

М. Келдыш

**Внешняя задача Неймана для
нелинейных эллиптических
уравнений с приложением к
теории крыла в сжимаемом
газе**

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 53
ББК 22.3
М11

М11 **М. Келдыш**
Внешняя задача Неймана для нелинейных эллиптических уравнений с приложением к теории крыла в сжимаемом газе / М. Келдыш – М.: Книга по Требованию, 2017. – 42 с.

ISBN 978-5-458-58028-1

ISBN 978-5-458-58028-1

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2017

© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2017

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.



Серия Книжный Ренессанс

www.samizday.ru/reprint

Следовательно при фиксированном P' , $g(P, P')$ есть регулярная функция P , $g(P, P')$ есть действительная часть функции двух комплексных переменных P, P' регулярной в бесконечности по обоим переменным. Это приводит к следующим неравенствам:

$$\left. \begin{aligned} \left| \frac{\partial g}{\partial x} \right|, \left| \frac{\partial g}{\partial y} \right| &< \frac{A}{R^2 \rho} \\ \left| \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \right|, \left| \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} \right|, \left| \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \right| &< \frac{A}{R^3 \rho} \\ \left| \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(P_1, P') - \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(P_2, P') \right|, \dots &< \frac{Ad}{R^4 \rho}, (d = \overline{P_1 P_2}) \end{aligned} \right\} \quad (2, 6)$$

д) Поведение функции Грина вблизи границы области

Докажем теперь, что

$$G(P, P') = \lg \frac{rr^*}{\rho^2} + \gamma(P, P') \quad (2, 7)$$

где

$$r = \overline{PP'}, \quad r^* = P^*P',$$

P^* инверсия точки P относительно аналитической кривой (C) , а $\gamma(P, P')$ регулярная функция точек P, P' ; если точка P находится в некоторой достаточно малой окрестности кривой¹⁾ (C) , а P' не выходит из области (D) .

Для того, чтобы это усмотреть, заметим, что определенная нами функция Грина, для случая внешности круга имеет вид:

$$\overline{G}(\overline{P}, \overline{P}') = \lg \frac{\overline{r} \overline{r}^*}{\overline{\rho}^2}$$

где $\rho = \overline{OP'}$, $\overline{r} = \overline{PP'}$, $\overline{r}^* = \overline{P^*P'}$, а $\overline{P}^*$ инверсия $\overline{P}$ относительно круга.

Отобразим конформно внешность круга на область (D) так, чтобы бесконечно удаленные точки соответствовали друг другу. Тогда $\overline{G}$ перейдет в $\overline{G}'$, причем

$$\overline{G}'(P, P') = G(P, P') + \Psi(P')$$

где $\Psi(P')$ регулярная гармоническая функция в области (D) , обращающаяся в бесконечности в нуль. В самом деле,

$$\overline{G}'(P, P') - G(P, P'),$$

¹⁾ Под окрестностью контура (C) мы будем подразумевать область, заключенную между кривой (C) и какой-нибудь охватывающей ее кривой (C') . Окрестность кривой (C) мала, если наибольшее из расстояний от точек линии (C') до линии (C) мало.

рассматриваемая как функция P' , имеет на контуре нормальную производную, значения которой не зависят от положения P , кроме того эта разность регулярна во всей области D и обращается в нуль при $P' = \infty$.

С другой стороны

$$\lg \bar{r} \bar{r}^* = \lg \frac{\bar{r} \bar{r}^*}{r r^*} + \lg r r^*.$$

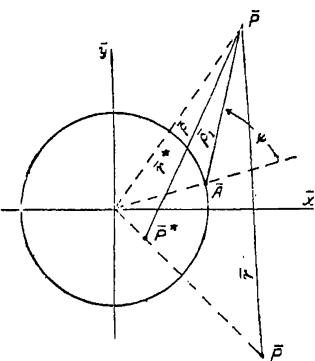
Первое слагаемое есть регулярная функция P и P' , если P находится в достаточно малой окрестности контура (C) .

е) Неоднозначная функция Грина

Пусть теперь область (D) ограничена аналитической кривой с одной угловой точкой A . Нам придется пользоваться неоднозначной функцией

Грина, которая определяется следующим образом: функция Грина $\Gamma(x, y; \xi, \eta)$, рассматриваемая как функция переменных x, y , есть потенциал скоростей течения несжимаемой жидкости, имеющей источник в точке ξ, η , с мощностью равной 2π , обтекающей контур (C) со сходом струй в угловой точке A , и имеющей в бесконечности скорость равную нулю.

Кроме того, мы потребуем, чтобы $\Gamma(x, y; \xi, \eta)$ была бы гармонической функцией точки ξ, η , обращающейся в нуль в бесконечности. Эта функция $\Gamma(x, y; \xi, \eta)$



Фиг. 1.

будет, вообще говоря, неоднозначной, ввиду того, что поток будет иметь некоторую циркуляцию.

В случае, когда кривая (C) есть круг с радиусом единица, мы построим такой поток со сходом струй в заданной точке A . Пусть $\bar{P}$ точка с координатами $\bar{x}, \bar{y}$, $\bar{P}^*$ ее инверсия. Помещая источник в точке $\bar{P}(\xi, \eta)$ и, пользуясь обозначениями Фиг. 1, имеем:

$$\Gamma(\bar{x}, \bar{y}; \xi, \eta) = \lg \frac{\bar{r} \bar{r}^*}{\rho^2} - \frac{\sin \phi}{\rho_1} \operatorname{arctg} \frac{\bar{y}}{\bar{x}} \dots \dots \dots (2, 9)$$

Совершим теперь конформное отображение внешности круга на область (D) так, чтобы бесконечно удаленные точки соответствовали друг другу, а угловая точка A соответствовала бы точке A . При этом преобразовании функция $\Gamma(\bar{x}, \bar{y}; \xi, \eta)$ перейдет в неоднозначную функцию Грина.

Укажем, что всякая другая неоднозначная функция Грина, удовлетворяющая поставленным выше условиям, может отличаться от найденной только на гармоническую функцию переменных ξ, η , регулярную во всей области (D) и обращающуюся в нуль в бесконечности.

Если мы рассечем область (D) купюрой, идущей от какой-нибудь точки контура (C) в бесконечность, то в полученной области $\Gamma(x, y; \xi, \eta)$ распадается на однозначные ветви, и одну из них мы выберем за главное значение.

3. Вспомогательные предложения из теории потенциала

Рассмотрим в области (D) уравнение Пуассона

$$\Delta \varphi = h(x, y) \dots \dots \dots (3, 1)$$

правая часть которого удовлетворяет следующим условиям

$$\left. \begin{aligned} & |h(x, y)| < KR^{\nu-2} \\ & R_2 \geq R_1 = R, \quad d < R \\ & |h(x_2, y_2) - h(x_1, y_1)| < KR^{\nu-2} \left(\frac{d}{R}\right)^\lambda \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3, 2)$$

где

$$R = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

$$0 < \lambda < 1, \quad 0 < \nu < 1,$$

а K — постоянная величина.

Мы будем сначала предполагать, что аналитическая кривая не имеет особых точек.

Теорема I. Всякое решение уравнения (3, 1), удовлетворяющее на контуре области условию:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \dots \dots \dots (3, 3)$$

и внутри области (D) неравенствам

$$\left. \begin{aligned} & |\varphi(x, y)| < \angle R^\nu \\ & \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|, \quad \left| \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right| < \angle R^{\nu-1} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3, 4)$$

дается формулой

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2\pi} \iint_D G(x, y; \xi, \eta) h(\xi, \eta) d\xi d\eta + \text{const} \dots \dots (3, 5)$$

Константа, входящая в формулу (3, 5) не существенна, так как имеющиеся уравнения определяют решение только в точности до произвольной постоянной.

Для доказательства, как это делается обычно, применяем формулу Грина в области (D') , ограниченной кривой (C) , кругом Γ радиуса R с центром в начале координат и кругом γ вокруг точки P . Тогда

$$\iint_D (\varphi \Delta G - G \Delta \varphi) d\xi d\eta = \int_C \left(G \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} - \varphi \frac{\partial G}{\partial \nu} \right) ds + \int_{\Gamma} + \int_{\gamma}$$

Если круг Γ уходит в бесконечность, то, так как φ удовлетворяет условиям (3, 4) и

$$|G| < \frac{M}{R}, \quad \left| \frac{\partial G}{\partial R} \right| < \frac{M}{R^2}$$

$$\left| \int_{\Gamma} \right| \leq 2M \int_{\Gamma} R^{\nu-2} ds \, 4\pi M L R^{\nu-1} \rightarrow 0.$$

Кроме того, если γ стягивается к P , то

$$\int_{\gamma} \rightarrow -2\pi \varphi(x, y)$$

и

$$\int_C \left(G \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} - \varphi \frac{\partial G}{\partial \nu} \right) ds = - \int_C \varphi \frac{\partial G}{\partial \nu} ds - \int_C \varphi \frac{\partial \ln \rho}{\partial \nu} ds = \text{const}$$

$$\iint_{(D')} (G \Delta \varphi - \varphi \Delta G) d\xi d\eta = \iint_{(D')} G(x, y; \xi, \eta) h(\xi, \eta) d\xi d\eta$$

следовательно в пределе получаем формулу (3, 5). Заметим, что полученный двойной интеграл сходится, так как подынтегральное выражение в окрестности бесконечно удаленной точки удовлетворяет условию

$$|Gh| < \frac{MK}{R^{3-\nu}}, \quad (0 < \nu < 1)$$

Теорема II¹⁾. Функция $\varphi(x, y)$, определяемая равенством (3, 5), непрерывная вместе со своими производными до второго порядка включительно, удовлетворяет дифференциальному урав-

¹⁾ Подобные условия, но без показателя, можно найти в работе Lichtenstein'a. См. Math. Ztschr., Bd. 27, S. 607; и Grundlagen der Hydromechanik, S. 441. Однако, без показателя ν , мы не могли обойтись. При $\nu = 0$ теорема не верна.

нению (3, 1), краевому условию (3, 3) и системе следующих неравенств.

$$\left. \begin{aligned} |\varphi| &< AKR^\nu \\ \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|, \left| \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right| &< AKR^{\nu-1} \\ d &< R \\ \left| \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right] - \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right] \right|, \dots &< AKR^{\nu-2} \left(\frac{d}{R} \right)^\lambda \end{aligned} \right\} \quad (3, 6)$$

где A константа, зависящая только от формы области (D) , и в последних неравенствах R наименьшее из чисел R_1, R_2 , а $d = \overline{P_1 P_2}$.

Во-первых укажем, что интеграл (3, 5) сходится, и законно дифференцирование под знаком интеграла. Как обычно

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \frac{1}{2\pi} \iint_{(D)} \frac{\partial G}{\partial x} h d\zeta d\eta, \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} &= \frac{1}{2\pi} \iint_{(D)} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} h d\zeta d\eta + \frac{1}{2} h(x_i, y), \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3, 7)$$

Отсюда непосредственно следует, что φ удовлетворяет уравнению (3, 1).

Начнем с доказательства последних неравенств (3, 6). Нам придется рассмотреть три случая. Пусть, во-первых точки P_1, P_2 находятся в достаточно малой окрестности кривой (C) , в которой выполняется формула (2, 8).

Рассмотрим производную $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$. Так как $h(x, y)$ удовлетворяет неравенству (3, 2), нам надо доказать, что интеграл

$$\iint_{(D)} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} h d\zeta d\eta = \iint_{(D)} \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x^2} h d\zeta d\eta + \iint_{(D)} \frac{\partial^2 \ln r}{\partial x^2} h d\zeta d\eta + \iint_{(D)} \frac{\partial^2 \ln r^*}{\partial x^2} h d\zeta d\eta$$

удовлетворяет последнему из равенства (3, 6).

Прежде всего покажем, что первый интеграл удовлетворяет этому условию. Когда P находится вблизи контура и P' пробегает всю область (D) , $\gamma(P, P')$ регулярна и обращается в нуль, когда точка P удаляется в бесконечность, поэтому

$$\left| \frac{\partial^3 \gamma}{\partial x^3} \right| < \frac{A}{\rho}, \quad \left| \frac{\partial^3 \gamma}{\partial x^2 \partial y} \right| < \frac{A}{\rho}$$

следовательно, если точки P_1 и P_2 находятся в окрестности кривой (C) , в которой выполняется (2, 8), то¹⁾

$$\left| \iint_{(D)} \left(\left[\frac{\partial^2 \gamma}{\partial x^2} \right]_1 - \left[\frac{\partial^2 \gamma}{\partial x^2} \right]_2 \right) h d\xi d\eta \right| \leq \iint_{(D)} \frac{2Ad}{\rho} \frac{K}{\rho^{2-\nu}} d\xi d\eta \leq \\ \leq 4\pi A K d \int_1^\infty \frac{d\rho}{\rho^{2-\nu}} = \frac{4\pi A}{1-\lambda} K d < A K d^\lambda.$$

Перейдем к оценке второго члена. Пусть (D_1) внешность круга достаточно большого радиуса R_0 и D_2 дополнение к (D_1) до области (D) . Разобьем второй интеграл на два слагаемых

$$\iint_{(D)} \left[\frac{\partial^2 \ln r}{\partial x^2} \right]_1 h d\xi d\eta = \iint_{(D_1)} + \iint_{(D_2)}$$

Первый интеграл оценивается так же как и выше, так как в области (D_1)

$$\left[\frac{\partial^2 \ln r}{\partial x^2} \right]_1 < \frac{Ad}{\rho^3}$$

Что же касается до второго слагаемого, то к нему мы можем применить теорему Корна²⁾, из которой непосредственно следует, что он меньше чем $A K d^\lambda$.

Рассмотрим теперь третье слагаемое. Имеем

$$\frac{\partial^2 \ln r^*}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \ln r^*}{\partial x^{*2}} \left(\frac{\partial x^*}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 \ln r^*}{\partial x^* \partial y^*} \frac{\partial x^*}{\partial x} \frac{\partial y^*}{\partial y} + \frac{\partial^2 \ln r^*}{\partial y^{*2}} \left(\frac{\partial y^*}{\partial x} \right)^2 + \\ + \frac{\partial \ln r^*}{\partial x} \frac{\partial^2 x^*}{\partial x^2} + \frac{\partial \ln r^*}{\partial y} \frac{\partial^2 y^*}{\partial x^2}$$

следовательно, для оценки интеграла, надо рассмотреть каждый из членов этой суммы. Рассмотрим, например, первый член суммы

$$\iint_{(D)} \left[\left(\frac{\partial x^*}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 \ln r^*}{\partial x^{*2}} \right]_1 h d\xi d\eta = \left[\left(\frac{\partial x^*}{\partial x} \right)^2 \right]_1 \iint_{(D)} \left[\frac{\partial^2 \ln r^*}{\partial x^2} \right]_1 h d\xi d\eta + \\ + \left[\left(\frac{\partial x^*}{\partial x} \right)^2 \right]_1 \iint_{(D)} \frac{\partial^2 \ln r^*}{\partial y^2} h d\xi d\eta.$$

1) Для того, чтобы не писать множества индексов, мы все константы, зависящие только от формы области и чисел λ и ν , будем обозначать только буквой A .

2) Korn. Ann. de l'Ecole Norm. sup. (1907). Теорема формулируется следующим образом

Если в некоторой конечной области распределена масса с поверхностной плотностью $\rho(x, y)$, удовлетворяющей неравенству

$$|\rho(x_1, y_1) - \rho(x_2, y_2)| < A d^\lambda,$$

$0 < \lambda < 1$, то вторые производные потенциала удовлетворяют тому же неравенству с новой константой C , причем C зависит только от формы области и показателя λ .

Первое слагаемое оценивается так же как предыдущий интеграл, что же касается второго, то

$$\left[\left(\frac{\partial x^*}{\partial x} \right)^2 \right]_1^2 < Ad$$

и как будет показано ниже

$$\left| \iint_{(D)} \left[\frac{\partial^2 \ln r^*}{\partial x^2} \right] h d\xi d\eta \right| < AK,$$

следовательно второй член не превосходит AKd^λ .

Если теперь точки P_1, P_2 лежат вне вышеупомянутой окрестности контура (C) , но внутри круга конечного радиуса R_0 , все рассуждения повторяются, с тем упрощением, что член $\ln r^*$ будет входить в регулярную часть.

Произведем теперь оценку интеграла, для случая, когда точки P_1, P_2 расположены вне круга радиуса R_0 , настолько большого, что вся кривая (C) расположена внутри круга радиуса $R_0 : 2$.

Пусть P_1 и P_2 две такие точки и пусть R расстояние до ближайшей из них от начала координат.

Имеем

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right]_1^2 &= \frac{1}{2\pi} \iint_{(D)} \left[\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} \right]_1^2 h d\xi d\eta = \\ &= \frac{1}{2\pi} \iint_{(D)} \left[\frac{\partial^2 \ln r}{\partial x^2} \right]_1^2 h d\xi d\eta = \frac{1}{2\pi} \iint_{(D)} \left[\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \right]_1^2 h d\xi d\eta + \frac{1}{2} \left[h(x, y) \right]_1^2. \end{aligned}$$

Третье слагаемое, очевидно, удовлетворяет неравенству

$$\frac{1}{2} |h_2 - h_1| < AKR^{2-\nu} \left(\frac{d}{R} \right)^\lambda$$

Оценим второй интеграл. Пользуемся последним из неравенств (2, 6) и неравенством (3, 2); тогда находим, что второй интеграл не превосходит

$$\frac{1}{2\pi} \iint_{(D)} \frac{Ad}{R^4 \rho} \cdot \frac{K}{\rho^{2-\nu}} d\xi d\eta < AK \frac{d}{R^4}$$

и, так как $d < R$, правая часть неравенства меньше, чем

$$AKR^{\nu-2} \left(\frac{d}{R} \right)^\lambda.$$

Чтобы рассмотреть интеграл

$$\frac{1}{2\pi} \iint_{(D)} \left[\frac{\partial^2 \ln r}{\partial x^2} \right]_1^2 h d\xi d\eta,$$

разобьем область (D) на четыре части. Для этого проведем из начала координат круг радиуса $R : 2$ и обозначим пересечение нашей области с этим кругом через (Q) , круг с центром в середине отрезка $P_1 P_2$ и радиуса d обозначим через (S) , внутренность круга с центром в той же точке и радиуса $2R$, за вычетом (Q) и (S) , обозначим через (T) , а внешность этого круга через (U) .

Тогда

$$\iint_{(D)} \left[\frac{\partial^2 \ln r}{\partial x^2} \right]_1^2 h d\xi d\eta = \iint_{(Q)} + \iint_{(S)} + \iint_{(T)} + \iint_{(U)}.$$

Мы будем отдельно оценивать каждое слагаемое:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2\pi} \iint_{(Q)} \left[\frac{\partial^2 \ln r}{\partial x^2} \right]_1^2 h d\xi d\eta \right| &\leq \frac{1}{2\pi} \iint_{(Q)} \frac{Ad}{R^3} \frac{K}{\rho^{2-\nu}} d\xi d\eta = AK \frac{d}{R^3} \int_0^{\frac{R}{2}} \frac{\rho^{1-\nu}}{\rho^{1-\nu}} \leq \\ &\leq AK \frac{d}{R^{3-\nu}} \leq AKR^{\nu-2} \left(\frac{d}{R} \right)^\lambda \\ \left| \frac{1}{2\pi} \iint_{(S)} \left[\frac{\partial^2 \ln r}{\partial x^2} \right]_1^2 h d\xi d\eta \right| &\leq \iint_{(S)} \frac{Ad}{\rho^3} \frac{K}{\rho^{2-\nu}} d\xi d\eta = AK \frac{d}{R^{3-\nu}} \leq AKR^{\nu-2} \left(\frac{d}{R} \right)^\lambda \\ \left| \frac{1}{2\pi} \iint_{(T)} \left[\frac{\partial^2 \ln r}{\partial x^2} \right]_1^2 h d\xi d\eta \right| &\leq |h_0| \left| \iint_{(T)} \left[\frac{\partial^2 \ln r}{\partial x^2} \right]_1^2 d\xi d\eta \right| + \\ &+ \left| \iint_{(T)} \left[\frac{\partial^2 \ln r}{\partial x^2} \right]_1^2 (h - h_0) d\xi d\eta \right| \end{aligned}$$

Интеграл от $\left[\frac{\partial^2 \ln r}{\partial x^2} \right]_1^2$, распространенный по всякому кругу с центром в середине отрезка $P_1 P_2$ обращается в нуль, следовательно

$$\begin{aligned} |h_0| \left| \iint_{(T)} \left[\frac{\partial^2 \ln r}{\partial x^2} \right]_1^2 d\xi d\eta \right| &= |h_0| \left| \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{R}{2}} \left[\frac{\partial^2 \ln r}{\partial x^2} \right]_1^2 d\xi d\eta \right| \leq \\ &\leq \frac{K}{R^{2-\nu}} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{R}{2}} \frac{Ad}{R^3} \rho d\rho d\varphi \leq AK \frac{d}{R^{3-\nu}} < AKR^{\nu-2} \left(\frac{d}{R} \right)^\lambda. \end{aligned}$$

Надо теперь оценить интеграл

$$\begin{aligned} \iint_{(T)} \left| \frac{\partial^2 \ln r}{\partial x^2} \right|_1^2 |h - h_0| d\xi d\eta &\leq \iint_{(T)} \frac{Ad}{r^3} K \left(\frac{2r}{R} \right)^\lambda \left(\frac{R}{2} \right)^{\nu-2} r dr d\theta \leq \\ &\leq AKR^{\nu-2} \frac{d}{R^\lambda} \int_d^\infty \frac{dr}{r^{3-\lambda}} \leq AKR^{\nu-2} \left(\frac{d}{R} \right)^\lambda. \end{aligned}$$

Перейдем наконец к оценке последнего члена

$$\begin{aligned} \iint_{(S)} \left[\frac{\partial^2 \ln r}{\partial x^2} \right]_1 h d\xi d\eta &= \iint_{(S)} \left[\frac{\partial^2 \ln r}{\partial x^2} \right]_1 (h - h_1) d\xi d\eta + h_1 \iint_{(S)} \left[\frac{\partial^2 \ln r}{\partial x^2} \right]_1 d\xi d\eta + \\ &+ \iint_{(S)} \left[\frac{\partial^2 \ln r}{\partial x^2} \right]_2 (h_2 - h) h d\xi d\eta - h_2 \iint_{(S)} \left[\frac{\partial^2 \ln r}{\partial x^2} \right]_2 d\xi d\eta. \end{aligned}$$

Нетрудно убедиться, что второе и третье слагаемое обращаются в нуль, что же касается двух других интегралов, то они оцениваются следующим образом:

$$\begin{aligned} \left| \iint_{(S)} \left[\frac{\partial^2 \ln r}{\partial x^2} \right]_1 (h - h_1) d\xi d\eta \right| &\leq \iint_{(S)} \left| \frac{\partial^2 \ln r}{\partial x^2} \right|_1 (h - h_1) d\xi d\eta \leq \\ &\leq \iint_{(S)} \frac{1}{r_1^2} \frac{K r_1^\lambda}{R^{2-\nu} R^\lambda} r_1 dr_1 d\varphi \leq \frac{2\pi K}{R^{2-\nu+\lambda}} \int_0^{2d} r^{\lambda-1} dr < AKR^{\nu-2} \left(\frac{d}{R} \right)^\lambda \end{aligned}$$

Сопоставляя все полученные неравенства, находим

$$\left| \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right]_1 - \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right]_2 \right| < AKR^{\nu-2} \left(\frac{d}{R} \right)^\lambda.$$

Совершенно аналогично доказываются неравенства для разности двух других вторых производных.

Переходя к оценке самих вторых производных, заметим, что требуемые неравенства достаточно доказать только при $R > R_0$, так как имея неравенства только при $R > R_0$ и пользуясь полученной оценкой для разности вторых производных, очевидно получаем неравенства для всей области (D) .

Доказательство этих неравенств протекает совершенно аналогично

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{1}{2\pi} \iint_{(D)} \frac{\partial^2 \ln r}{\partial x^2} d\xi d\eta + \frac{1}{2\pi} \iint_{(D)} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} h d\xi d\eta + \frac{1}{2\pi} \dot{h}(x, y).$$

Каждое слагаемое снова оцениваем отдельно

$$\left| \frac{1}{2} \dot{h} \right| < \frac{1}{2} KR^{\nu-2}$$

пользуясь неравенством (2, 6)

$$\left| \frac{1}{2\pi} \iint_{(D)} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} h d\xi d\eta \right| < \frac{1}{2\pi} \iint_{(D)} \frac{A}{R^3} \frac{K}{\rho^2} \rho^2 d\rho d\varphi < AKR^{\nu-2}.$$

Оценка первого интеграла и в этом случае протекает несколько сложнее именно

$$\frac{1}{2\pi} \iint_{(D)} \frac{\partial^2 \ln r}{\partial x^2} h d\xi d\eta = \frac{1}{2\pi} \iint_{(Q)} + \frac{1}{2\pi} \iint_{(T+S)} + \frac{1}{2\pi} \iint_{(U)}.$$

Интегралы, стоящие в правой части, оцениваются следующим образом:

$$\left| \frac{1}{2\pi} \iint_{(Q)} \frac{\partial^2 \ln r}{\partial x^2} h d\xi d\eta \right| \leq \frac{1}{2\pi} \iint_{(Q)} \frac{4}{R^2} \frac{K}{\rho^{2-\nu}} \rho d\rho d\varphi < AKR^{\nu-2}$$

$$\left| \frac{1}{2\pi} \iint_{(U)} \frac{\partial^2 \ln r}{\partial x^2} h d\xi d\eta \right| \leq \frac{1}{2\pi} \iint_{(U)} \frac{A}{\rho^2} \frac{K}{\rho^{2-\nu}} \rho d\rho d\varphi < AKR^{\nu-2}$$

$$\iint_{(T+S)} \frac{\partial^2 \ln r}{\partial x^2} h d\xi d\eta = h_0 \iint_{(T+S)} \frac{\partial^2 \ln r}{\partial x^2} d\xi d\eta + \iint_{(T+S)} \frac{\partial^2 \ln r}{\partial x^2} (h - h_0) d\xi d\eta,$$

где $h_0 = h(P)$. Интеграл от $\frac{\partial^2 \ln r}{\partial x^2}$ по кругу с центром в точке P обращается в нуль, следовательно

$$\begin{aligned} |h_0| \left| \iint_{(T+S)} \frac{\partial^2 \ln r}{\partial x^2} d\xi d\eta \right| &= |h_0| \left| \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{R}{2}} \frac{\partial^2 \ln r}{\partial x^2} \rho d\rho d\varphi \right| \leq \\ &\leq KR^{\nu-2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{R}{2}} \frac{4}{R^2} \rho d\rho d\varphi < AKR^{\nu-2}. \end{aligned}$$

Остается еще рассмотреть интеграл

$$\left| \iint_{(T+S)} \frac{\partial^2 \ln r}{\partial x^2} (h - h_0) d\xi d\eta \right| \leq \iint_{(T+S)} \frac{1}{r^2} K \left(\frac{R}{2} \right)^{\nu-2} \left(\frac{2r}{R} \right)^\lambda r dr d\theta < AKR^{\nu-2}.$$

Совершенно таким же образом протекает доказательство неравенства для $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}$.

Рассмотрим, наконец, первые производные. В этом случае, снова достаточно доказать неравенства для $R > R_0$.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{1}{2\pi} \iint_{(D)} \frac{\partial G}{\partial x} h d\xi d\eta = \frac{1}{2\pi} \iint_{(D)} \frac{\partial \ln r}{\partial x} h d\xi d\eta + \frac{1}{2\pi} \iint_{(D)} \frac{\partial g}{\partial x} h d\xi d\eta.$$

Из неравенств (2, 6)

$$\left| \frac{\partial g}{\partial x} \right| < \frac{A}{R^3 \rho}$$