Д. Мордухай-Болтовской

Об интегрировании в конечном виде линейных дифференциальных уравнений

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 51
ББК 22.1
Д11

Д. Мордухай-Болтовской
Д11 Об интегрировании в конечном виде линейных дифференциальных уравнений / Д. Мордухай-Болтовской – М.: Книга по Требованию, 2021. – 390 с.

ISBN 978-5-458-26166-1

Монография выдающегося русского математика, посвящённая интегрированию дифференциальных уравнений.

ISBN 978-5-458-26166-1

II Глава Неосновныя рѣшенія.

ВВЕДЕНІЕ.

Въ настоящее время Теорія обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій сводится главнымъ образомъ къ аналитическому изслѣдованію функцій, опредѣляемыхъ этими уравненіями. Математиковъ преимущественно интересуетъ, для какихъ значеній перемѣннаго x функція y, опредѣляемая уравненіемъ

$$f(x, y, y' \dots y^{(n)}) = 0$$

при опредѣленныхъ начальныхъ значеніяхъ $y, y' \dots y^{(n)}$ представляетъ голоморфную функцію отъ x (Коши, Липшицъ, Бріо-Букэ), имѣетъ ли y особенныя точки и какія изъ этихъ точекъ зависятъ отъ произвольныхъ постоянныхъ и какія независимы (Фуксъ Пуанкарэ, Пенлевэ), каковы сходящіяся разложенія, опредѣляющія y около существенно особенныхъ точекъ (Фуксъ, Пуанкарэ, Пикаръ) и каковы ассимптотическія выраженія y около тѣхъ точекъ, для которыхъ является невозможнымъ изслѣдованіе y съ помощью сходящихся разложеній (Пуанкарэ, Горнъ, Ляпуновъ, Брайцевъ)?

Понятіе объ интегрированіи дифференціальнаго уравненія, подвергаясь извѣстнаго рода эволюціи, находится теперь въ стадіи, характеризуемой взглядомъ: „*проинтегрировать данное дифференціальное уравненіе это значитъ—изучить аналитическія свойства функціи опредѣляемой дифференціальнымъ уравненіемъ*"; мы прибавляемъ „аналитическія" для того, чтобы подчеркнуть, что здѣсь конечно, имѣются въ виду не всѣ свойства, а, именно, только тѣ, которыя служатъ предметомъ аналитической теоріи функціи. Свойство функціи, состоящее въ томъ, что ее можно выразить въ тригонометрическихъ функціяхъ, не принадлежитъ уже къ этой категоріи свойствъ и оно при этой формулировкѣ не имѣется, въ виду.

Приведенный выше взглядъ главнымъ образомъ въ виду требованій, предъявляемыхъ прикладными математическими науками дополняется слѣдующимъ образомъ: къ требованіямъ изученія аналитическихъ свойствъ присоединяется *требованіе возможности приближеннаго вычисленія у при данномъ х съ опредѣленіемъ степени точности,* задачи при соблюденіи полной математической строгости болѣе трудный, чѣмъ вышеупомянутая.

Подобное пониманіе интегрированія даже при этомъ дополненіи рѣзко отличается отъ того, которое имѣли математики въ прежніе годы до появленія знаменитыхъ трудовъ Фукса, которые безспорно главнымъ образомъ способствовали подобнаго рода эволюціи, хотя происхожденіе этихъ взглядовъ слѣдуетъ искать еще у Коши.

А, именно прежде интегрированіе понималось исключительно въ смыслѣ интегрированія въ конечномъ видѣ т. е. въ смыслѣ построенія интеграловъ дифференціальныхъ уравненій съ помощью извѣстныхъ намъ функцій или съ помощью квадратуръ.

Едвали можно согласиться съ крайностями современныхъ взглядовъ и совершенно отрѣшится отъ разсмотрѣнія тѣхъ задачъ, которыя являлись наиболѣе близкими сердцами прежнихъ математиковъ.

Аналитическія свойства не суть *всѣ* свойства функцій. Изученіе ихъ даетъ только *характеръ измѣненія функціи,* но не даетъ ея строенія. Каждая функція опредѣляется нѣкоторыми операціями, изученіе аналитическихъ свойствъ функціи даетъ характеръ, получаемыхъ при помощи этихъ операцій результатовъ, но ничего не даетъ относительно самыхъ этихъ операцій, остается неизвѣстнымъ, сводятся ли онѣ къ другимъ болѣе простымъ, намъ уже извѣстнымъ?

Посмотримъ, въ какомъ положеніи находится проблемма интегрированія въ конечномъ видѣ дифференціальныхъ уравненій.

Изслѣдующая мысль проходитъ черезъ три стадіи.

Сперва—стадія *наивности*. Нѣтъ строгой критики ни для рѣшенія, ни для самой постановки вопроса.

Въ слѣдующей стадіи критика распространяется, какъ это не представляется можетъ быть на первый взглядъ страннымъ, не на постановку проблеммы, а только на ея *рѣшеніе*. Рѣшеніе въ достаточной степени строго, но дѣло въ томъ, что постановка вопроса является не достаточно продуманной, различные авторы подъ одной и той же проблеммой понимаютъ весьма различное, даже, болѣе того, у одного и того же автора колеблется пониманіе тѣхъ требованій, которыя предъявляетъ ему изслѣдуемая проблемма.

Грубое, основанное на опытѣ или на несовершенномъ соображеніи геометрическое опредѣленіе длины окружности въ радіусѣ относится къ первой эпохѣ.

Изысканіе квадратуры круга греческими математиками ко 2-й эпохѣ.

Третья стадія характеризуется критическимъ отношеніемъ, какъ къ рѣшенію такъ и къ постановкѣ вопроса.

Тщетныя попытки съ огромной затратой энергіи наводятъ на мысль о неразрѣшимости проблеммъ не вслѣдствіе безсилія рѣшающаго, а вслѣдствіе того, что въ постановкѣ самой проблеммы содержится извѣстное противорѣчіе. Въ такую эпоху вступила теорія геометрическихъ построеній, когда была поставлена задача о возможности трисекціи для произвольно взятаго угла, причемъ, какъ извѣстно, вопросъ о возможности трисекціи былъ рѣшенъ въ отрицательномъ смыслѣ.

Къ такой эпохѣ относятся теоремы Эрмита—Линдемана о трансцендентности π и вытекающей отсюда невозможности квадратуры съ помощью циркуля и линейки

Такую эпоху создалъ Абель для теорiи рѣшенiй алгебраическихъ уравненiй въ радикалахъ и для интегрированiя въ конечномъ видѣ алгебраическихъ дифференцiаловъ. Только въ эту, третью эпоху создается вполнѣ критическое отношенiе къ постановкѣ проблеммы

Требованiя, предъявляемыя проблеммой должны вполнѣ сознаться для того, чтобы можно было произвести вполнѣ строгую научную критику ихъ, для того, чтобы можно было вскрыть тѣ противорѣчiя которыя въ большинствѣ случаевъ очень глубоко въ нихъ скрываются.

Задача объ интегрированiи въ конечномъ видѣ алгебраическихъ дифференцiаловъ со времени Абеля изслѣдована уже очень глубоко, причемъ, преимущественно, русскими математиками.

Обычный элементарный курсъ интегрированiя функцiй рѣзко отличается отъ тѣхъ изслѣдованiй, которыя начаты Льювилемъ и Абелемъ и продолжены Чебышевымъ и другими русскими математиками. Обычный элементарный курсъ не даетъ вполнѣ строгой формулировки понятiя объ интегрированiи въ конечномъ видѣ.

Минуя ее, онъ начинаетъ прямо съ методы интегрированiя; иногда, указывая, что интегрированiе совершается съ помощью логариѳмическихъ, показательныхъ тригонометрическихъ и круговыхъ (иначе: элементарныхъ трансцендентныхъ) функцiй Но, конечно, выраженiе „съ помощью и т. д.” не настолько ясно, насколько это представляется на первый взглядъ. Если интегралъ разложенъ въ тригонометрическiй рядъ, то можно сказать, что интегралъ выражается съ помощью тригонометрическихъ функцiи, хотя пониманiе выражаемости съ помощью и будетъ совершенно иное, чѣмъ то, которое подразумѣвается въ первомъ случаѣ.

Строгой и вполнѣ ясной формулировкой той проблеммы, которая обыкновенно, *молча*, признается за проблемму интегрированiя въ конечномъ видѣ и которая вмѣстѣ съ тѣмъ является наиболѣе естественнымъ признавать за такую проблемму, начинается послѣдняя „критическая” эпоха, относящаяся къ интегрированію въ конечномъ видѣ алгебраических дифференціаловъ.

Элементарные курсы интегрированія функцій представляютъ изслѣдованія этой проблеммы въ той формѣ, въ какой можно найти эти изслѣдованія у прежнихъ математиковъ до изслѣдованій Льювиля и Абеля и у тѣхъ современныхъ математиковъ, которые ведутъ свои изслѣдованія, *обходя* работы послѣднихъ.

Задача ставится не такъ, какъ ее слѣдуетъ ставить при строго критическомъ отношеніи къ проблеммѣ:

Данъ дифференціалъ

$$f(x)\,dx$$

Возможно ли найти $\int f(x)\,dx$ въ конечномъ видѣ съ помощью элементарныхъ трансцендентныхъ (причемъ послѣднее понятіе вполнѣ строго опредѣляется), и, если возможно то найти выраженіе этого интеграла черезъ элементарныя трансцендентныя?

Все сводится въ этихъ изслѣдованіяхъ къ опредѣленію различныхъ методъ, при помощи которыхъ интегрируется въ конечномъ видѣ дифференціалы болѣе или менѣе общихъ типовъ. Относительно тѣхъ дифференціаловъ, которые не принадлежатъ къ тѣмъ типамъ, которые *удалось* проинтегрировать, не ставится вовсе вопроса объ интегрированіи въ конечномъ видѣ. Такимъ образомъ рѣшеніе задачи объ опредѣленіи $\int f(x)\,dx$ всецѣло зависитъ отъ случайности, отъ того соблюдены ли случайно для $\int f(x)\,dx$ *достаточныя* условія выражаемости его въ конечномъ видѣ. Если $f(x)\,dx$ эллиптическій дифференціалъ, то проблемма объ опредѣленіи интеграла $\int f(x)\,dx$ въ конечномъ видѣ можетъ рѣшится только въ томъ счастливомъ случаѣ, когда $\int f(x)\,dx$ окажется подходящимъ подъ случайно изслѣдованный типъ *псевдо-эллиптическихъ интеграловъ*.

Совершенно въ такомъ же видѣ находится въ до-Абель-Льювиллевскую эпоху и проблемма интегрированія дифференціальиыхъ уравненій. Когда Ньютонъ пишетъ, что онъ можетъ проинтегрировать всѣ дифференціальныя уравненія, то конечно онъ понимаетъ „интегрированіе" только въ смыслѣ разложенія интеграла въ рядъ Тайлора, а не въ томъ смыслѣ въ какомъ это потомъ *обычно* понимали и не въ томъ смыслѣ, въ какомъ это наиболѣе *естественно* понимать.

Неизмѣннымъ въ различныхъ взглядахъ на проблемму на интегрированія въ конечномъ видѣ остается у всѣхъ авторовъ то, что ее существенно отличаетъ отъ новѣйшаго взгляда интегрированіе. Интегрированіе всегда понимается въ смыслѣ *построенія интеграла* дифференціальнаго уравненія съ помощью тѣхъ или иныхъ символовъ, съ помощью тѣхъ или иныхъ функцій. Но какія функціи принимаются за основныя, съ помощью которыхъ выражаются интегралы взглядъ на это подвергается колебаніямъ

Почти всѣ авторы вводятъ въ число основныхъ операціи символъ $\int$ т. е. квадратуры Интегрированіе въ конечномъ видѣ такимъ образомъ представляетъ интегрированіе въ квадратурахъ. Но конечно, когда Эйлеръ *интегрируетъ* уравненіе

$$\frac{dx}{\sqrt{R(x)}}=\frac{dy}{\sqrt{R(y)}},$$

выражая y въ алгебр функціи отъ x, то онъ понимаетъ интегрированіе иначе, въ томъ смыслѣ, какъ оно понимается въ упомянутой выше проблеммѣ, которая представляетъ ничто иное, какъ проблемму интегрированія уравненія

$$y'=f(x),$$

Лейбницъ, знакомя съ отдѣленіемъ перемѣнныхъ, И Бернулли, указывая интегрированіе однородныхъ уравненій, Я Бернулли, интегрируя уравненіе, носящее его имя, понимаетъ подъ интегрированіемъ — интегрированіе съ помощью квадратуръ

Методъ Лапласа интегрированія съ помощью опредѣленныхъ интеграловъ даетъ рѣшеніе иной задачи, чѣмъ та, которая изслѣдовалась этими математиками; интегрированіе въ конечномъ видѣ здѣсь понимается иначе.

Какимъ образомъ отъ интегрируемыхъ весьма различными методами различныхъ типовъ дифференціальныхъ уравненій подняться до рѣшенія проблеммы интегрированія въ конечномъ видѣ дифференціальныхъ уравненій (съ помощью квадратуръ и съ помощью элем. трансц.)?

Какимъ образомъ объяснить себѣ *тщетность* попытокъ интегрированія другихъ болѣе многочисленныхъ типовъ дифференціальныхъ уравненій и изслѣдовать, не лежитъ ли причина неудачъ не въ насъ, а въ томъ фактѣ, что существуютъ неинтегрируемыя въ конечномъ видѣ уравненія?

Здѣсь открываются два пути.

Первый—это изслѣдованіе тѣхъ методъ, при помощи которыхъ удалось проинтегрировать изслѣдованные типы уравненій, изслѣдованіе того общаго принципа, который лежитъ въ основѣ всѣхъ методъ и созданіе на основаніи его общей методы интегрированія, при помощи которой возможно было бы интегрировать всѣ тѣ типы уравненіи, которыя были проинтегрированы разнообразными случайными методами. Тогда сразу опредѣлятся всѣ тѣ типы дифференц. уравненій, которыя *поддаются* интегрированію Конечно еще нельзя считать *доказаннымъ*, что это и суть тѣ уравненія, которыя *могутъ быть проинтегрированы*, но при этомъ становится *весьма вѣроятнымъ*, что это такъ.

Мы не будемъ распространяться подробно о геніальныхъ изслѣдованіяхъ Софуса Ли, такъ какъ послѣднія не имѣли никакого вліянія на нашу работу, но укажемъ, что Софусъ Ли, не изслѣдовавъ проблеммы о необходимыхъ и достаточныхъ условіяхъ интегрируемости съ помощью квадратуръ тѣмъ не менѣе имѣетъ огромное значеніе въ подобнаго рода изслѣдованіяхъ, и, если онъ относится еще ко второй эпохѣ, то его ближайшій ученикъ Вессіо долженъ быть отнесено къ третьей, такъ, какъ мы будемъ говорить ниже, Вессіо пользуясь теоріей непрерывныхъ группъ, изслѣдуетъ проблемму интегрированія въ квадратурахъ.

Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ тѣ типы уравненій, которыя поддаются общимъ методамъ Софуса Ли весьма вѣроятно вмѣстѣ съ тѣмъ единственные типы интегрируемыхъ уравненій, то въ изслѣдованіяхъ Софуса Ли, мы находимъ формулировку положеній безъ доказательствъ, но съ многимъ, что послужитъ для построенія этихъ послѣднихъ.

Другой путь—начиная съ строго-критической постановки проблеммы, отвлекаясь отъ всѣхъ извѣстныхъ методъ интегрированія изыскивается возможная форма интеграла дифференціальнаго уравненія въ случаѣ его выражаемости въ конечномъ видѣ; 2) изыскиваются условія при которыхъ возможенъ интегралъ этой формы; 3) изыскиваются методы для опредѣленія интеграла данной формы, если таковой интегралъ существуетъ Здѣсь уже первая изъ этихъ задачъ открываетъ третью изъ вышеупомянутыхъ эпохъ.

Это тотъ путь который былъ выбранъ Льювилемъ и Абелемъ при изслѣдованіи дифференціальнаго уравненія

$$y' = f(x)$$

Къ сожалѣнію для случая уравненія болѣе общаго случая проблемма очень мало изслѣдована.

Форма частнаго интеграла выражаемаго въ конечномъ видѣ съ помощью элементарныхъ трансцендентныхъ найдена Льювилемъ для случая уравненія $y'' = Py$, гдѣ P цѣлая функція (о его работахъ мы будемъ подробно говорить) форма общаго интеграла уравненія перваго порядка

$$f(x, y, y') = 0$$

опредѣлена нами, дальнѣйшія обобщенія относящіяся къ системѣ уравненій принадлежатъ М. Н. Лагутинскому

Форма интеграловъ ур. 1-го порядка выражаемаго съ помощью квадратуръ изслѣдована Максимовичемъ (но работа