В. И. Смирнов

Курс высшей математики

Том 4. Часть 2

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 51
ББК 22.1
В11

В. И. Смирнов
В11 Курс высшей математики: Том 4. Часть 2 / В. И. Смирнов – М.: Книга по Требованию, 2021. – 552 с.

ISBN 978-5-458-31236-3

Во второй части четвёртого тома курса высшей математики Смирнов В.И. продолжает изложение. В данном томе изложены общая теория уравнений с частными производными, предельные задачи.Автор писал, что "предполагается выпуск шестого тома с изложением некоторых вопросов современной теории дифференциальных операторов с одной и несколькими независимыми переменными".

ISBN 978-5-458-31236-3

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

Серия Книжный Ренессанс
www.samizday.ru/reprint

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА

В предисловии ко второму изданию пятого тома (1959 г.) Владимир Иванович Смирнов писал, что «предполагается выпуск шестого тома с изложением некоторых вопросов современной теории дифференциальных операторов с одной и несколькими независимыми переменными». Он хотел, чтобы я была соавтором этого нового тома. Однако разные дела и обстоятельства помешали осуществлению этого намерения, и было решено ограничиться расширением четвертого тома. Для этого во второй том была включена теория интеграла Лебега и пространство L_2, а четвертый том был разбит на две части (книги). В первой из них изложена теория интегральных уравнений в пространстве непрерывных функций и в пространстве L_2, вариационное исчисление, теория обобщенных производных, основные свойства пространств W_2^1 и W_2^2 и задача о минимуме квадратичного функционала в обобщенной постановке. Эта часть вышла в свет в 1974 году. Переработка и расширение второй части четвертого тома пришлась на время, когда здоровье Владимира Ивановича было подорвано тяжелой болезнью. Тем не менее он нашел в себе силы внимательно прочесть и отредактировать написанные мною дополнения и изменения и высказал пожелания относительно окончательной редакции данной книги. У Владимира Ивановича было намерение исключить часть материала предыдущего издания, которая ему казалась несколько устаревшей в свете последующих исследований. Но в результате совместного обсуждения он согласился сохранить его и внести лишь небольшие коррективы, необходимые для увязывания старого и нового текстов.

Из-за изменений, внесенных ранее в предыдущие тома, пришлось переделывать номера ссылок на них. Они даются на последние издания всех томов: 23-е издание первого тома (1974 г.), 21-е издание второго тома (1974 г.), 10-е издание первой части третьего тома (1974 г.), 9-е издание второй части третьего тома (1974 г.), на 1-е издание первой части четвертого тома (1974 г.) и на 2-е издание пятого тома (1959 г.). Например, ссылка на первую часть третьего тома дается в виде [III_1; **140**], где число **140** указывает номер пункта. Если же имеется в виду данная книга, то номер тома не пишется, а приводится лишь номер соответствующего пункта (например, [**150**]), а иногда и страницы.

Апрель 1979 г. *О. А. Ладыженская*

ГЛАВА I

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

§ 1. УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

1. Линейные уравнения с двумя независимыми переменными. Мы неоднократно встречались с различными дифференциальными уравнениями, содержащими частные производные искомой функции. Это были всегда уравнения совершенно специального вида, возникшие из конкретных задач математической физики. Целью настоящей главы является изложение основ общей теории уравнений с частными производными, причем мы начинаем изложение этой теории с рассмотрения уравнений первого порядка.

Одно уравнение первого порядка с одной искомой функцией u независимых переменных $x_1, \ldots, x_n$ имеет вид

$$F(x_1, \ldots, x_n, u, p_1, \ldots, p_n) = 0,$$

где x_k — независимые переменные и $p_k = u_{x_k}$ — частные производные искомой функции по этим независимым переменным. Мы будем изучать сначала уравнения, линейные относительно частных производных p_k, т. е. уравнения вида

$$a_1(x_1, \ldots, x_n, u)\, p_1 + \ldots + a_n(x_1, \ldots, x_n, u)\, p_n = c(x_1, \ldots, x_n, u), \quad (1)$$

причем коэффициенты a_k и свободный член c суть заданные функции независимых переменных x_k и искомой функции u. Поскольку сама функция u может входить любым образом в коэффициенты и свободный член, такие уравнения называют иногда не линейными, а *квазилинейными уравнениями*. В настоящем параграфе мы будем рассматривать уравнение вида (1) в случае двух независимых переменных. В этом частном случае независимые переменные обозначаются обычно буквами x и y, а частные производные мы будем, как всегда, обозначать следующим образом: $p = u_x$ и $q = u_y$. Таким образом, предметом исследования настоящего параграфа будут уравнения вида

$$a(x, y, u)\, p + b(x, y, u)\, q = c(x, y, u). \quad (2)$$

Напомним, что мы уже занимались линейными уравнениями с частными производными раньше [II; 22] и видели, что задача интегрирования уравнения вида (2) равносильна задаче интегрирования некоторой системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Мы дополним полученные раньше результаты некоторыми новыми фактами, которые окажутся нам полезными в дальнейшем при исследовании более сложных задач.

Заданные функции $a(x, y, u)$, $b(x, y, u)$ и $c(x, y, u)$ определяют некоторое поле направлений в пространстве (x, y, u), а именно, в каждой фиксированной точке этого пространства мы имеем направление, у которого направляющие косинусы пропорциональны a, b и c. Это поле направлений определяет семейство линий, таких, что любая линия семейства имеет в каждой своей точке касательную, совпадающую с направлением поля в этой точке. Это семейство линий получается в результате интегрирования системы обыкновенных уравнений

$$\frac{dx}{a(x, y, u)} = \frac{dy}{b(x, y, u)} = \frac{du}{c(x, y, u)}, \tag{3}$$

или, если мы обозначим через ds общую величину написанных трех отношений, системы

$$\frac{dx}{ds} = a(x, y, u); \quad \frac{dy}{ds} = b(x, y, u); \quad \frac{du}{ds} = c(x, y, u). \tag{4}$$

Величины p, q и (-1) пропорциональны направляющим косинусам нормали к искомой поверхности $u = u(x, y)$, и уравнение (2) выражает условие перпендикулярности $ap + bq + c(-1) = 0$ нормали к искомой поверхности с направлением поля, т. е. уравнение (2) сводится к требованию, чтобы в каждой точке искомой поверхности $u = u(x, y)$ направление, определяемое упомянутым выше полем направлений, находилось в касательной плоскости к поверхности. Назовем линии, определяемые системой (4), *характеристическими линиями* или *характеристиками* уравнения (2). Если некоторая поверхность $u = u(x, y)$ представляет собою геометрическое место характеристик уравнения (2), т е. образована линиями l', которые удовлетворяют системе (4), то в каждой точке этой поверхности касательная к линии l', проходящей через эту точку, лежит в касательной плоскости к поверхности, и, следовательно, эта поверхность удовлетворяет уравнению (2), т. е. является интегральной поверхностью этого уравнения. Таким образом, *если поверхность $u = u(x, y)$ образована характеристиками уравнения* (2), *то эта поверхность есть интегральная поверхность этого уравнения.*

Мы предполагаем, что поверхность $u = u(x, y)$ имеет в каждой точке касательную плоскость и что направление нормали к поверхности меняется непрерывным образом при перемещении вдоль поверхности. Это сводится к существованию и непрерывности производных первого порядка от $u(x, y)$.

В дальнейшем, говоря об интегральной поверхности, мы будем предполагать, что эта поверхность обладает указанными выше свойствами. Вообще такие поверхности мы для краткости будем называть *гладкими*.

Выше мы показали, что гладкая поверхность, имеющая уравнение $u = u(x, y)$ и образованная характеристиками, есть интегральная поверхность. Можно показать, что и, наоборот, *если некоторая гладкая поверхность удовлетворяет уравнению* (2), т. е. *есть интегральная поверхность, то ее можно покрыть характеристиками.*

Действительно, если некоторая поверхность S удовлетворяет уравнению (2), то в каждой ее точке направление (a, b, c) лежит в касательной плоскости к S, и мы имеем, таким образом, на S некоторое поле направлений. Интегрируя соответствующее этому полю направлений обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка, мы и найдем линии l', лежащие на поверхности S и удовлетворяющие системе (4). Этим уравнением первого порядка может служить, например, уравнение

$$\frac{dx}{a(x, y, u)} = \frac{dy}{b(x, y, u)},$$

в котором u заменено его выражением $u = u(x, y)$ из уравнения поверхности S. Положим, что к полученному уравнению применима теорема существования и единственности, причем его интегральные линии l покрывают без пересечений некоторую область D, в которой определена функция $u = u(x, y)$. Линии l' суть те линии на S, проекциями которых на плоскость (x, y) являются линии l.

При исследовании обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка мы видели [**II; 50, 51**], что искомые функции вполне определяются заданием начальных значений этих функций при заданном значении независимого переменного. Из этих начальных данных определяются произвольные постоянные, входящие в общий интеграл, если этот последний нам удалось найти. Но определение решения по начальным данным может быть произведено и без знания общего интеграла, хотя бы при помощи метода последовательных приближений, которым мы пользовались при доказательстве теоремы существования и единственности [**II; 51**]. Общее решение уравнения (2) содержит уже не произвольные постоянные, а произвольные функции [**II; 23**], и задача определения решения по начальному данному формулируется в этом случае следующим образом: *определить ту интегральную поверхность уравнения* (2), *которая проходит через заданную кривую* l *в пространстве* (x, y, u).

Если через λ мы обозначим проекцию линии l на плоскость (x, y), то формулированная задача приводится к задаче разыскания такого решения уравнения (2), которое принимает заданные значения в точках линии λ. Наметим предварительно решение поставленной задачи [II; 23]. Пусть M_0 — некоторая точка линии l. Примем ее координаты за начальные данные функций, определяемых системой (4). Согласно теореме существования и единственности, получим вполне определенную характеристику, выходящую из этой точки M_0. Проделывая это для каждой точки линии l, мы будем иметь семейство характеристик; положим, что они образуют некоторую поверхность S с уравнением $u = u(x, y)$. Она проходит через линию l и, согласно сказанному выше, является интегральной поверхностью уравнения (2).

Строгое проведение доказательства существования и единственности решения задачи требует некоторых предположений о правых частях уравнений (4) и некоторых существенных оговорок относительно линии l. Если, например, заданная линия l сама есть характеристика, то указанный выше прием проведения характеристик из точек линии l приведет не к поверхности, а к самой линии l. В этом случае решений может быть бесчисленное множество [II; 24]. Действительно, проведем через некоторую точку линии l линию l_1, которая уже не является характеристикой. Проведя из точек этой линии характеристики (среди них будет участвовать и данная линия l), мы получим, при соблюдении некоторых условий, интегральную поверхность, проходящую через заданную линию l. Принимая во внимание произвольность в выборе l_1, мы видим, что задача имеет бесчисленное множество решений, если заданная линия l есть характеристика. Может оказаться, что задача вовсе не имеет решения. Это будет в том случае, когда характеристики, выходящие из точек линии l, не образуют в окрестности этой линии поверхность, имеющую явное уравнение $u = u(x, y)$, где $u(x, y)$ однозначна и непрерывна и имеет непрерывные производные первого порядка. Так будет, например, если упомянутые характеристики образуют цилиндрическую поверхность с образующими, параллельными оси u. В следующем параграфе мы перейдем к выяснению условий, при которых поставленная задача имеет одно определенное решение.

2. Задача Коши и характеристики. Под задачей Коши подразумевают обычно формулированную выше задачу об определении интегральной поверхности уравнения (2), проходящей через заданную линию l. Для точного исследования вопроса о существовании и единственности решения этой задачи нам придется пользоваться одной теоремой из теории обыкновенных дифференциальных уравнений, а именно:

Теорема. *Если правые части системы дифференциальных уравнений*

$$\frac{dy_k}{dx} = f_k(x, y_1, \ldots, y_n) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{5}$$

суть непрерывные функции своих аргументов в некоторой области, определяемой неравенствами

$$|x - a| \leqslant A; \qquad |y_k - b_k| \leqslant B \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{6}$$

и если, кроме того, в этой области существуют непрерывные частные производные $\frac{\partial f_k}{\partial y_s}$, *то решение системы* (5), *определяемое в силу теоремы существования и единственности любыми начальными данными* $(x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0)$, *находящимися внутри области* (6):

$$y_k = \varphi_k(x, x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

непрерывно по своим аргументам и допускает частные производные $\frac{\partial \varphi_k}{\partial y_s^0}$ *по начальным данным, которые являются непрерывными функциями своих аргументов* $(x, x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0)$ *в некоторой окрестности взятых начальных данных.*

Чтобы не прерывать изложение, мы отложим доказательство этой теоремы до одного из следующих параграфов.

Вернемся к решению задачи Коши. Положим, что уравнение линии l задано в параметрической форме:

$$x_0 = x_0(t); \quad y_0 = y_0(t); \quad u_0 = u_0(t) \qquad (t_0 \leqslant t \leqslant t_1), \tag{7}$$

и допустим, что правые части уравнений (4) удовлетворяют условиям формулированной выше теоремы в некоторой области пространства (x, y, u), содержащей внутри себя линию l. Принимая координаты точек l за начальные данные при $s = 0$, мы получим решение системы (4):

$$x = x(s, x_0, y_0, u_0); \quad y = y(s, x_0, y_0, u_0); \quad u = u(s, x_0, y_0, u_0)$$

при s, достаточно близких к нулю, или, в силу (7),

$$x = x(s, t); \quad y = y(s, t); \quad u = u(s, t). \tag{8}$$

Считая, что правые части уравнений (7) непрерывно дифференцируемы по t, и пользуясь указанной выше теоремой, мы можем утверждать, что функции (8) имеют непрерывные производные не только по s, но и по t. При любом заданном t из промежутка $t_0 < t < t_1$ функции (8) определены при всех s, достаточно близких к нулю. Составим функциональный определитель от первых двух из этих функций по s и t:

$$\Delta = x_s y_t - x_t y_s. \tag{9}$$

Существенным для дальнейшего будет тот факт, является ли этот определитель отличным от нуля или нет. Мы рассмотрим, во-первых, тот случай, когда $\Delta \neq 0$ вдоль линии l, и, во-вторых, тот случай, когда $\Delta = 0$ вдоль линии l. Начнем с первого случая:

$$\Delta \neq 0 \quad (\text{вдоль линии } l), \tag{10}$$

т. е. $\Delta \neq 0$ при $s = 0$, но тем самым, в силу непрерывности производных, $\Delta \neq 0$ и в некоторой окрестности начального значения $s = 0$ и значения t, соответствующего некоторой точке M линии l. При этом первые два из уравнений (8) можно решить относительно s и t при всех x и y, находящихся в окрестности координат (x_0, y_0) точки M линии l. Это решение — единственно; и полученные функции $s(x, y)$, $t(x, y)$ имеют непрерывные производные первого порядка [III₁; 19]. Подставляя полученные функции $s(x, y)$ и $t(x, y)$ в третье из уравнений (8), мы и будем иметь в упомянутой окрестности функцию $u(x, y)$, имеющую непрерывные производные первого порядка, причем поверхность $u = u(x, y)$ содержит некоторый участок линии l в окрестности M. Из указанных в предыдущем параграфе геометрических соображений непосредственно следует, что $u(x, y)$ удовлетворяет уравнению (2). Мы это проверим ниже и аналитически.

Отметим, что мы построили решение $u(x, y)$ лишь в некоторой окрестности любой заданной точки M линии l, или, как говорят, получили локальное решение задачи. При некоторых условиях, налагаемых на a, b, c и линию l, можно убедиться в возможности построения интегральной поверхности в некоторой окрестности всей линии l, т. е. при всех x и y, достаточно близких к линии $x = x_0(t)$, $y = y_0(t)$ на плоскости (x, y). При этом считается, что производные $x_0'(t)$ и $y_0'(t)$ одновременно в нуль не обращаются. Точная формулировка подобных результатов будет указана в следующем параграфе.

Вопрос о существовании решения уравнения в некоторой наперед предписанной области плоскости (x, y) представляет большие трудности. Можно построить область B плоскости (x, y) и в ней функцию $b(x, y)$, имеющую производные всех порядков, так, что для уравнения

$$u_x + b(x, y) u_y = 0$$

только $u = \text{const}$ будет решением, имеющим непрерывные производные первого порядка и существующим во всей области B.

Проверим теперь, что построенная функция $u(x, y)$ действительно является решением уравнения (2). Пользуясь правилом