

**Н.В. Ефимов**

# **Краткий курс аналитической геометрии**

**Москва  
«Книга по Требованию»**

УДК 51  
ББК 22.1  
Н11

Н11 **Н.В. Ефимов**  
Краткий курс аналитической геометрии / Н.В. Ефимов – М.: Книга по Требо-  
ванию, 2013. – 264 с.

**ISBN 978-5-458-25977-4**

В книге оставлены лишь те вопросы, которые соответствуют основным разделам программы по математике для высших технических учебных заведений в части аналитической геометрии и теории определителей.

**ISBN 978-5-458-25977-4**

© Издание на русском языке, оформление  
«YOYO Media», 2013

© Издание на русском языке, оцифровка,  
«Книга по Требованию», 2013

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.



Серия Книжный Ренессанс

[www.samizday.ru/reprint](http://www.samizday.ru/reprint)



средственно следует из определения величины отрезка оси; см. п° 2).

Представим себе, что прямая  $a$  расположена перед нами горизонтально и положительно направлена в правую сторону. Тогда расположение точек прямой  $a$ , в зависимости от знака их координат, может быть описано следующим образом; точки, имеющие положительные координаты, лежат справа от начала координат  $O$ , а точки, имеющие отрицательные координаты, — слева от начала координат  $O$ .

Координату произвольной точки обычно обозначают буквой  $x$ . В тех случаях, когда рассматривается несколько точек, их часто обозначают одной буквой с разными номерами, например,  $M_1, M_2, \dots, M_n$ ; координаты этих точек тогда также обозначают одной буквой с соответствующими номерами  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

Желая кратко указать, что данная точка имеет данную координату, записывают эту координату в круглых скобках рядом с обозначением самой точки, например:  $M_1(x_1), M_2(x_2), \dots, M_n(x_n)$ .

5. Здесь мы докажем две простые, но важные теоремы. Они относятся к оси, на которой введена координатная система.

**Теорема 1.** *Каковы бы ни были две точки оси  $M_1(x_1)$  и  $M_2(x_2)$ , всегда имеет место равенство*

$$M_1M_2 = x_2 - x_1. \quad (1)$$

**Доказательство.** Вследствие основного тождества (п° 3)

$$OM_1 + M_1M_2 = OM_2,$$

откуда

$$M_1M_2 = OM_2 - OM_1.$$

Но  $OM_2 = x_2$ ,  $OM_1 = x_1$ , следовательно,

$$M_1M_2 = x_2 - x_1,$$

что и требовалось доказать.

Сущность этой теоремы можно высказать такими словами: *чтобы получить величину отрезка оси, нужно от координаты его конца отнять координату начала.* (См. рис. 3 и 4; в случае рис. 4 необходимо учесть, что координата  $x_1$  отрицательна.)

**Теорема 2.** Если  $M_1(x_1)$  и  $M_2(x_2)$  — любые две точки оси и  $d$  — расстояние между ними, то

$$d = |x_2 - x_1|. \quad (2)$$

**Доказательство.** Согласно предыдущей теореме

$$M_1M_2 = x_2 - x_1;$$

но расстояние между точками  $M_1$ ,  $M_2$  есть модуль величины отрезка  $\overline{M_1M_2}$ , следовательно,

$$d = |x_2 - x_1|.$$

Теорема доказана.

**Замечание.** Так как числа  $x_2 - x_1$  и  $x_1 - x_2$  имеют общий модуль, то с равным правом можно писать  $d = |x_2 - x_1|$  и  $d = |x_1 - x_2|$ .

Приняв это во внимание, мы можем выразить смысл

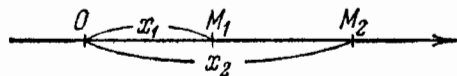


Рис. 3.

доказанной теоремы так: чтобы вычислить расстояние между двумя точками оси, нужно от координаты одной из них отнять координату другой и взять модуль полученной разности.

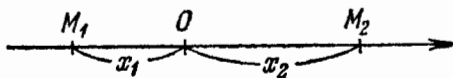


Рис. 4.

**Пример 1.** Даны точки  $A(5)$ ,  $B(-1)$ ,  $C(-8)$ ,  $D(2)$ ; найти величины отрезков  $\overline{AB}$ ,  $\overline{CD}$  и  $\overline{DB}$ .

**Решение.** На основании теоремы 1 имеем:

$$AB = -1 - 5 = -6,$$

$$CD = 2 - (-8) = 10,$$

$$DB = -1 - 2 = -3.$$

**Пример 2.** Найти расстояние между точками  $P(3)$  и  $Q(-2)$ .

**Решение.** На основании теоремы 2

$$d = |-2 - 3| = |-5| = 5.$$

**6.** Если на какой-нибудь оси введена координатная система, то каждая точка этой оси имеет одну вполне определенную координату. Обратно, какое бы мы ни взяли (вещественное) число  $x$ , на оси найдется одна вполне определенная точка  $M$  с данной координатой  $x$ .

Условимся говорить, что точка  $M$  изображает число  $x$ . Ось, на которой введены координаты по способу, описанному в п° 4, так что ее точки изображают все вещественные числа, называется *числовой осью*. На рис. 5 изображены числовая ось и несколько целых чисел.

Условившись изображать числа в виде точек числовой оси, мы тем самым делаем геометрически наглядным наше

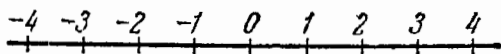


Рис. 5.

представление о всех числах в их совокупности. Вместе с тем мы получаем возможность формулировать в геометрических терминах арифметические соотношения. Например, все решения неравенств  $3 < x < 5$  можно наглядно представить себе в виде точек числовой оси, расположенных между двумя ее точками, из которых одна изображает число 3 (т. е. имеет координату, равную 3), другая — число 5 (т. е. имеет координату, равную 5). Это обстоятельство можно коротко выразить так: неравенства  $3 < x < 5$  определяют интервал (числовой оси), ограниченный точками 3 и 5.

Выражение арифметических соотношений геометрическими терминами оказалось весьма удобным и постоянно употребляется во всех разделах математики.

### § 3. Декартовы прямоугольные координаты на плоскости. Понятие о декартовых косоугольных координатах

7. Если указан способ, позволяющий устанавливать положение точек плоскости заданием чисел, то говорят, что на плоскости введена *система координат*. Мы рассмотрим сейчас простейшую и наиболее употребительную систему координат, которая называется *декартовой прямоугольной*.

*Декартова прямоугольная система координат определяется заданием линейной единицы для измерения длин и двух взаимно перпендикулярных осей, занумерованных в каком-нибудь порядке (т. е. указано, какая из них считается первой, а какая — второй). Точка пересечения осей называется началом координат, а сами оси — координатными осями,*

причем первую из них называют также *осью абсцисс*, а вторую — *осью ординат*.

Обозначим начало координат буквой  $O$ , ось абсцисс — буквами  $Ox$  и ось ординат — буквами  $Oy$ . На чертежах буквы  $x$  и  $y$  ставятся около соответственных осей в положительном направлении от точки  $O$  в том месте, где изображения осей обрываются; таким образом, само расположение букв  $O$  и  $x$  на чертеже указывает, куда направлена ось абсцисс, а расположение букв  $O$  и  $y$  — куда направлена ось ординат. Тем самым отпадает надобность указывать положительные направления осей стрелками, поэтому в дальнейшем на наших чертежах стрелки на координатных осях не ставятся.

Пусть  $M$  — произвольная точка плоскости. Спроектируем точку  $M$  на координатные оси, т. е. проведем через  $M$  перпендикуляры к прямым  $Ox$  и  $Oy$ ; основания этих перпендикуляров обозначим соответственно  $M_x$  и  $M_y$  (рис. 6).

Координатами точки  $M$  в данной системе называются числа

$$x = OM_x, \quad y = OM_y, \quad (1)$$

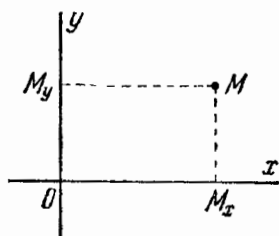


Рис. 6.

где  $OM_x$  означает величину отрезка  $OM_x$  оси абсцисс,  $OM_y$  — величину отрезка  $OM_y$  оси ординат. Число  $x$  называется первой координатой или абсциссой точки  $M$ , число  $y$  называется второй координатой или ординатой точки  $M$ . Желая кратко указать, что точка  $M$  имеет абсциссу  $x$  и ординату  $y$ , пользуются записью:  $M(x; y)$ . Если нам придется рассматривать несколько точек, то мы часто будем обозначать их одной буквой с разными номерами, например,  $M_1, M_2, \dots, M_n$ ; тогда координаты этих точек мы будем помечать соответствующими номерами и записывать рассматриваемые точки так:  $M_1(x_1; y_1), M_2(x_2; y_2), \dots, M_n(x_n; y_n)$ .

8. Если задана система декартовых прямоугольных координат, то каждая точка плоскости в этой системе имеет одну вполне определенную пару координат  $x, y$ . Обратно, каковы бы ни были два (вещественных) числа  $x, y$ , на плоскости найдется одна вполне определенная точка, абсцисса которой в данной системе есть  $x$ , а ордината есть  $y$ . Чтобы построить



точку по ее координатам  $x, y$ , нужно на оси абсцисс отложить от начала координат отрезок  $\overline{OM}_x$ , величина которого равна  $x$ , а на оси ординат — отрезок  $\overline{OM}_y$ , величина которого равна  $y$  (направления, в которых следует откладывать эти отрезки, определяются знаками чисел  $x, y$ ); после этого, проводя через  $M_x$  прямую, параллельную оси  $Oy$ , и через  $M_y$  — прямую, параллельную оси  $Ox$ , мы найдем искомую точку  $M$  как точку пересечения проведенных прямых.

9. В п° 4 мы объяснили, как вводится система координат на прямой. Введем теперь на каждой из координатных осей  $Ox$  и  $Oy$  систему координат, сохранив данную нам линейную единицу и данные направления осей  $Ox$  и  $Oy$ , а в качестве начала координат на каждой оси выбрав точку  $O$ .

Рассмотрим произвольную точку  $M$  и ее проекцию  $M_x$  на ось  $Ox$ .

Точка  $M_x$  имеет на оси  $Ox$  координату, равную величине отрезка  $\overline{OM}_x$ ; эта же величина названа нами (в п° 7) абсциссой точки  $M$ . Отсюда можно заключить: *абсцисса точки  $M$  равна координате точки  $M_x$  на оси  $Ox$* . Аналогично: *ордината точки  $M$  равна координате точки  $M_y$  на оси  $Oy$* . Эти предложения при всей их очевидности являются для нас весьма важными. Именно, они дают право при рассмотрении точек на плоскости применять теоремы 1 и 2 (п° 5), выражающие известные свойства координатной системы на прямой.

10. Чтобы удобнее формулировать последующие факты, мы условимся сейчас насчет некоторых терминов.

Ось  $Oy$  разделяет всю плоскость на две полуплоскости; ту из них, которая расположена в положительном направлении оси  $Ox$ , мы назовем *правой*, другую — *левой*.

Точно так же ось  $Ox$  разделяет плоскость на две полуплоскости; ту из них, которая расположена в положительном направлении оси  $Oy$ , мы будем называть *верхней*, другую — *нижней* \*).

11. Пусть  $M$  — произвольная точка правой полуплоскости; тогда отрезок  $\overline{OM}_x$  имеет на оси  $Ox$  положительное направление, и, следовательно, абсцисса  $x = OM_x$  точки  $M$

---

\*) Такие названия оправдываются тем, что на чертежах координатные оси обычно располагаются так, чтобы при рассмотрении их ось  $Ox$  была видна направленной вправо, а ось  $Oy$  — вверх.

положительна. Если же  $M$  находится в левой полуплоскости, то отрезок  $\overline{OM}_x$  имеет на оси  $Ox$  отрицательное направление, и число  $x = OM_x$  отрицательно. Наконец, в том случае, когда точка  $M$  лежит на оси  $Oy$ , ее проекция  $M_x$  на ось  $Ox$  совпадает с точкой  $O$  и  $x = OM_x$  есть нуль.

Таким образом, все точки правой полуплоскости имеют положительные абсциссы ( $x > 0$ ), все точки левой полуплоскости имеют отрицательные абсциссы ( $x < 0$ ); абсциссы точек, лежащих на оси  $Oy$ , равны нулю ( $x = 0$ ).

Аналогично рассуждая, установим, что все точки верхней полуплоскости имеют положительные ординаты ( $y > 0$ ), все точки нижней полуплоскости имеют отрицательные ординаты ( $y < 0$ ); ординаты точек, лежащих на оси  $Ox$ , равны нулю ( $y = 0$ ).

Заметим, что у начала координат  $O$ , как точки пересечения осей, обе координаты равны нулю:  $x = 0$ ,  $y = 0$ , и этим оно характеризуется (т. е. обе координаты равны нулю только для точки  $O$ ).

**12.** Две координатные оси вместе разделяют плоскость на четыре части; их называют *координатными четвертями* и

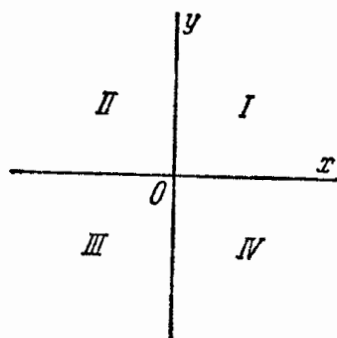


Рис. 7.

нумеруют по определенному правилу. Именно—первой координатной четвертью называется та, которая лежит одновременно в правой и верхней полуплоскостях, второй—лежащая в левой и в верхней полуплоскостях, третьей—лежащая в левой и в нижней полуплоскостях, наконец, четвертой четвертью называется та, которая лежит в правой и в нижней полуплоскостях. (Нумерация координатных четвертей показана на рис. 7.)

Пусть  $M$ —некоторая точка с координатами  $x$ ,  $y$ . Из предыдущего следует, что

если  $x > 0$ ,  $y > 0$ , то  $M$  лежит в первой четверти,  
 если  $x < 0$ ,  $y > 0$ , то  $M$  лежит во второй четверти,  
 если  $x < 0$ ,  $y < 0$ , то  $M$  лежит в третьей четверти,  
 если  $x > 0$ ,  $y < 0$ , то  $M$  лежит в четвертой четверти.

Рассмотрение координатных полуплоскостей и четвертей полезно тем, что помогает легко ориентироваться в расположении заданных точек по знакам их координат.

13. Мы познакомились с декартовой прямоугольной системой координат. Эта система наиболее употребительна. Однако в отдельных случаях, при рассмотрении специальных задач, могут оказаться более удобными и другие системы. Расскажем в немногих словах о декартовых координатах с любым углом между осями.

Такая система координат определяется заданием масштаба и двух осей  $Ox$ ,  $Oy$ , пересекающихся в точке  $O$  под любым углом (кроме  $0$  и  $180^\circ$ ). Пусть  $M$  — произвольная точка плоскости. Проведем через  $M$  прямые, параллельные осям  $Ox$ ,  $Oy$ , и обозначим точки их пересечения с этими осями соответственно через  $M_x$  и  $M_y$  (рис. 8).

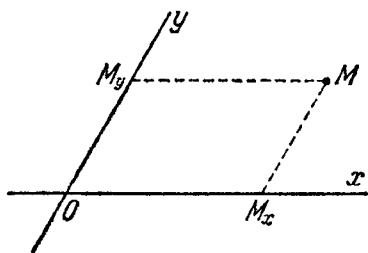


Рис. 8.

Координатами точки  $M$  в заданной системе называются числа

$$x = OM_x, \quad y = OM_y,$$

где  $OM_x$  означает величину отрезка  $\overline{OM_x}$  оси  $Ox$ , а  $OM_y$  — величину отрезка  $\overline{OM_y}$  оси  $Oy$ .

В том частном случае, когда угол между осями  $Ox$ ,  $Oy$  равен прямому, описанная сейчас система координат называется декартовой прямоугольной системой. Если же угол между осями  $Ox$ ,  $Oy$  не прямой, то эта система координат называется декартовой косоугольной. В нашей книге в дальнейшем декартовы косоугольные координаты не употребляются. Поэтому декартовы прямоугольные координаты мы будем часто называть просто декартовыми координатами.

#### § 4. Полярные координаты

14. Здесь мы опишем так называемую *полярную систему координат*; она весьма удобна и применяется довольно часто.

Полярная система координат определяется заданием некоторой точки  $O$ , называемой *полюсом*, исходящего из этой

точки луча  $OA$ , называемого *полярной осью*, и масштаба для измерения длин. Кроме того, при задании полярной системы должно быть сказано, какие повороты вокруг точки  $O$  считаются положительными. Обычно считают положительными те повороты, которые совершаются «против часовой стрелки».

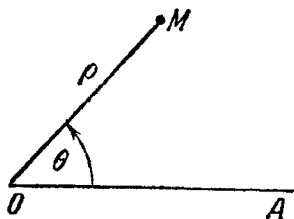


Рис. 9.

Пусть заданы полюс и полярная ось (рис. 9). Рассмотрим произвольную точку  $M$  и обозначим через  $\rho$  расстояние ее от точки  $O$  ( $\rho = |OM|$ ), через  $\theta$  — угол, на который нужно повернуть луч  $OA$  для совмещения его с лучом  $OM$  ( $\theta = \angle AOM$ ). Угол  $\theta$  мы будем понимать так, как это принято в тригонометрии (т. е. с учетом знака и с точностью до слагаемого вида  $\pm 2\pi$ ).

*Полярными координатами точки  $M$  (относительно заданной системы) называются числа  $\rho$  и  $\theta$ . При этом число  $\rho$  называется первой координатой, или полярным радиусом, число  $\theta$  — второй координатой, или полярным углом (полярный угол называют также амплитудой).*

**Замечание 1.** Среди возможных значений полярного угла точки  $M$  выделяют одно определенное, именно то, которое удовлетворяет неравенствам

$$-\pi < \theta \leq \pi;$$

его мы будем называть *главным*. Можно сказать, что в качестве главного значения полярного угла берется угол, на который нужно повернуть луч  $OA$  до совмещения с лучом  $OM$ , но делая при этом поворот не более, чем на  $180^\circ$  в ту или другую сторону. В частном случае, когда луч  $OM$  направлен строго противоположно лучу  $OA$ , возможными являются два поворота на  $180^\circ$ ; тогда выбирается положительный поворот, т. е. в качестве главного значения полярного угла принимается  $\theta = \pi$ .

**Замечание 2.** Если точка  $M$  совпадает с  $O$ , то  $\rho = |OM| = 0$ . Значит, первая координата полюса равна нулю. Вторая его координата, очевидно, не имеет определенного значения.

**15.** В некоторых случаях приходится одновременно пользоваться и декартовой и полярной системами. В таких слу-

чаях возникает задача: зная полярные координаты некоторой точки, вычислить ее декартовы координаты и, наоборот, зная ее декартовы координаты, вычислить полярные. Мы выведем сейчас формулы такого преобразования координат (формулы перехода от полярных координат к декартовым и обратно) в частном случае, когда полюс полярной системы совпадает с началом декартовых прямоугольных координат, а полярная ось совпадает с положительной полуосью абсцисс (рис. 10). Кроме того, при определении полярного угла будем считать положительными повороты в том направлении, в каком следует вращать положительную полуось  $Ox$ , чтобы кратчайшим путем совместить с положительной полуосью  $Oy$ .

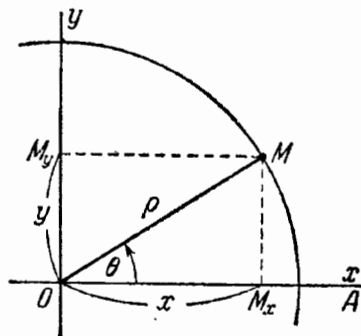


Рис. 10.

Пусть  $M$  — произвольная точка плоскости,  $(x; y)$  — ее декартовы координаты,  $(\rho; \theta)$  — полярные координаты. Опишем вокруг полюса  $O$  окружность радиуса  $\rho$  и будем рассматривать ее в качестве тригонометрической окружности, а ось  $Ox$  — в качестве начального диаметра. Опустим из точки  $M$  перпендикуляры на оси  $Ox$ ,  $Oy$ ; обозначим их основания соответственно через  $M_x$ ,  $M_y$  (см. рис. 10). Отрезок  $\overline{OM_x}$  является линией косинуса угла  $\theta$ ; следовательно,  $OM_x = |\overline{OM}| \cos \theta$ . Отрезок  $\overline{OM_y}$  является линией синуса угла  $\theta$ ; следовательно,  $OM_y = |\overline{OM}| \sin \theta$ . Но  $OM_x = x$ ,  $OM_y = y$ ,  $|\overline{OM}| = \rho$ ; таким образом, из предыдущих соотношений имеем:

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta. \quad (1)$$

Это и есть формулы, выражающие декартовы координаты через полярные. Выражения полярных координат через декартовы можно получить из этих же формул или непосредственно:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x}. \quad (2)$$

Заметим, однако, что формула  $\operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x}$  даже главное значение полярного угла определяет не вполне; именно, нужно еще знать, положительна величина  $\theta$  или отрицательна.

**Пример.** Даны декартовы прямоугольные координаты точки:  $(-2; 2)$ ; найти ее полярные координаты (считая, что полюс полярной системы совмещен с началом декартовой системы, а полярная ось совпадает с положительной полуосью абсцисс).

**Решение.** По формулам (2) имеем:

$$\rho = 2\sqrt{2}, \quad \operatorname{tg} \theta = -1.$$

Согласно второму из этих равенств  $\theta = \frac{3}{4}\pi$  или  $\theta = -\frac{1}{4}\pi$ . Так как данная точка лежит во второй четверти, то из двух указанных значений  $\theta$  мы должны в качестве главного выбрать первое. Итак,  $\rho = 2\sqrt{2}$ ,  $\theta = \frac{3}{4}\pi$ .