

С.А. Богомоллов

Эволюция геометрической мысли

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 001
ББК 72
С11

С11 **С.А. Богомолов**
Эволюция геометрической мысли / С.А. Богомолов – М.: Книга по Требова-
нию, 2021. – 221 с.

ISBN 978-5-458-46671-4

ISBN 978-5-458-46671-4

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2021

© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2021

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.



Серия Книжный Ренессанс

www.samizday.ru/reprint

I. Предварительное накопление знаний.

Если мы рассмотрим любую вполне сложившуюся науку, то сейчас же подметим три следующие черты, необходимо ей присущие. Во-первых, ее утверждения должны быть истинными; как известно, наши суждения считаются истинными, если они согласуются или с действительностью (в случае, когда мы изучаем нечто реально существующее), или друг с другом (в случае, когда дело идет о свободном создании нашего ума). Во-вторых, эта истинность не является чем-то случайным, а должна быть установлена со всею строгостью при помощи тех методов, которые присущи данной науке; если последняя принадлежит к числу опытных наук (как физика или химия), то доказательство дается при посредстве опыта; а если мы имеем дело с наукой умозрительной (как логика или геометрия), то доказательство сводится к цепи умозаключений. В-третьих, положения рассматриваемой науки должны быть приведены в систему, т.-е. они не должны быть рядом предложений, лишь механически связанных друг с другом; напротив того, они должны быть объединены в органическое целое единством плана и единством метода, позволяющими постигать взаимную зависимость отдельных частей; такая систематизация знаний не только удовлетворяет эстетическим требованиям, которые, к слову сказать, всегда были сильны у настоящих математиков, но и дает возможность лучше усвоить материал и предугадать дальнейшие возможности.

Но таковы лишь черты сложившейся науки; на первоначальной стадии своего развития она ими не обладает. Каждая наука, даже самая отвлеченная, возникла под давлением известных жизненных потребностей; первые положения ее являются ответами на те вопросы, которые жизнь на каждом шагу ставит человеку; он отвечает на них как умеет, не особенно заботясь о строгости доказательств и о приведении своих знаний в систему. Должен был пройти долгий период предварительного накопления знания и должна была появиться у человечества высшая потребность — знания ради знания — для того, чтобы создались необходимые предпосылки истинно-научного метода.

Геометрия, как отрасль чистой математики, принадлежит к самым точным и отвлеченным наукам; тем не менее она должна была пройти через такую же предварительную стадию. Эта последняя запечатлена в самом названии нашей науки, указывающем на те практические потребности, которые ближайшим образом вызвали ее к жизни: „геометрия“ по-гречески значит „землемерие“. Начальные геометрические сведения несомненно имелись у всех народов и не только у них; всякое животное, напр., практически знает, что „прямая линия есть кратчайшее расстояние между двумя точками“. Но тогда как одни из них пошли немногим дальше животных, другие прошли целиком период предварительного накопления знания и только на пороге создания настоящей науки уступили место другим народам, более их способным к отвлеченному знанию. Вот такой предварительный период в развитии геометрии мы чрезвычайно отчетливо видим в древнем Египте, который считается колыбелью нашей науки.

Один из древних историков геометрии говорит: „...Геометрия, по свидетельству весьма многих, была открыта египтянами и возникла при измерении земли. Это

измерение было им необходимо вследствие разлития реки Нила, постоянно смывавшего границы^{*)}. В таком же смысле высказывается и знаменитый историк Геродот. Об объеме и характере геометрических сведений у египтян прежде всего можно судить по одному древнему папирусу (около 2000 л. до начала нашей эры), который заключает в себе математическое руководство, переписанное ученым писцом Ахмесом^{**)}.

Геометрические сведения излагаются в этой рукописи на ряде задач с численными данными, носящими, следовательно, совершенно частный характер; какие-либо объяснения или доказательства правильности решения совершенно отсутствуют: ученик должен усвоить правило, переданное предками, и благоговейно склониться перед их мудростью.

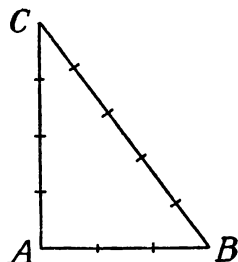
После сказанного выше мы не удивимся, что главный интерес сосредоточен на измерении различных фигур. Прежде всего мы встречаемся с совершенно правильным предписанием для вычисления площади квадрата: в одной из задач говорится, что если сторона квадрата равна 10, то его площадь равна 100. Но уже с площадью равнобедренного треугольника дело обстоит несколько хуже; автор рассматривает треугольник с основанием $= 4$ и с боковыми сторонами $= 10$ и утверждает, что его площадь равна 20. Здесь он, очевидно, берет половину произведения основания на боковую сторону, тогда как нужно половину основания умножить на высоту, и в данном

*) Цитирую по книге: В. Ф. Каган. „Основания геометрии. Исторический очерк развития учения об основаниях геометрии. Одесса, 1907, стр. 1.

**) Читатель, интересующийся подробностями в историческом развитии геометрии, найдет их в классической 4-томной истории математики М. Cantor'a, а у нас — в сочинениях проф. Ващенко-Захарченко, Вобнынина и в переводных: Зутера, Кэджори и других.

случае правильный ответ будет $8\sqrt{6}$, что приблизительно равно 19,6. Таким образом результат не точен, но он может иногда вполне удовлетворить практическим потребностям; однако ошибка будет тем больше, чем меньше углы при основании равнобедренного треугольника.

Для вычисления площади круга автор дает следующее правило: надо от диаметра отнять $\frac{1}{9}$ часть его и остаток возвысить в квадрат. Такое правило сводится к тому, что



Черт. 1.

дробь $\frac{356}{81}$ или 3,16 (приблизненно), тогда как с точностью до 2 десятичных знаков π равно 3,14 и оно не может быть точно выражено отношением целых чисел. Мы снова видим, что утверждение Ахмеса не совсем точно; однако оно во многих случаях может вполне удовлетворить землемера или инженера. По поводу измерения площадей интересно упомянуть об одном приеме, который

применялся в древности, в том числе и у нас на Руси; именно, землемерами принималось, что две площади будут равными, если равны длины ограничивающих их линий. Утверждение явно неверное; однако в известных пределах, при определенной форме измеряемых площадей, оно может повести к результатам, имеющим практическую ценность.

Возвращаясь к египетской геометрии, отметим интересный способ, с помощью которого они строили перпендикуляры. Проведение прямой, образующей с данной прямой угол в 90° („прямой“ угол), бывает часто необходимо при землемерных и инженерных работах; для решения этой задачи египтяне пользовались одним известным

им частным случаем знаменитой теоремы Пифагора. Если взять прямоугольный $\triangle ABC$ (черт. 1, где при вершине A имеется прямой угол), то сумма квадратов катетов равна квадрату гипотенузы:

$$(AB)^2 + (AC)^2 = (BC)^2;$$

в этом и заключается теорема Пифагора, выражающая существенное свойство прямоугольного треугольника. Существуют далее треугольники, у которых стороны измеряются целыми числами, удовлетворяющими указанному выше соотношению; египтяне знали один из простейших случаев, а именно — треугольник со сторонами, равными 3, 4, 5. Так как мы действительно имеем:

$$3^2 + 4^2 = 5^2,$$

то такой треугольник будет иметь прямой угол, противолежащий наибольшей стороне. Если сделать такой треугольник (черт. 1) из какого-либо материала, то можно им пользоваться для построения перпендикуляров; можно также взять веревку длиной в 12 единиц длины и натягивать ее соответствующим образом.

Далее, в рукописи Ахмеса мы находим несколько задач на вычисление соотношений между элементами пирамид, причем обнаруживается, что египтяне умели определять угол прямоугольного треугольника по отношению катетов; в этом можно видеть первый намек на тригонометрию. Интересно также отметить, что египетские художники, желая изобразить что-либо в уменьшенном размере, применяли деление площади на равные маленькие квадраты и пользовались ими, как опорой, при своих построениях. Отсюда явствует, что египтяне имели представление о подобии фигур, а последний прием является

как бы отдаленным предчувствием метода координат — гениального изобретения Декарта*).

Таким образом мы убеждаемся, что познания египтян в области геометрии не были совсем уже ничтожными. О том же свидетельствуют их памятники: народ, построивший храмы, развалины которых напоминают города, исполинские статуи и пирамиды, должен был обладать известным запасом геометрических знаний. Но в руках египтян геометрия — еще не математическая дисциплина, а скорее расширенное „землемерие“; это — не сложившаяся наука, а зародыш ее, переживающий стадию предварительного накопления фактов. Действительно, на ряду с утверждениями безусловно правильными, встречаем другие, имеющие лишь приближенный характер; между тем никакого различия между ними не делается. Далее, автору рукописи совершенно не приходит в голову оторвать свои правила от частных численных примеров и высказать их в общем виде; точно так же он не чувствует потребности в строгих доказательствах: авторитет учителя и практическая применимость этих правил вполне его удовлетворяют. Наконец, нет и не может быть речи ни о какой систематизации отдельных предписаний, выраженных в совершенно частной форме. Таким образом в египетской геометрии отсутствуют все черты, создающие истинную науку.

Но если в древнем Египте мы имеем дело только с „подготовительным“ или с „пропедевтическим“ курсом геометрии (если будет позволено применить термин современной методики), то этот предварительный период был изжит египетскими мудрецами до конца. Они накопили такое количество знаний, что умы, более способные к обобщениям и отвлечениям, могли уже положить их в основу

*) См. главу III.

более научных построений. Однако египтяне в течение тысячелетий не смогли подняться на эту высшую ступень; их практический ум тянул к непосредственной пользе, и в преддверии настоящей науки они должны были уступить место другому великому народу.

II. Создание науки.

Примерно за 6 столетий до начала нашей эры первые геометрические сведения были перенесены из Египта в Грецию; древние авторы связывают этот перенос с именем Фалеса, основателя известной философской школы. Рассказывают, что во время своего путешествия в Египет он усвоил жреческую мудрость и даже превзошел своих учителей, измерив высоты пирамид по их тени*). О работах Фалеса мы знаем, конечно, очень мало; но Прокл утверждает, что он доказал следующие теоремы:

- а) вертикальные углы равны;
- б) углы при основании равнобедренного треугольника равны между собой;
- в) диаметр делит круг пополам, и другие.

О доказательствах этих теорем мы ничего не знаем; неизвестно даже, дал ли Фалес нечто подобное доказательству. Тем не менее нетрудно уже здесь подметить значительный шаг вперед по сравнению с руководством Ахмеса. Это новое заключается в самой формулировке геометрических предложений: они оторваны от непосредственных практических приложений, не имеют прямой

*) Сделать это Фалес мог, напр., так: выждать то время дня, когда длина тени человека равна его росту, и измерить длину тени, отбрасываемой пирамидой. Пользуясь свойствами подобных треугольников, можно было достигнуть той же цели в любое время дня.

связи с „землемерием“ и высказаны в совершенно общем виде.

Полстолетия спустя в Греции жил и учил, окруженный легендами, знаменитый математик и философ Пифагор; о нем тоже передают, что курс учения был пройден им в Египте. В школе Пифагора был значительно расширен материал нашей науки; достаточно будет вспомнить о теореме, носящей его имя, и упомянуть о двух открытиях: вычисление суммы углов треугольника и знакомство с „космическими телами“, т.-е. с пятью правильными многогранниками. Прокл говорит даже о том, что Пифагор преобразовал геометрию в смысле ее строгологической обработки; но более определенных указаний на этот счет мы не имеем.

В противоположность своим египетским учителям, Фалес и Пифагор не были заинтересованы в непосредственных приложениях своих открытий. Принося, по преданию, богам гекатомбу в благодарность за открытие своей знаменитой теоремы, Пифагор был полон энтузиазма к чистому знанию и не спрашивал, к чему это может послужить на практике. Такая постановка вопроса, которой осталась верна греческая наука, повела к удивительным последствиям: в течение нескольких столетий греки неизмеримо опередили своих учителей-египтян, занимавшихся геометрией в продолжение тысячелетий. Впоследствии греческие ученые применили свои теоретические достижения к практическим нуждам и сразу достигли замечательных результатов; достаточно упомянуть об их успехах в геодезии и в астрономии, а также об открытиях Архимеда. Но в общем греческих ученых можно упрекнуть в другой крайности, а именно — в полном пренебрежении к тому, что касалось интересов повседневной жизни.

Пополнение геометрических знаний шло рука об руку

о постепенной научной обработкой их. Характерной чертой эллинского ума была способность и любовь к отвлеченному мышлению; вспомним создание знаменитых философских систем у Платона и Аристотеля. С другой стороны, памятники этого народа свидетельствуют о глубоких эстетических потребностях, пронизавших всю его жизнь. Поэтому геометрия должна была особенно прийтись по душе древнему греку и оказаться в числе его наиболее характерных творений: здесь отвлеченные построения мысли воплощались в наглядные картины наиболее совершенным образом; симметричные формы шара и правильных многогранников удовлетворяли эстетическому чувству, свидетельствуя в то же время о мощности создавшей их мысли. Не удивительно, что в те времена изучение геометрии считалось необходимой предпосылкой всякой высшей мыслительной деятельности; известно, что Платон на дверях начертал надпись, запрещающую переступать порог Академии всем тем, кто был чужд геометрии.

После изложенного не покажется удивительным, что в течение 3 столетий была завершена переработка геометрических сведений в строго-научную систему; результатом подобных исследований явились „Начала“ Евклида (300 л. до Р. Хр.), которым было уготовано совершенно исключительное место в истории человеческого знания: в течение двух тысячелетий с лишком эта книга считалась непревзойденным никем изложением геометрии, и на изучении ее формировались умы целого ряда выдающихся математиков*). Надо помнить, что „Начала“ Евклида вовсе не заключали в себе полного собрания геометриче-

*) На русском языке имеются переводы „Начал“; последним по времени является перевод проф. Ващенко-Захарченко, снабженный примечаниями и дополнениями. Вообще же лучшим в настоящее время считается издание Heiberg'a.

ских знаний его времени; это было систематическое изложение элементарной геометрии, а на ряду с последней существовала высшая, которой принадлежат труды Архимеда и Аполлония и которая занималась вопросами, разрабатываемыми (правда, иными методами) и теперь в высшей школе. „Начала“ заключали 13 книг, и общее представление о их содержании и даже о способе изложения читатель может составить по своим воспоминаниям о курсе геометрии в средней школе; впрочем, имеется одно существенное отличие, о котором скажем несколько ниже.

Итак, по мысли Платона, изучение элементарной геометрии должно быть не только первой ступенью при занятиях математикой, но и введением в философию. Поэтому автор „Начал“ должен был обратить особенное внимание на те стороны своего изложения, которые обеспечили ему славу строгой научности. Для того, чтобы оценить сделанное Евклидом в геометрии, отдадим себе отчет в том методе, по которому должна строиться эта наука.

Как мы знаем, геометрия относится к умозрительным наукам; это значит, что ее предложения доказываются с помощью цепи умозаключений, без всякой ссылки на опыт; такая ссылка на опыт показала бы, что данное лицо или данный народ переживают еще предварительную стадию накопления фактов. Приглядываясь к доказательству любой теоремы, можно сейчас же подметить, что точкой опоры служат предложения, доказанные раньше: сочетая их по законам, которые изучаются в логике, мы обнаруживаем в конце концов истинность рассматриваемого утверждения. Если далее мы перейдем к тем предложениям, которые послужили сейчас точкой опоры, то убедимся, что они точно так же основываются на предложениях, доказанных еще раньше, и т. д. Продолжая эти