А. Будкин

Квазимногообразия групп

Структурная теория, решетки квазимногообразий

Москва
Издательство Нобель Пресс

УДК 50
ББК 22
А11

А. Будкин
А11 Квазимногообразия групп: Структурная теория, решетки квазимногообразий / А. Будкин – М.: Lennex Corp, — Подготовка макета: Издательство Нобель Пресс, 2013. – 340 с.

ISBN 978-5-458-62395-7

Квазимногообразия - это классы групп, определяемые формулами специального вида "квазитождествами". Приведены необходимые сведения из математической логики и теории алгебраических систем. Дана характеризация квазимногообразий на языке фильтрованных произведений. Доказываются почти все известные формулы, позволяющие при помощи операторов на классах получать квазимногообразия, порожденные данным классом. Устанавливается роль теории определяющих соотношений и подпрямой неразложимости в изучении квазимногообразий групп. Исследуются решетки квазимногообразий групп, коатомы и фильтры в этих решетках. Изучаются квазимногообразия нильпотентных и разрешимых групп, локально конечные квазимногообразия, квазимногообразия с тождеством. Рассматривается полугруппа квазимногообразий групп. Излагаются теоремы вложения в квазимногообразиях, замкнутых относительно прямых сплетений.

ISBN 978-5-458-62395-7

© Издательство Нобель Пресс, 2013
© А. Будкин, 2013

КВАЗИМНОГООБРАЗИЯ ГРУПП

А.И.Будкин

Изучается строение квазимногообразий и решеток квазимногообразий групп. Исследуются квазимногообразия нильпотентных и разрешимых групп, локально конечные квазимногообразия. Излагаются теоремы вложения в квазимногообразиях, замкнутых относительно прямых сплетений.

Для научных работников — специалистов по математической логике, алгебре, теоретическому программированию. Доступна аспирантам и студентам.

Предисловие

Квазимногообразия алгебр — это классы алгебр, определяемые формулами специального вида "квазитождествами". Теория квазимногообразий — одно из направлений современной математики, находящееся на стыке алгебры и математической логики и своим началом восходящее к работам А. И. Мальцева и А. Тарского. В развитии теории квазимногообразий выявились ее глубокие связи с различными направлениями алгебры (проблема погружаемости классов алгебр, теория определяющих соотношений, характеризационные задачи) и математической логики (алгоритмические вопросы, вопросы аксиоматизируемости, проблематика неклассических логик, относящаяся к допустимости правил вывода). Основная цель данной книги — представление методов и результатов теории квазимногообразий групп.

В главе 1 приведены необходимые сведения из математической логики и теории алгебраических систем. Изложены простейшие свойства фильтров и фильтрованных произведений, рассматриваются аксиоматизируемые классы алгебраических систем. Как следствие общей теории, доказаны теоремы, утверждающие, что некоторые классы обобщенно разрешимых групп (такие, как $RN-$, $RI-$, $Z-$группы) являются квазимногообразиями.

В главе 2 излагаются общие теоремы о строении квазимногообразий групп. Приведены теоремы о характеризации квазимногообразий на языке фильтрованных произведений (такие, как теоремы А. И. Мальцева), некоторые из них снабжены новыми доказательствами. Доказываются почти все известные формулы, позволяющие при помощи операторов на классах получать квазимногообразия, порожденные данным классом. Исследуется роль свободных групп, подпрямо неразложимых групп, теории определяющих соотношений, понятия аппроксимируемости в теории квазимногообразий. Излагается метод невложимости, суть которого состоит в установлении связи между квазимногообразиями и конечно определенными группами (идеи восходят к методу диаграмм А.Тарского и к понятию локальной вложимости А.И.Мальцева). Эта связь позволила при изучении квазимногообразий привлечь весьма нетривиальные факты из теории групп. В качестве иллюстрации этого метода доказано, например, что квазимногообразие, порожденное всеми собственными многообразиями групп, не совпадает с классом всех групп. Доказательства многих утверждений этой главы пригодны и в более общей ситуации — для квазимногообразий алгебраических систем.

В главе 3 изучаются основные свойства решеток квазимногообразий. Доказано, что если решетка квазимногообразий модулярна, то она дистрибутивна. Установлена немодулярность решетки локально конечных квазимногообразий, решетки квазимногообразий групп без кручения. Подробно исследуется вопрос существования коатомов в решетках квазимногообразий. В частности, показано, что для квазимногообразия, порожденного почти полициклической группой, в решетке его подквазимногообразий множество коатомов конечно и всякое собственное подквазимногообразие содержится в некотором коатоме. Рассматривается понятие аксиоматического ранга и с его помощью доказывается финитная аппроксимируемость решеток локально конечных квазимногообразий.

Глава 4 посвящена квазимногообразиям нильпотентных групп. Шаг за шагом на протяжении всей главы, переходя от менее сложных классов к более сложным, доказывается теорема, в которой дано достаточно прозрачное описание квазимногообразий 2-ступенно нильпотентных групп с конечной (и континуальной) решеткой подквазимногообразий. Изложен критерий счетности решеток квазимногообразий 2-ступенно нильпотентных групп. Приведено также описание абелевых квазимногообразий групп. Изучается квазимногообразие, порожденное свободными группами. Указан метод построения конечных решеток квазимногообразий 2-ступенно нильпотентных групп.

В главе 5 излагаются теоремы А. Ю. Ольшанского о локально конечных квазимногообразиях групп, в том числе, доказывается конечность решетки подквазимногообразий многообразия, порожденного конечной группой с абелевыми силовскими подгруппами, устанавливается, что такое многообразие, как квазимногообразие, также порождается конечной группой. При этом изучаются критические группы в многообразии, порожденном конечной группой с абелевыми силовскими подгруппами.

Исследуются квазимногообразия разрешимых групп, описаны разрешимые покрытия квазимногообразия абелевых групп. Вводится умножение квазимногообразий и доказывается, что полугруппа нетривиальных локально конечных квазимногообразий свободна. Исследуются фильтры в решетках квазимногообразий. Все это предваряется изложением свойств сплетений групп.

В главе 6 изучаются квазимногообразия групп, замкнутые относительно прямых сплетений. Излагаются теоремы вложения Б. Нейманна и Х. Нейманн счетной группы в 2-порожденную группу. Доказываются аналоги этих теорем в квазимногообразиях, замкнутых относительно прямых сплетений. Приводятся следствия развитых методов.

Отметим, что в книгу почти не вошли вопросы, связанные с аксиоматизируемостью квазимногообразий.

Многообразия — важный пример квазимногообразий. По теории многообразий существует хорошая книга Х. Нейманн [65]. Мы часто обращаемся к этой книге, напоминаем необходимые результаты из нее. При изложении основных понятий математической логики (глава 1) мы придерживаемся книг [39], [57]. Отметим недавно вышедшую книгу В. Горбунова [36] по теории квазимногообразий алгебраических систем. В ней можно найти иные подходы к изучению квазимногообразий.

Для чтения книги не требуется значительной математической подготовки. Изложения основных теорем носит, как правило, замкнутый характер. При иллюстрации методов теории квазимногообразий и их следствий иногда привлекаются весьма нетривиальные результаты теории групп, доказательства которых выходят за рамки этой книги.

Автор выражает глубокую благодарность коллективу школы алгебраистов и логиков Новосибирска. На формирование научных интересов автора существенное влияние оказал профессор Д. М. Смирнов, которому я также выражаю искреннюю признательность. Считаю необходимым выразить благодарность С. В. Ленюку, С. А. Шаховой, Е. С. Половниковой, Л. В. Тараниной, оказавшим большую помощь при оформлении этой книги.

Александр Иванович Будкин

Оглавление