А.И. Базь

Рассеяние, реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике

2-е издание

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 53
ББК 22.3
А11

А.И. Базь

А11 Рассеяние, реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике: 2-е издание / А.И. Базь – М.: Книга по Требованию, 2024. – 544 с.

ISBN 978-5-458-33064-0

Книга посвящена вопросам квантовой механики, связанным с ее приложениями к атомным и ядерным процессам. По характеру изложения книга заполняет разрыв между учебниками и оригинальной литературой. Наряду с конкретными задачами рассматриваются современные общие методы, на примере нерелятивистской теории разъясняется понятие перенормировки, важное для теории элементарных частиц. Подробно рассмотрены следующие вопросы. Свойства систем с малой энергией связи. Системы со случайным вырождением — атом водорода, трехмерный гармонический осциллятор. Аналитические свойства волновой функции и матрицы рассеяния. Функция Грина уравнения Шредингера. Точное решение задачи об осцилляторе с переменной частотой под действием внешней силы. Квазиклассические свойства вырожденного фермигаза. Многомерная квазиклассика, квазиклассическое приближение в нестационарном случае. Свойства нестабильных систем. Свойства многоканальных систем. Пороговые явления. Описание системы из трех тел с помощью уравнений Фаддеева. Изучение теории перенормировок на примере нерелятивистской модели Ли.

ISBN 978-5-458-33064-0

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

Подобно тому как «демографический взрыв» тревожит социологов и экономистов, проблема «информационного взрыва» во весь рост стоит перед научными работниками и педагогами.

Разница между этими проблемами заключается в том, что ограничение рождаемости легче осуществить по отношению к народонаселению, чем по отношению к появлению новых статей.

Только редактор научного журнала мечтает о золотом веке, когда авторы сами строго рецензируют и отклоняют все свои статьи, за исключением гениальных.

Рождение статьи, содержащей хотя бы небольшое продвижение по сравнению с достигнутым уровнем знания доставляет авторам статьи удовлетворение, отказаться от которого невозможно. Не следут бороться с «информационным взрывом». Энергию этого взрыва, т. е. усилия огромной армии научных работников нужно направить в общее русло.

Возможно, что в химии и зоологии главным является классификация информации и механизация поиска материалов, относящихся к тому или иному химическому соединению или биологическому виду.

В теоретической физике, по нашему убеждению, важнейшее значение имеют обзоры и монографии, подытоживающие работы в определенных актуальных областях. Такой обзор должен по возможности объективно отбирать наиболее важные результаты большого числа работ.

В принципе учебники, обновляющие материал по мере развития науки, ставят перед собой ту же цель. На щите (точнее — в предисловии) знаменитого Курса теоретической физики Ландау и Лифшица начертано, что изучение курса дает подготовку, достаточную для работы над оригинальными журнальными статьями. Фактически в последние годы ощущается некий разрыв между учебниками и новыми оригинальными работами. Предлагаемая книга предназначена для того, чтобы заполнить этот разрыв и служить промежуточным звеном между курсом квантовой механики и современным уровнем в ряде вопросов атомной и ядерной физики и отчасти физики элементарных частиц.

Перечислим общефизические вопросы, рассматриваемые в монографии.

1. Системы с малой энергией связи; примерами являются дейтон — отрицательный ион водорода.
2. Системы с кулоновым потенциалом — атом водорода.
3. Нестабильные системы — радиоактивные ядра, автоионизационные состояния.
4. Подробная теория гармонического осциллятора (отсутствовала в первом издании), применимая также к колебаниям электромагнитного поля в лазерных системах.
5. Системы с многоканальным сплошным спектром — сталкивающиеся частицы, которые в ходе столкновения перегруппировываются, т. е. вступают в ядерные реакции.
6. Системы, состоящие из трех тел (в первом издании не рассматривались).

Наряду с объектами, относящимися к атомной и ядерной физике, рассматриваемыми в монографии, нужно отметить те общие методы теоретической физики, которые рассмотрены гораздо более подробно, чем это делается в учебниках, например:

1. Аналитические свойства волновой функции и матрицы рассеяния.
2. Функция Грина уравнения Шредингера.
3. Квазиклассическое приближение.

Несколько особняком стоит глава о теории перенормировки. Традиционно теория перенормировки рассматривается на поздней стадии изучения теории квантованных полей. При строго логическом подходе такое расположение материала вполне обосновано: теория перенормировки в применении к элементарным частицам требует релятивистских уравнений. Однако опыт изучения и преподавания говорит о больших педагогических трудностях строгого подхода.

На учащегося сразу обрушиваются трудности различной природы — как те, которые связаны с самими понятиями перенормировки, так и трудности релятивистской теории с бесконечным числом процессов и диаграмм.

Представляется целесообразным на модели, не имеющей реального физического прототипа, уяснить одну сторону дела — принцип введения перенормированной массы и заряда. Эта задача решается на примере модели Ли, причем способом несколько отличным от предложенного самим Ли.

Второе издание сдано в печать через 3,5 года после сдачи первого. Объем переработки характеризуется тем, что общее число листов и список литературы увеличились примерно в полтора раза.

В книге принята новая по сравнению с предыдущим изданием система ссылок на научную литературу; в тексте приводится не номер ссылки, а фамилия автора и год издания. При этом фамилии иностранных авторов даны в русской транскрипции. В затруднительных случаях транскрипцию иностранных авторов можно установить по списку, приведенному в конце книги на стр. 542.

В предисловии не принято указывать, какие вопросы не освещены в книге, — перечисление их трудно ограничить, и оно наносит ущерб авторам.

Отступая от традиции, мы хотим отметить два вопроса, которые естественно было бы ожидать в современном изложении квантовой механики: это полюса Редже и фейнмановские интегралы по траекториям. Оба вопроса хорошо освещены в литературе на русском языке, и поэтому мы сочли возможным опустить их.

Пользуемся случаем поблагодарить В. С. Попова, просмотревшего новый вариант книги, за ряд полезных замечаний.

А. Базь, Я. Зельдович, А. Переломов

ГЛАВА I

ДИСКРЕТНЫЙ СПЕКТР

§ 1. Введение

Настоящая глава посвящена описанию некоторых свойств решений уравнения Шредингера, принадлежащих дискретному спектру. Как известно, такие решения описывают связанные состояния. Мы разберем три конкретных случая: а) состояния с малой энергией связи, б) связанные состояния в кулоновском поле, в) состояния трехмерного гармонического осциллятора.

Состояния с энергией связи ε, малой по сравнению с глубиной ямы U_0, имеют важное значение в применениях; в качестве примера можно привести основное состояние дейтона. Свойства этих состояний довольно подробно рассмотрены в §§ 2 и 3, причем особое внимание уделено тому случаю, когда $\varepsilon \to 0$, т. е. уровень только что появился. В следующем параграфе рассматривается движение частицы в поле нескольких потенциальных ям. При этом вводится и обосновывается важное понятие псевдопотенциала.

Поскольку случаи б) и в) подробно разбираются практически во всех учебниках по квантовой механике, мы обратим все внимание на выяснение специфических, качественных свойств этих состояний. В этих случаях, как известно, существует вырождение (обычно называемое «случайным» вырождением) между состояниями с различными значениями момента количества движения l. Поэтому стационарными состояниями являются также суперпозиции состояний с различными значениями l, и наряду с обычной классификацией уровней можно ввести и другую классификацию.

Выражение «случайное» вырождение не надо понимать буквально!

Возникновение такой ситуации всегда не случайно. Оно является следствием особого свойства классической механической системы — наличия замкнутых траекторий. В квантовой механике уравнение Шредингера для таких систем допускает разделение переменных в нескольких системах координат. Более важным свойством, однако, является существование группы преобразований, которые оставляют уравнение Шредингера неизменным. Все остальные свойства являются следствием существования этой группы. Эти вопросы рассмотрены в § 5 для кулоновского потенциала и в следующем параграфе для осциллятора. В § 6 рассмотрены также так называемые «когерентные» состояния. Эти состояния, не являющиеся стационарными, обладают рядом интересных свойств, например свойством наибольшей близости (в некотором смысле этого слова) к свойствам классического осциллятора.

В § 7 дан вывод так называемой теоремы вириала и рассмотрены некоторые ее обобщения. Наконец, в последнем параграфе этой главы рассматривается вопрос о статистических свойствах системы тождественных частиц.

Несколько слов о чтении книги.

Параграф первый дается лишь для того, чтобы ввести обозначения, употребляемые далее. Читателю, недавно изучавшему обычный курс квантовой механики, настоятельно рекомендуем не читать дальше этот параграф. В противном случае он получит превратное представление о содержании и может отложить книгу, не дойдя до вещей, ему неизвестных и интересных.

Напомним теперь некоторые основные положения квантовой механики.

Состояние системы в нерелятивистской квантовой механике полностью описывается волновой функцией Ψ, а изменение Ψ-функции с течением времени определяется уравнением Шредингера (в дальнейшем для сокращения будем писать у. Ш.)

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = H\Psi, \tag{1.1}$$

где H — гамильтониан системы, $\hbar$ — постоянная Планка.

Мы будем рассматривать в основном (за исключением § 4 гл. V и гл. VI) тот случай, когда гамильтониан не зависит явно от времени. При этом существуют стационарные состояния, т. е. состояния, для которых плотность вероятности $|\Psi|^2$ с течением времени не изменяется. Волновая функция такого состояния имеет вид

$$\Psi(t) = \psi e^{-\frac{iEt}{\hbar}};$$

отсюда следует, что ψ является собственной функцией гамильтониана

$$H\psi = E\psi, \tag{1.2}$$

описывающей состояние с определенной вещественной энергией E.

Для случая одной частицы в постоянном внешнем поле имеем

$$\left.\begin{aligned} H &= -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + U(\boldsymbol{r}),\\ \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + U(\boldsymbol{r})\right)\psi(\boldsymbol{r}) &= E\psi(\boldsymbol{r}). \end{aligned}\right\} \tag{1.2'}$$

Волновая функция $\psi(\boldsymbol{r})$ должна удовлетворять обычным условиям: она обязана быть однозначной *) и непрерывной во всем пространстве.

В большом числе практически важных задач потенциал $U(\boldsymbol{r})$ является сферически симметричным, т. е. зависит только от r. В таком поле оператор момента количества движения $\boldsymbol{L}$ коммутирует с оператором Гамильтона H (это соответствует сохранению момента количества движения в классической механике). Кроме того, оператор H коммутирует с оператором инверсии P

---

*) Условие однозначности волновой функции подробно рассматривалось В. Паули (1939). Это условие приводит, например, к таким нетривиальным эффектам, как квантование магнитного потока в многосвязном сверхпроводнике (Ф. Лондон, 1950; Н. Байерс, Чж. Н. Янг, 1961) и возникновение квантованных вихревых нитей в жидком гелии (Л. Онзагер, 1949; Р. Фейнман, 1955). Оно играет существенную роль при выводе квантовых условий Бора — Зоммерфельда для многомерного случая, см. § 3 гл. V.

(свойство, не имеющее аналога в классической механике (Е. Вигнер, 1964)).

Так как операторы H, L^2, L_z и P коммутируют друг с другом, то собственные состояния H могут являться одновременно и собственными состояниями L^2, L_z и P. Иными словами, стационарное состояние может иметь: определенное значение орбитального момента l, причем $L^2 = l(l+1)$, где l — целое; определенное значение проекции момента m на произвольно выбранную ось z, причем m принимает $(2l+1)$ значение от $-l$ до $+l$, и определенную четность $P = +1$ или $P = -1$. В одночастичной задаче четность однозначно определяется орбитальным моментом $P = (-1)^l$, т. е. совпадает с четностью числа l. Из сказанного выше следует, что существуют решения у. Ш., имеющие вид

$$\psi(\mathbf{r}) = R_l(r)\, Y_{lm}(\theta, \varphi). \tag{1.3}$$

Здесь θ и φ — полярный и азимутальный углы вектора $\mathbf{r}$, $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ — сферические функции, а $R_l(r)$ — функция, зависящая только от r. После подстановки (1.3) в (1.2′) для R_l получается уравнение

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR_l}{dr}\right) + \left[\frac{2m}{\hbar^2}(E-U) - \frac{l(l+1)}{r^2}\right]R_l = 0. \tag{1.4}$$

Введем новую функцию

$$\chi_l(r) = rR_l(r), \tag{1.3′}$$

которая удовлетворяет уравнению

$$\chi_l'' + \left[k^2 - \left(V(r) + \frac{l(l+1)}{r^2}\right)\right]\chi_l = 0, \tag{1.5}$$

уже не содержащему первой производной. Величина k здесь равна $\sqrt{2mE/\hbar^2}$, а $V = \frac{2m}{\hbar^2}U$.

Там, где это не сможет вызвать недоразумений, мы и V будем называть потенциалом.

Центробежный потенциал $\frac{l(l+1)}{r^2}$ можно включить в V, после чего уравнение (1.5) принимает вид

$$\chi_k'' + (k^2 - V(r))\,\chi_k = 0. \tag{1.6}$$

Свойства этого уравнения хорошо известны из курсов квантовой механики (и в первую очередь из «Квантовой механики» Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшица (1963). Отметим еще весьма полный курс Р. Ньютона (1966))*).

В случае несингулярного потенциала $\psi(r)$ конечна, откуда следуют граничные условия для χ_k:

$$\left.\begin{aligned} &\chi_k(r)\to 0 \quad \text{при} \quad r\to 0, \\ &\frac{\chi_k(r)}{r} \text{ конечна} \quad \text{при} \quad r\neq 0 \quad \text{и } r\to\infty. \end{aligned}\right\} \tag{1.7}$$

Кроме того, χ_k и χ_k', естественно, при $r>0$ должны быть непрерывными **).

Условимся также в тех случаях, когда при $r\to\infty$ $V(r)$ стремится к определенному пределу, таким образом выбирать начало отсчета шкалы энергии, чтобы на бесконечности потенциал $V(r)$ обращался в нуль.

Почти все встречающиеся в природе взаимодействия между частицами (кроме кулоновского и некоторых других) описываются быстро падающими потенциалами, т. е. потенциалами, убывающими быстрее, чем $1/r$, при больших r. Во многих случаях к тому же при r, большем некоторого R, этими взаимодействиями можно пренебречь и считать, что $V(r)=0$ при $r>R$. Такие потенциалы будем называть короткодействующими. Введение радиуса обрезания R сильно упрощает все формулы, и мы сначала рассмотрим именно этот случай. Центробежный потенциал нельзя считать короткодействующим, и, чтобы не усложнять дела, положим орбитальный момент l равным нулю.

---

*) История возникновения и развития квантовомеханических представлений подробно рассмотрена в книге М. Яммера (1966) и сборнике оригинальных работ по квантовой механике под редакцией Б. ван дер Вардена (1967). Математически строгое исследование ряда принципиальных вопросов квантовой механики, например процесса измерения, можно найти в книге И. фон Неймана (1932). Современное изложение этих вопросов дано в книге Дж. Яуха (1968). Приближенные методы в квантовой механике рассмотрены в книге А. Б. Мигдала и В. П. Крайнова (1966).

**) Это связано с тем обстоятельством, что в уравнение (1.6) входят вторые производные: в случае разрывного χ_k' или χ_k правая часть (1.6) не равна нулю, а содержит δ- или δ'-функцию.

Итак, мы приходим к следующей постановке задачи: найти все решения $\chi_k(r)$ уравнения

$$\left.\begin{aligned} \chi_k'' + (k^2 - V(r))\chi_k = 0 \quad \text{при} \quad r < R, \\ \chi_k'' + k^2\chi_k = 0 \quad \text{при} \quad r \geqslant R, \end{aligned}\right\} \tag{1.6'}$$

удовлетворяющие условиям (1.7). При этом волновая функция

$$\psi(\boldsymbol{r}) = R_{k0}(r)\,Y_{00}(\theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\,\frac{\chi_k(r)}{r}. \tag{1.3''}$$

В области $r > R$, как видно из второго уравнения (1.6′), имеются два решения *)

$$\chi_k^{(\pm)} = e^{\pm ikr}. \tag{1.8}$$

При $r < R$ также имеются два решения, но из них можно использовать лишь одно, так как второе не удовлетворяет граничному условию при $r = 0$. Действительно, будем искать χ_k при $r \to 0$ в виде степенной функции r^σ; тогда из (1.6′)

$$\sigma(\sigma - 1) \approx -r^2(k^2 - V(r)).$$

Если $r^2V(r) \to 0$ **), то для σ получаются два значения: 0 и 1. Соответственно этому при $r \to 0$ у. Ш. допускает два решения:

$$\psi_1(r) \to a \quad \text{при} \quad r \to 0, \qquad \psi_2(r) \to \frac{b}{r} \quad \text{при} \quad r \to 0,$$

где a и b — постоянные. Решение ψ_2, однако, должно быть отброшено, так как

$$\Delta\frac{b}{r} = -4\pi b\delta(\boldsymbol{r})$$

---

*) В случае быстро падающих потенциалов также существуют два решения $\chi_k^{(\pm)}(r)$, которые при больших значениях r ведут себя как $e^{\pm ikr}$. Эти решения часто обозначают через $f(\mp k, r)$. Их свойства были довольно подробно рассмотрены в работе Р. Йоста (1947). Для потенциалов с кулоновским хвостом $U \approx \alpha/r$ при $r \to \infty$ асимптотика функций $\chi_k^{(\pm)}(r)$ имеет вид $e^{\pm i(kr - \eta \ln 2kr)}$, где $\eta = \dfrac{m\alpha}{\hbar^2 k}$.

**) Если это условие не выполняется, то потенциал называется сингулярным. Новые качественные явления, возникающие при этом, обсуждаются в приложении А.