непрерывного индекса и для нее строятся оптимальные решения. Риски этих решений могут быть сделаны сколь угодно близкими к «оптимальным» рискам, соответствующим непрерывному индексу. В этом смысле данные решения являются ϵ -оптимальными для непрерывного индекса. Описанным путем обходятся чисто логические трудности обобщения теории на случай непрерывного времени, и строится работоспособная теория.

Излагаемая в книге формулировка теории оптимального управления возникла путем обобщения в процессе работы автора над различными конкретными задачами. Возможность распространения применяемых методов на новые задачи, привела к абстрактной форме теории. Адекватным языком

для такой степени общности является язык измеримых функций и теории меры. Поэтому мы выбрали здесь изложение на этом языке, хотя с педагогической точки зрения этот способ изложения можно считать наименее целесообразным. Мы предполагаем, что читатель будет осваивать основной материал, параллельно знакомясь с конкретными задачами и примерами; чтобы понять, что скрывается за абстрактными формулировками. При этом от читателя требуется встречная личная активность. Полезно помнить, что при чтении книги листать ее страницы справа налево требуется так же часто, как и в обратном направлении.

Поскольку теоретическая значимость различных мест книги обратно пропорциональна их доступности, мы не делаем попыток выделять часть материала в летит, предоставляя различным категориям читателей выбрать свой собственный способ чтения. Читатель, владеющий языком теории меры и имеющий опыт работы в близких областях, может сразу начинать с абстрактных формулировок. Менее подготовленный читатель должен больше внимания уделить примерам, которых немало в книге. Лица, интересующиеся приложениями, могут переносить методы решения с излагаемых задач на свои собственные, минуя абстрактные формулировки и тем более доказательства. Широкий круг читателей, специалистов по приложениям, может, кроме того, использовать книгу для повышения уровня своей математической подготовки. Наконец, лицам, занимающимся самостоятельной работой, книга может принести большую пользу в качестве справочника, содержащего те или иные формулы и результаты, отсутствующие в книжной литературе.

Читатель без труда заметит, что указание источников и список литературы в книге весьма неполны. В оправдание автор может сказать, что он не проводил сколько-нибудь подробного библиографического анализа и считает исторический обзор данных вопросов преждевременным.

В заключение автор хотел бы поблагодарить Ю. Л. Климонтовича, М. С. Пинскера, В. И. Тихонову, С. В. Фомина, Э. М. Хазен и Р. З. Хасьминского, которые познакомились с книгой в рукописи и сделали ряд полезных замечаний.

НЕКОТОРЫЕ ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ МАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ

Глава 1

СХОДИМОСТЬ НЕМАРКОВСКОГО ПРОЦЕССА К МАРКОВСКОМУ

§ 1.1. ПОСТАНОВКА ВОПРОСА

Аппарат марковских процессов является весьма эффективным главным образом по той причине, что он связан с аппаратом дифференциальных уравнений, которым удовлетворяют вероятности марковских процессов в случае непрерывного времени. В дискретном времени этим уравнениям соответствуют определенные рекуррентные соотношения. Описанное обстоятельство способствует получению разнообразных результатов.

Между тем применение результатов теории к физическим и техническим задачам часто сопровождается затруднениями. В указанных приложениях функции времени обычно обладают рядом «хороших» свойств: гладкостью и даже аналитичностью, что, как известно, несовместимо с марковскими свойствами процесса. Поэтому применение теории точных марковских процессов необходимо связано с некоторыми приближениями.

Возникает практически важная и принципиально интересная проблема исследования близости марковского и немарковского процессов, изучения условий их взаимозаменяемости и связанных с этим погрешностей. Эта проблема в настоящее время почти не изучена, если не говорить о некоторых тривиальных частных случаях. Предварительные общие исследования по данному вопросу содержатся в § 4 монографии Стратоновича [8].

Утверждение факта сходимости немарковского процесса к марковскому до известной степени напоминает центральную предельную теорему, касающуюся сходимости негауссового закона распределения к гауссовому. Из этой аналогии видна

обширность данной проблемы. Конкретизация понятия «близости» марковского и немарковского процесса, исследование условий сходимости и быстроты сходимости может составить содержание отдельной главы теории вероятностей.

Здесь мы рассмотрим лишь один частный результат по указанной проблеме. Именно при некоторых предположениях мы докажем самый факт сходимости распределения немарковского процесса к распределению диффузионного марковского процесса. Вообще говоря, этот результат содержится в результатах указанной монографии, изложенных с более общих позиций, но здесь он будет разобран и доказан более подробно.

Пусть немарковский процесс $\{x(t)\} = \{x(t), t, \omega, \mu\}$ определяется, как это часто бывает в приложениях, дифференциальным уравнением

$$\frac{dx(t)}{dt} = G(x(t), t, \omega, \mu). \quad (1.1)$$

Здесь ω — точка основного вероятностного пространства $(\Omega, \mathcal{M}, P)$. Для простоты будем считать процесс $\{x(t)\}$ одномерным, т. е. полагать, что его фазовое пространство есть интервал I . Без дальнейшего ограничения общности можно считать $I = (-a, a)$. Кроме этого интервала мы будем рассматривать также круг $R = \{|x| \leq a\}$ в комплексной плоскости. Время t пусть является точкой действительной оси, а μ — положительное число. Сформулируем ряд предположений относительно функции, стоящей в правой части:

1. А₁. При фиксированных $t, \mu, x (\in R)$ она является $\mathcal{M}$ -измеримой ω -функцией, причем моменты

$$MG(x_1, t_1, \omega) \dots G(x_r, t_r, \omega) \quad (1.2)$$

всевозможных порядков $r = 1, 2, \dots$ конечны.

1. А₂. При фиксированных ω, t, μ она с вероятностью 1 представляет собой регулярную аналитическую функцию от x в круге R . Аналогично ее моменты (1.2) регулярны в $R \times \dots \times R$.

1. А₃. При фиксированных x, ω, μ она с вероятностью 1 является непрерывной функцией от t .

1. А₄. При фиксированных x, μ она является стационарной случайной функцией (в узком смысле).

Если задать начальное условие

$$x(s) = y \in I, \quad (1.3)$$

то уравнение (1.1) почти всюду будет определять процесс

$$x(t) = f(s, y; t, \omega, \mu) \equiv f_s^t(y) \quad (1.4)$$

на тех временных интервалах $s < t < \Theta(s, y, \omega, \mu) \equiv \Theta(\omega)$, т. е. на тех множествах

$$\Omega'(s, y, t, \mu) = \{\omega : t < \Theta(s, y, \omega, \mu)\},$$

где этот процесс не выходит из I . Здесь $\Theta(s, y, \omega, \mu)$ — первое время выхода из I траектории, начинающейся в y . Это следует из известных положений теории дифференциальных уравнений, если учесть 1.Аз. Очевидно, что функция (1.4) будет $\mathcal{M}$ -измерима при фиксированных прочих аргументах. $\mathcal{M}$ -измеримость сохранится, если в начальном условии (1.3) значение $y = y(\omega)$ считать $\mathcal{M}$ -измеримой ω -функцией. Итак, описанным способом сконструирован вероятностный процесс $x(t, \omega, \mu)$.

Дифференциальное уравнение (1.1) можно заменить на интегральное

$$x(t) = y + \int_s^t G(x(\tau), \tau, \omega, \mu) d\tau.$$

Последнее можно решать методом последовательных приближений по формуле

$$\begin{aligned} x^{(j+1)}(t) &= y + \int_s^t G(x^{(j)}(\tau), \tau, \omega, \mu) d\tau, \\ j &= 0, 1, \quad x^{(0)}(t) = y. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Как следует из теории дифференциальных уравнений (см., например, Смирнов [1], стр. 152—156), эти приближения заведомо будут сходиться для точек ω , соответствующих непрерывным по t функциям G (т. е. почти всюду), на отрезке $[s, \theta'(\omega)]$. Здесь

$$\begin{aligned} \theta'(\omega) &= M_G^{-1} \min(a - y, a + y); \\ M_G &= \sup \{|G|; x \in I, s \leq t \leq \theta(\omega)\}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

На указанном интервале ни одно приближение (1.5) не выходит из $[-a, a]$.

Для разностей $x^j = x^{(j)} - x^{(j-1)}$ согласно (1.5) имеем рекуррентные соотношения

$$\begin{aligned} x^{j+1}(t) &= \int_s^t [G(y + x^1 + \dots + x^{j-1} + x^j, \tau, \omega, \mu) - \\ &\quad - G(y + x^1 + \dots + x^{j-1}, \tau, \omega, \mu)] d\tau. \end{aligned}$$

Пользуясь аналитичностью функции G по x , разлагаем подынтегральные функции в ряд Тейлора

$$x^{j+1}(t) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l!} \int_s^t \frac{\partial^l G}{\partial y^l}(y, \tau, \omega, \mu) [(x^1 + \dots + x^{j-1} + x^j)^l - (x^1 + \dots + x^{j-1})^l] d\tau,$$

который сходится на $[s, \theta'(\omega)]$.

Пользуясь этими соотношениями, можно явно выразить все x^j через функцию G и ее производные. Так, младшие формулы имеют вид

$$x^1(t) = \int_s^t G(y, \tau, \omega, \mu) d\tau;$$

$$x^2(t) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l!} \int_s^t \frac{\partial^l G}{\partial y^l}(y, \tau, \omega, \mu) \left[\int_s^{\tau} G(y, \tau_1, \omega, \mu) d\tau_1 \right]^l d\tau, \quad (1.7)$$

Точное значение $x(t)$ представляется сходящимся п. н. (почти наверное) рядом

$$x(t) = f_s^t(y) = y + \sum_{j=1}^{\infty} x^j(t). \quad (1.8)$$

Легко понять, что подстановка выражений типа (1.7) в (1.8) приводит к сумме полилинейных выражений от функции G и от ее производных вида

$$x(t) = \sum_{q, p_1, \dots, p_q} \frac{\partial^{p_1 + \dots + p_q}}{\partial y_1^{p_1} \dots \partial y_q^{p_q}} \int_s^t \int_s^{\tau_1} G(y_1, \tau_1, \omega, \mu) \dots G(y_q, \tau_q, \omega, \mu) \times \\ \times Q_{q, p_1, \dots, p_q}(\tau_1, \dots, \tau_q) d\tau_1 \dots d\tau_q \quad (1.9)$$

(после дифференцирования нужно положить $y_1 = \dots = y_q = y$), где $Q_{q, p_1, \dots, p_q}(\tau_1, \dots, \tau_q)$ — некоторые ограниченные положительные функции от $\tau_1, \dots, \tau_q$, не зависящие от y, ω или μ . Это будет принято во внимание в дальнейшем.

«Близость» процесса $x(t)$ к марковскому будет обеспечиваться малым параметром μ при специальном выборе зависимости G от μ . Имея в виду рассмотреть сходимость процесса к диффузионному, положим

$$G(x, t, \omega, \mu) = \mu^2 m(x) + \mu g(x, t, \omega), \quad (1.10)$$

где

$$\mu^2 m(x) = MG(x, t, \omega, \mu),$$

т. е.

$$\mathbf{M} g(x, t, \omega) = 0. \quad (1.11)$$

Функции m, g уже не зависят от μ .

Вводя новый масштаб времени, положим $\tilde{t} = \mu^2 t$. Если обозначить

$$x\left(\frac{\tilde{t}}{\mu^2}\right) = \tilde{x}(\tilde{t}); \quad g(x, t, \omega) = \tilde{g}(x, \tilde{t}, \omega),$$

то будем иметь

$$\frac{d\tilde{x}}{d\tilde{t}} = m(\tilde{x}) + \frac{1}{\mu} \tilde{g}(\tilde{x}, \tilde{t}, \omega), \quad \tilde{x}(\tilde{t}) = \tilde{f}_s^{\tilde{t}}(y). \quad (1.12)$$

Подстановка (1.10) в (1.9) увеличит число членов. Выписывая для примера типичный член, в который r раз входит g и $q-r$ раз входит $m(y)$, будем иметь

$$\begin{aligned} \tilde{f}_s^{\tilde{t}}(y) = & \sum_{q, r_1, \dots, r_q} \frac{\partial^{p_1 + \dots + p_q}}{\partial y_1^{p_1} \dots \partial y_q^{p_q}} \int_s^{\tilde{t}} \dots \int_s^{\tilde{t}} \frac{1}{\mu} \tilde{g}(y_{i_1}, \sigma_{i_1}) \\ & \dots \frac{1}{\mu} \tilde{g}(y_{i_r}, \sigma_{i_r}) m(y_{i_{r+1}}) \dots m(y_{i_q}) Q_{q, r_1, \dots, r_q}(\sigma_1, \dots, \sigma_q) d\sigma_1 \dots d\sigma_q. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Мы использовали соотношения

$$Q_{q, r_1, \dots, r_q} \left(\frac{\sigma_1}{\mu^2}, \dots, \frac{\sigma_q}{\mu^2} \right) = Q_{q, r_1, \dots, r_q}(\sigma_1, \dots, \sigma_q).$$

В том, что они справедливы, и в том, что μ входит в (1.13) лишь в комбинации g/μ , можно убедиться, составляя выражения (1.8), (1.9) непосредственно во времени t при помощи уравнения (1.12). Оценим длину гарантированного интервала сходимости, применяя (1.6). Согласно (1.10) имеем $M_G = \mu M_g + O(\mu^2)$, $\underline{M}_g = \sup |g|$. Поэтому длина интервала сходимости на оси $\tilde{t}$, равная $[M_g + O(\mu)]^{-1} \mu \min(a-y, a+y)$, сокращается при $\mu \rightarrow 0$, в то время как длина на оси t , равная $[\mu M_g + O(\mu^2)]^{-1} \min(a-y, a+y)$, неограниченно увеличивается. В действительности длина фактического интервала сходимости еще больше. Функция $g(x, t, \omega)$ как стационарная функция времени является знакопеременной величиной, поэтому время пребывания функции $x(t)$ в I и время пребывания всех ее приближений есть $O(\mu^{-2})$ (или $O(1)$ в масштабах $\tilde{t}$). Не проводя строго обоснования этого факта, мы сформулируем условие сходимости рассматриваемого в дальнейшем ряда как дополнительное предположение.

§ 1.2. ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА

Зафиксировав начальное условие x_0 , рассмотрим процесс $\tilde{x}(\tilde{t}) = \tilde{j}_0^{\tilde{t}}(x_0)$. Основное утверждение будет заключаться в том, что этот процесс при $\mu \rightarrow 0$ стремится «по распределению» к диффузионному марковскому процессу.

Теорема 1.1. Пусть $g(x, t, \omega)$ есть описанная выше функция. Предположим, что 1) ее семиинварианты

$$\begin{aligned} K[g(x_1, t_1, \omega), \dots, g(x_r, t_r, \omega)] &\equiv k_r(x_1, t_1, \dots, x_r, t_r) \equiv \\ &\equiv k'_r(t_2 - t_1, \dots, t_r - t_1) \end{aligned} \quad (1.14)$$

удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} \lim_{L \rightarrow \infty} L^{-\frac{r}{2}} \int_0^L (L-\tau) d\tau \int_0^\tau \dots \int_0^\tau \left| \frac{\partial^{v_1+\dots+v_r}}{\partial x_1^{v_1} \dots \partial x_r^{v_r}} k'_r(\tau, -\pi_1, \dots, -\pi_{r-2}) \right| \cdot \\ d\pi_1 \dots d\pi_{r-2} \equiv N_r < \infty; \end{aligned} \quad (1.15)$$

$$\begin{aligned} \lim_{L \rightarrow \infty} L^{-\frac{r}{2}} \int_0^{2L} \tau d\tau \int_0^L \dots \int_0^L \left| \frac{\partial^{v_1+\dots+v_r}}{\partial x_1^{v_1} \dots \partial x_r^{v_r}} k'_r(-\zeta_1, \dots, -\zeta_{u-1}, \tau, \tau + \pi_1, \dots, \tau + \pi_{r-u-1}) \right| \cdot \\ d\zeta_1 \dots d\zeta_{u-1} d\pi_1 \dots d\pi_{r-u-1} \stackrel{r}{=} 0 \end{aligned} \quad (1.16)$$

при всех $r \geq 2$; $u \geq 1$, $r-u \geq 1$; $v_1 \geq 0$, $v_r \geq 0$,

2) распределение случайных величин (1.23) однозначно определяется своими моментами и 3) что ряд (1.29) сходится. Тогда

1.1.A. Любое конечномерное распределение процесса $\tilde{x}(\tilde{t})$, определенного уравнением (1.12), при $\mu \rightarrow 0$ вполне сходится к соответствующему распределению некоторого марковского процесса $x_m(t)$;

1.1.B. Последний является диффузионным: $\lim_{\Delta \rightarrow 0} M \frac{\Delta x_m^q}{\Delta} = 0$, $q \geq 3$ и характеризуется следующими параметрами сноса и локальной дисперсии

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta \rightarrow 0} M \frac{\Delta x_m}{\Delta} = m(x_m) + \frac{\partial}{\partial x'} \int_{-\infty}^0 k'_2(x', x_m, \tau) d\tau \quad (x' = x_m); \\ \lim_{\Delta \rightarrow 0} M \frac{\Delta x_m^2}{\Delta} = \int_{-\infty}^{\infty} k'_2(x_m, x_m, \tau) d\tau, \end{aligned} \quad (1.17)$$