Ю. Петерсен

Методы и теории для решения геометрических задач на построение

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 51
ББК 22.1
Ю11

Ю. Петерсен
Ю11 Методы и теории для решения геометрических задач на построение / Ю. Петерсен – М.: Книга по Требованию, 2023. – 124 с.

ISBN 978-5-458-27233-9

Данная книга - настоящий раритет. Несмотря на время выхода, книга читается довольно легко и содержит весьма ценные идеи и методы. Думаю тот, кто действительно увлекается задачами на построение, обязан ознакомиться с данной работой. Из авторского предисловия: Настоящая книга есть опыт научить учащихся, как следует приниматься за решение задач на построение. Она составилась таким образом, что, решив большое число задач, из которых многие оригинальные, я старался найти идею решения и анализировать ход мыслей, ведущих к этой идее, чтобы таким образом придти к более или менее общим методам. Отсюда следует, что я не всегда мог пользоваться решениями других авторов, так как только в редких случаях можно усмотреть в них путь, которым авторы дошли до своих решений. Т.к. моя цель дать методы, то я ограничился только указаниями решений, предоставляя их полное развитие и исследование читателю или преподавателю.

ISBN 978-5-458-27233-9

неточности послѣдняго заставили насъ свѣрить нашъ переводъ еще и съ двумя англійскими (лондонскаго и нью-іоркскаго изданія). Это знакомство съ нѣсколькими переводами одного и того же сочиненія, въ особенности съ нѣмецкимъ его переводомъ, въ которомъ авторъ принималъ личное участіе, позволило намъ, надѣемся, сохранить какъ характеръ изложенія г. Петерсена, такъ и особенности его сжатаго языка. Сдѣланныя нами немногія примѣчанія, смѣемъ думать, не окажутся лишними.

Такъ какъ ученіе о радикальной оси въ нашихъ школахъ не излагается, между тѣмъ, безъ знанія этой статьи, рѣшенія многихъ задачъ въ книгѣ г. Петерсена покажутся непонятными, то мы, по совѣту опытныхъ педагоговъ, приложили къ переводу нашу статью о радикальной оси, напечатанную во II томѣ «Журнала элементарной математики» профессора Ермакова.

Ѳ. Крутиковъ.

Г. Петрозаводскъ.
15 мая 1892 г.

Предисловіе автора.

За нѣсколько вѣковъ до Рождества Христова геометрія стояла уже на высокой степени развитія. А такъ какъ въ то время алгебра не достигла еще той высоты, которая дала ей впослѣдствіи возможность оказать геометріи столь существенныя услуги, то древніе математики должны были ограничиваться въ своихъ изысканіяхъ чисто геометрическими методами; естественно поэтому, что рѣшенія геометрическихъ задачъ на построеніе должны были играть въ ихъ твореніяхъ значительную роль. И хотя позднѣйшіе математики, вплоть до нашего времени, не переставали интересоваться этою отраслью знанія, тѣмъ не менѣе развитіе средствъ для рѣшенія сюда относящихся задачъ было незначительное. Такъ, напримѣръ, Аполлоній могъ бы рѣшить задачу Мальфатти такъ же хорошо, какъ и Штейнеръ, если бы она была ему извѣстна.

Поэтому многіе смотрятъ на рѣшенія геометрическихъ задачъ на построеніе какъ на нѣкотораго рода загадки, справиться съ которыми удается только единичнымъ, отъ природы особенно одареннымъ, лицамъ. Вслѣдствіе такого взгляда геометрическія задачи на построеніе вошли только отчасти въ систему школьнаго преподаванія, тогда какъ именно въ школахъ и должно быть ихъ настоящее мѣсто, ибо ни однѣ задачи не содѣйствуютъ такъ развитію въ ученикахъ наблюдательности и правильности мышленія, представляя въ то же время для нихъ и наибольшую привлекательность, какъ геом. на построеніе.

Настоящая книга есть опытъ научить учащихся, какъ слѣдуетъ приниматься за рѣшеніе задачъ на построеніе. Она составилась такимъ образомъ, что, рѣшивъ большое число задачъ, изъ которыхъ многія оригинальны, бóльшая же часть взята изъ многочисленныхъ сборниковъ, я старался найти идею рѣшенія и анализировать ходъ мыслей, ведущихъ къ этой идеѣ, чтобы такимъ образомъ прійти къ болѣе или менѣе общимъ методамъ. Отсюда слѣдуетъ, что я не всегда могъ пользоваться рѣшеніями другихъ авторовъ, такъ какъ только въ рѣдкихъ случаяхъ можно усмотрѣть въ нихъ путь, которымъ авторы дошли до своихъ рѣшеній. Впрочемъ само собою разумѣется, что нѣкоторыя изъ моихъ рѣшеній, въ особенности болѣе простыхъ задачъ, часто совпадаютъ съ рѣшеніями другихъ авторовъ. Весьма возможно также, что рѣшенія нѣкоторыхъ задачъ другихъ авторовъ покажутся легче моихъ рѣшеній; на это я долженъ замѣтить, что я всегда предпочиталъ рѣшеніе, идея котораго проще и яснѣе, всякому другому, имѣющему къ тому же зачастую характеръ счастливой случайности, предпочиталъ даже и тогда, когда практическое выполненіе послѣднихъ было можетъ быть и легче.

Такъ какъ моя цѣль дать *методы*, то я ограничился только указаніями рѣшеній, предоставляя ихъ полное развитіе и изслѣдованіе читателю или преподавателю. Въ книгѣ помѣщено немного чертежей, такъ какъ всякая фигура легче усвоивается и становится яснѣе, когда учащійся видитъ процессъ ея возникновенія. И вообще я желалъ бы, чтобы моя книга была не только *прочитана*, но и самостоятельно *изучена*.

Мои «Методы и теоріи» появились въ первый разъ въ 1866 г. на датскомъ языкѣ; съ тѣхъ поръ книга моя подверглась всестороннему испытанію и, смѣю думать, вполнѣ его выдержала. Есть не мало доказательствъ, что мой трудъ имѣлъ значительное вліяніе на изученіе геометріи не только въ Даніи, но и въ обоихъ скандинавскихъ государствахъ. Въ виду этого я и рѣшаюсь предложить его вниманію бо́льшаго круга читателей*), надѣясь, что онъ и тамъ окажется полезнымъ частью какъ подспорье при преподаваніи элементарной геометріи, частью какъ средство подготовленія къ изученію новѣйшей геометріи.

Юліусъ Петерсенъ.

Копенгагенъ 1879.

---

*) Это предисловіе написано авторомъ для нѣмецкаго перевода «Методовъ и теорій», сдѣланнаго R Fischer-Benzon'омъ при участіи автора.

Примѣч. переводчика.

ОПЕЧАТКИ.

Стран.:	*Строка:*	*Напечатано:*	*Должно быть:*
17	21 сверху, въ задачѣ № 73	$AD=DC$	$AD=AC$
18	16 снизу, въ задачѣ № 87	$\angle BBC=\frac{1}{2}(B-C)$	$\angle DBC=\frac{1}{2}(B-C)$
66	1 сверху	O_1	O
81	8 сверху, два раза напечатано центръ вмѣсто центры		
—	23 сверху	d	b

ВВЕДЕНІЕ.

Геометрическія предложенія представляются подъ двумя различными формами: съ одной стороны они выражаютъ, что нѣкоторая геометрическая фигура, построенная извѣстнымъ, напередъ заданнымъ образомъ, должна удовлетворять извѣстнымъ условіямъ; съ другой стороны они требуютъ, чтобы фигура была начерчена (построена) такъ, чтобы она удовлетворяла извѣстнымъ даннымъ условіямъ. Въ первомъ случаѣ мы имѣемъ *теорему,* во второмъ — *задачу на построеніе.* Такъ какъ задачи на построеніе рѣшаются графически, т.-е. чертежомъ, то для выполненія рѣшеній необходимо прибѣгать къ нѣкоторымъ чертежнымъ инструментамъ; обыкновенно употребляются: линейка — для проведенія прямой между двумя данными точками, и циркуль, служащій для проведенія круга изъ даннаго центра и даннымъ радіусомъ. Всякое другое рѣшеніе будетъ составнымъ изъ этихъ двухъ основныхъ операцій.

Вслѣдствіе такого ограниченія оказывается, что многія, повидимому даже простыя, задачи для насъ нерѣшимы (трисекція угла, квадратура круга и проч.); можно доказать вообще, что послѣднее обстоятельство встрѣчается въ задачахъ, рѣшенія которыхъ путемъ вычисленій не могутъ быть приведены къ уравненіямъ первой и второй степени.

Геометрическая задача бываетъ *излишне опредѣленною,* когда для искомой фигуры имѣется большее число условій, чѣмъ необходимо для ея опредѣленія; задача бываетъ *опредѣленною,* когда она имѣетъ конечное число рѣшеній, и *неопредѣленною,* когда число рѣшеній ея безконечно велико.

Для рѣшенія опредѣленной задачи требуется:

произвести построеніе,

доказать его правильность,

изслѣдовать его, т.-е. опредѣлить предѣлы, между которыми должны находиться данныя величины задачи, чтобы она допускала 0, 1, 2 и т. д. рѣшеній.

ВВЕДЕНІЕ.

Геометрическія предложенія представляются подъ двумя различными формами: съ одной стороны они выражаютъ, что нѣкоторая геометрическая фигура, построенная извѣстнымъ, напередъ заданнымъ образомъ, должна удовлетворять извѣстнымъ условіямъ; съ другой стороны они требуютъ, чтобы фигура была начерчена (построена) такъ, чтобы она удовлетворяла извѣстнымъ даннымъ условіямъ. Въ первомъ случаѣ мы имѣемъ *теорему*, во второмъ — *задачу на построеніе*. Такъ какъ задачи на построеніе рѣшаются графически, т.-е. чертежомъ, то для выполненія рѣшеній необходимо прибѣгать къ нѣкоторымъ чертежнымъ инструментамъ; обыкновенно употребляются: линейка — для проведенія прямой между двумя данными точками, и циркуль, служащій для проведенія круга изъ даннаго центра и даннымъ радіусомъ. Всякое другое рѣшеніе будетъ составнымъ изъ этихъ двухъ основныхъ операцій.

Вслѣдствіе такого ограниченія оказывается, что многія, повидимому даже простыя, задачи для насъ нерѣшимы (трисекція угла, квадратура круга и проч.); можно доказать вообще, что послѣднее обстоятельство встрѣчается въ задачахъ, рѣшенія которыхъ путемъ вычисленій не могутъ быть приведены къ уравненіямъ первой и второй степени.

Геометрическая задача бываетъ *излишне опредѣленною*, когда для искомой фигуры имѣется большее число условій, чѣмъ необходимо для ея опредѣленія; задача бываетъ *опредѣленною*, когда она имѣетъ конечное число рѣшеній, и *неопредѣленною*, когда число рѣшеній ея безконечно велико.

Для рѣшенія опредѣленной задачи требуется:

произвести построеніе,

доказать его правильность,

изслѣдовать его, т.-е. опредѣлить предѣлы, между которыми должны находиться данныя величины задачи, чтобы она допускала 0, 1, 2 и т. д. рѣшеній.

Изъ числа неопредѣленныхъ задачъ особый интересъ представляютъ тѣ, которыя обращаются въ опредѣленныя отъ присоединенія *одного* лишь добавочнаго условія. Хотя неопредѣленная задача и имѣетъ безчисленное множество рѣшеній, однакожъ не всякая фигура можетъ ей удовлетворить; напротивъ того, всѣ ея рѣшенія группируются извѣстнымъ образомъ, обусловливаемымъ данными задачи. Такъ, точка вполнѣ опредѣлена, когда она должна удовлетворять двумъ даннымъ условіямъ; если же дано только одно изъ нихъ, то точка дѣлается неопредѣленною, но всѣ точки, удовлетворяющія этому одному условію, лежатъ на одной прямой или кривой. Такая прямая или кривая линія называется *геометрическимъ мѣстомъ* точекъ, удовлетворяющимъ данному условію. То же самое относится и къ какой-нибудь фигурѣ, для опредѣленія которой недостаетъ одного условія, ибо, говоря вообще, всякая точка такой фигуры не будетъ опредѣленною, такъ что каждая изъ нихъ будетъ имѣть свое геометрическое мѣсто.

Вполнѣ общій способъ для рѣшенія геометрическихъ задачъ даетъ аналитическая геометрія; но, само собою разумѣется, примѣненіе какого-нибудь одного метода къ разнообразнѣйшимъ задачамъ требуетъ весьма часто и окольныхъ путей. Такъ, въ аналитической геометріи разсматриваются разстоянія точки отъ двухъ осей, между тѣмъ какъ самыя оси зачастую не имѣютъ никакого отношенія къ задачѣ. Сверхъ того, при примѣненіи этого метода, приходится часто ограничиваться однимъ механическимъ вычисленіемъ, такъ какъ не всегда бываетъ возможно прослѣдить за геометрическимъ значеніемъ полученныхъ уравненій; къ тому же послѣднія становятся иногда до того сложными, — и въ этомъ заключается, можетъ быть, главный упрекъ, который можно сдѣлать этому методу, — что рѣшеніе ихъ дѣлается практически невозможнымъ. Вслѣдствіе такихъ трудностей, представляемыхъ прямымъ примѣненіемъ Декартовой геометріи, въ послѣднее время было дано множество спеціальныхъ методовъ (помощью различныхъ системъ координатъ и проч.), дающихъ для отдѣльныхъ задачъ болѣе естественныя и изящныя рѣшенія, но трудности при этомъ не уничтожаются, а переносятся на выборъ метода. Такимъ образомъ образовался переходъ отъ алгебраическихъ пріемовъ къ пріемамъ чисто геометрическимъ. Помощью послѣднихъ стараются рѣшить задачу тѣмъ, что путемъ геометрическимъ изслѣдуютъ тѣ связи и соотношенія, которыя существуютъ между данными и искомыми частями фигуры; для облегченія же этого изслѣдованія начинаютъ обыкновенно съ того, что *вычерчиваютъ фигуру*, представляющую искомое рѣшеніе, а затѣмъ остается изслѣдовать ее помощью извѣстныхъ теоремъ геометріи.

Если при этомъ окажется (что бываетъ обыкновенно во множествѣ болѣе простыхъ задачъ), что все рѣшеніе зависитъ отъ отысканія одной только неизвѣстной точки, то самый методъ рѣшенія вытекаетъ непосредственно изъ сказаннаго выше и можетъ быть формулированъ такъ:

Разсматриваютъ каждое изъ двухъ условій, которымъ должна удовлетворять искомая точка, отдѣльно; каждому изъ условій соотвѣтствуетъ тогда свое геометрическое мѣсто, и если послѣднія суть прямыя или круги, то задача рѣшена, ибо, такъ какъ искомая точка должна одновременно принадлежать тому и другому геометрическому мѣсту, она должна быть въ точкѣ ихъ пересѣченія.

Если найденныя геометрическія мѣста суть двѣ прямыя, то задача имѣетъ одно рѣшеніе; она можетъ сдѣлаться невозможною только тогда, когда прямыя параллельны. Если же геометрическія мѣста представляютъ два круга или кругъ и прямую, то задача имѣетъ два рѣшенія, когда геометрическія мѣста пересѣкаются, одно — когда они касаются, и становится невозможною, когда одно изъ геометрическихъ мѣстъ находится внѣ другого (т.-е. когда они не пересѣкаются и не касаются). Слѣдуетъ замѣтить, что между послѣднимъ случаемъ невозможности и вышеупомянутымъ существуетъ качественное различіе, а именно: въ первомъ случаѣ невозможность обусловливается предѣльнымъ положеніемъ точки пересѣченія геометрическихъ мѣстъ (параллельныхъ прямыхъ), во второмъ-же — точка пересѣченія вовсе не существуетъ.

Когда геометрическія мѣста суть иныя кривыя, тогда они не могутъ быть непосредственно употреблены для построеній; въ такихъ случаяхъ слѣдуетъ разсматривать задачу съ другихъ сторонъ, съ цѣлью отыскать другіе пріемы рѣшенія. Надо однакожъ замѣтить, что если точка опредѣляется прямою и коническимъ сѣченіемъ, то построеніе ея можетъ быть произведено помощью прямой и круга, тогда какъ построеніе точки не можетъ быть сдѣлано (условленными нами средствами), когда она опредѣляется двумя, независимыми другъ отъ друга, коническими сѣченіями.

Пріемъ, указанный нами для рѣшенія простѣйшихъ задачъ, можетъ быть распространенъ и на болѣе сложныя; тогда должно слѣдовать такому правилу:

Разсматриваютъ одно изъ условій, данныхъ для опредѣленія искомой фигуры, какъ не существующее и отыскиваютъ затѣмъ геометрическія мѣста для точекъ теперь уже неопредѣленной фигуры.

Изъ вышеизложеннаго легко усмотрѣть, какъ важно знаніе многихъ геометрическихъ мѣстъ въ томъ случаѣ, когда они суть прямыя или круги. Поэтому въ первой главѣ мы помѣстили важнѣйшія изъ геометрическихъ мѣстъ вмѣстѣ съ подробнымъ изслѣдованіемъ вышеприведенныхъ главнѣйшихъ правилъ.

Когда же непосредственное примѣненіе геометрическихъ мѣстъ невозможно, тогда слѣдуетъ руководствоваться слѣдующимъ главнымъ правиломъ:

Начерченную фигуру преобразовываютъ въ другую, въ которой связь между данными частями и искомыми была бы проще и удобнѣе для построенія. Подробности этого правила будутъ изложены во второй главѣ.

Для краткости, въ послѣдующемъ, будемъ обозначать треугольникъ чрезъ ABC, длины его сторонъ буквами a, b и c; высоту его, соотвѣтствующую сторонѣ a, обозначимъ чрезъ h_a, соотвѣтствующую той же сторонѣ медіану — чрезъ m_a; длину прямой, дѣлящей $\angle A$ пополамъ, — чрезъ w_a. Буква r будетъ означать радіусъ описаннаго около треугольника круга, ρ — радіусъ вписаннаго въ немъ круга; ρ_a, ρ_b и ρ_c — радіусы внѣвписанныхъ круговъ (кругъ радіуса ρ_a касается стороны a и продолженій сторонъ b и c). Когда будемъ говорить о четыреугольникѣ $ABCD$, то вершины его слѣдуетъ представить себѣ въ томъ порядкѣ, въ какомъ онѣ здѣсь написаны; наконецъ $\angle(a, b)$ будетъ означать уголъ, образуемый прямыми a и b.