И.А. Биргер

Прочность. Устойчивость. Колебания

Том 3

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 53
ББК 22.3
И11

И.А. Биргер
И11 Прочность. Устойчивость. Колебания: Том 3 / И.А. Биргер – М.: Книга по Требованию, 2024. – 567 с.

ISBN 978-5-458-30182-4

Во третьем томе даны методы расчета стержней на устойчивость при упругих и пластических деформациях, приведены справочные сведения по определению критических нагрузок, частот и амплитуд собственных колебаний стрежней, пластинок и оболочек под действием периодических и ударных нагрузок, случайных сил, потока газа.

ISBN 978-5-458-30182-4

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2024
© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2024

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

Серия Книжный Ренессанс
www.samizday.ru/reprint

ВВЕДЕНИЕ

Явления потери устойчивости. Форму равновесия статически нагруженной конструкции называют устойчивой, если малым возмущающим воздействиям соответствуют малые отклонения от этой формы. Нагрузки, при которых происходит потеря устойчивости, называют *критическими*, а соответствующие состояния — *критическими состояниями*. Опасность потери устойчивости особенно велика для легких, тонкостенных конструкций типа гибких стержней, пластинок и оболочек.

Явления потери устойчивости весьма разнообразны. Наиболее важны следующие случаи проявления неустойчивости:

1) появление качественно новых смежных форм равновесия;
2) появление несмежных форм равновесия;
3) исчезновение устойчивых форм равновесия;
4) полное исчезновение любых форм равновесия;
5) достижение недопустимо больших скоростей деформаций в конструкциях, материал которых обладает свойством ползучести.

Появление качественно новых форм равновесия. Примером может служить центральное сжатие первоначально прямого упругого стержня (задача Эйлера). При умеренных значениях сжимающей силы прямолинейная форма равновесия — единственная и притом устойчивая форма равновесия; малым возмущениям этой формы, которые осуществляются, например, при помощи малой дополнительной поперечной нагрузки, соответствуют малые прогибы. При критическом значении сжимающей силы прямолинейная форма становится неустойчивой и после малых возмущений стержень приобретает новую (устойчивую) форму равновесия, которой соответствует изогнутая ось.

При сжимающих силах, даже ничтожно превышающих критическое значение, дополнительные напряжения изгиба достигают весьма больших значений и непосредственно угрожают прочности конструкции. Поэтому критическое состояние, как непосредственно предшествующее разрушению, считается недопустимым в реальных условиях эксплуатации. Определение критических нагрузок является ответственной частью инженерного расчета конструкции и позволяет избежать потери устойчивости введением надлежащего запаса.

Совокупность равновесных состояний, соответствующих различным значениям параметра нагрузки, иллюстрируют диаграммами состояний равновесия. Для стержня на рис. 1, *а* диаграмма состояний равновесия имеет вид, показанный на рис. 1, *б*. По оси абсцисс отложены значения характерного перемещения (например, прогиба верхнего конца стержня), а по оси ординат — значения сжимающей силы. Здесь контурными линиями показаны устойчивые состояния равновесия, а крестиками — неустойчивые состояния равновесия.

Появление смежных равновесных форм называют *бифуркацией*, или *разветвлением* форм равновесия. Точку A на рис. 1, *б* называют точкой бифуркации.

Появление несмежных форм равновесия. В начале нагружения при монотонном росте нагрузки обычно происходит также монотонное (почти по линейному закону) возрастание упругих деформаций и перемещений. Однако в некоторых особенных системах на определенном уровне нагружения происходит «хлопок» и система скачком приобретает новую конфигурацию. Такова, например, «хлопающая мембрана», показанная на рис. 2, *а*; соответствующая диаграмма равновесных состояний показана на рис. 2, *б*. Такая диаграмма типична для ряда иных конструкций, например, для сжатых вдоль оси тонких цилиндрических оболочек. При постепенном росте интенсивности нагрузки q прогибы мембраны растут, следуя кривой AB. Точке B соответствует критическое состояние, так как при дальнейшем росте нагрузки происходит мгновенный перескок в точку B' на участке кривой CD (см. горизонтальную прямую BB') и дальнейший процесс определяется точками этого участка. Если после нагружения до какой-либо точки D начать обратную разгрузку, то она будет соответствовать точкам участка DC, вплоть до точки C. В этой точке происходит обратный хлопок мембраны (см. нижнюю горизонтальную прямую CC') и дальнейший процесс характеризуется снова первым участком кривой AB вплоть до полной разгрузки мембраны (точка O).

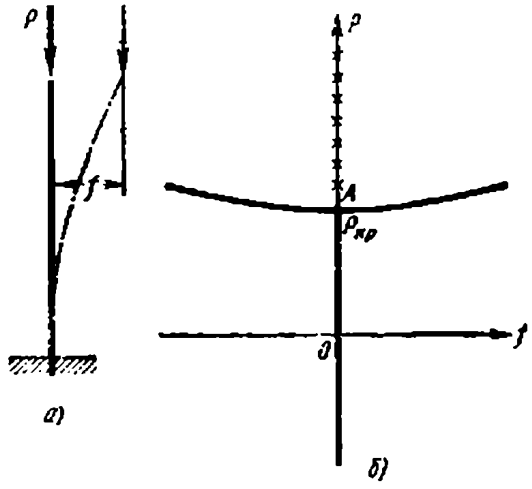

Рис. 1

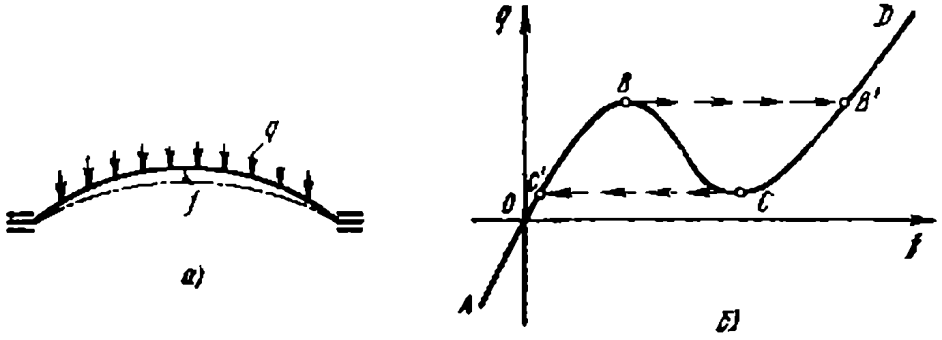

Рис 2

Точки, лежащие на участке BC кривой, также соответствуют состояниям равновесия, но эти состояния неустойчивые и не реализуются ни при монотонном нагружении, ни при обратной монотонной разгрузке. Если искусственно занести мембрану в состояние, соответствующее какой-либо точке этого неустойчивого участка BC, то после любого сколь угодно малого возмущения мембрана совершит перескок на ка-

кой-либо из устойчивых участков (AB или CD в зависимости от направления приложенного возмущения).

В подобных системах характерно существование двух критических значений нагрузки — *верхнего критического значения*, соответствующего точке B, и *нижнего критического значения*, соответствующего точке C (в некоторых случаях нижнее критическое значение оказывается отрицательным).

Хлопающая мембрана представляет собой систему, способность которой к перескокам используют в технических целях; в других случаях перескоки практически означают выход конструкции из строя.

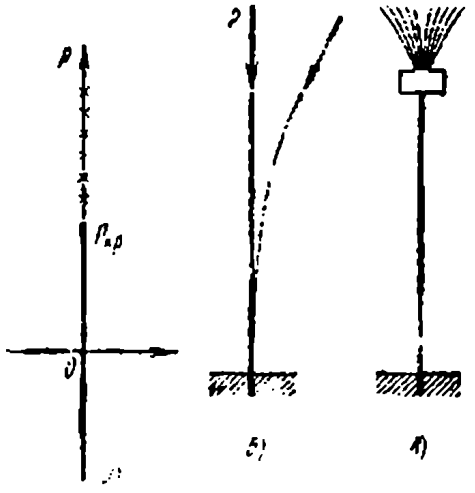

Рис. 3

Исчезновение устойчивых форм равновесия. В некоторых системах критическое состояние характеризуется исчезновением устойчивых форм равновесия и при достижении критического уровня нагружения система уже не может находиться в покое,—достаточно любого возмущения, чтобы система пришла в состояние движения, которое с течением времени все дальше уводит систему от исходного состояния равновесия. Это движение может быть апериодическим (монотонный уход от исходного состояния равновесия) или носить характер колебаний с постепенно возрастающей амплитудой. В этих случаях диаграмма равновесных состояний имеет вид, показанный на рис. 3, *а*. Ниже критического значения нагрузки состояния равновесия устойчивы, а выше этого значения — неустойчивы.

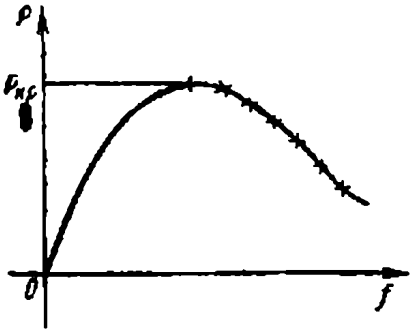

Рис. 4

В частности, к системам этого типа относится консольный стержень (рис. 3, *б*), нагруженный на конце «следящей» силой, т. е. силой, направление которой совпадает с направлением касательной к оси на конце стержня при любой деформации; такая сила возникает, например, вследствие реактивного действия отходящей струи жидкости или газа (рис. 3, *в*).

Полное исчезновение любых форм равновесия. В этом случае типичная диаграмма равновесных состояний имеет вид, показанный на рис. 4, и характеризуется тем, что при нагрузках, превосходящих критическое значение, равновесие вообще невозможно. Подобная кривая получается, например, при внецентренном сжатии упруго-пластического стержня [иногда этот вид потери устойчивости называют потерей устойчивости второго рода, подразумевая под потерей устойчивости первого рода описанный ранее случай 1 (см. стр. 7)]. При $P > P_{кр}$ система не может вообще находиться в состоянии равновесия (в предыдущем случае 3 такие состояния существуют, хотя являются неустойчивыми), т. е., можно сказать, что происходит не потеря устойчивости формы равновесия, а утрата самого свойства равновесия (потеря несущей способности) и система приходит в состояние движения;

в данном случае это движение носит характер апериодического ухода от исходной формы со все возрастающей скоростью.

Потеря устойчивости при ползучести материала. Если материал, из которого выполнена конструкция, обладает свойством ползучести, то деформации и перемещения монотонно увеличиваются с течением времени при неизменной внешней нагрузке. Так как конфигурация системы постепенно меняется, то в некоторых случаях при этом происходит постепенное же перераспределение напряжений; поэтому скорости деформаций возрастают и могут достигнуть недопустимо больших значений и оказаться даже бесконечно большими.

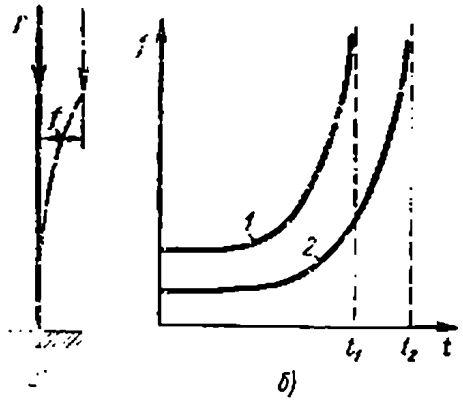

Рис. 5

Время, после истечения которого наступает указанное состояние, называют критическим временем; оно зависит от уровня нагружения, чем больше заданная нагрузка, тем меньше соответствующее ей критическое время. В этом случае понятие критической нагрузки, в сущности, лишается содержания.

Указанные явления могут возникнуть, например, при внецентренном сжатии стержня (рис. 5, *а*). Прогиб конца этого стержня с течением времени увеличивается со все возрастающей скоростью, как это показано на рис. 5, *б*. Кривая *1* соответствует нагрузке, превосходящей нагрузку, для которой построена кривая *2*; поэтому критическое время t_1 в первом случае меньше, чем критическое время t_2 во втором случае.

Перечисленные пять важнейших типов потери устойчивости практически наиболее важны и отражены в справочном материале, приведенном в гл. 1—3 для конкретных типов конструкций. Вопросы потери устойчивости при периодическом нагружении (явление параметрического резонанса, см. гл. 6), динамического продольного изгиба при ударной нагрузке здесь не рассматриваются.

Методы решения задач об устойчивости форм равновесия. Наиболее общим методом исследования устойчивости является *динамический метод*. Предполагают, что исследуемая форма равновесия каким-либо образом нарушена, и изучают движение, которое возникает после такого начального возмущения. По свойствам возмущенного движения судят об устойчивости или неустойчивости исследуемой формы равновесия; если движение представляет собой колебания с постепенно возрастающими амплитудами или носит апериодический характер с увеличивающимися отклонениями, то исходная форма равновесия является неустойчивой, в противном случае, когда система все время остается в окрестности исходной формы равновесия, последняя является устойчивой.

Для практического использования этого метода необходимо предварительное изучение возможных форм равновесия при различных уровнях нагружения, т. е. построение диаграммы состояний равновесия; лишь после этого становится возможным установить с помощью динамического метода, какие из этих состояний устойчивы и какие неустойчивы. Следует иметь в виду, что во многих случаях (кроме случая 3, см. стр. 9) сама структура диаграммы состояний равновесия дает

возможность выделить ветви устойчивых и неустойчивых состояний и дополнительное динамическое исследование оказывается излишним; при этом главная трудность состоит именно в построении указанной диаграммы, а не в контроле равновесия отдельных ее ветвей. Исключение представляет случай 3 (см. стр. 9), когда динамический метод оказывается принципиально единственным методом исследования устойчивости.

В настоящее время особенно подробно изучены задачи, относящиеся к случаю 1 (бифуркационные задачи). Для определения точек бифуркации пользуются способом Эйлера или энергетическим методом.

Основная идея способа Эйлера состоит в следующем. Предполагают, что смежная, качественно новая форма равновесия существует, тогда из уравнений, характеризующих эту форму равновесия, определяют нагрузки, при которых она становится возможной. При постановке соответствующих задач идеализируют геометрию системы и способ ее нагружения (идеально прямолинейная форма исходного стержня, идеально плоская исходная форма срединной поверхности пластинки, отсутствие эксцентрицитетов нагрузки и т. п.). Многие из этих задач (в случаях большой гибкости конструкции) допускают решение на основе гипотезы о физической линейности (т. е. использование закона Гука), но нередко приходится учитывать физическую нелинейность (пластические свойства материала).

Поскольку рассматривается форма равновесия, смежная с исходной (исследуемой на устойчивость), постольку решение основывается на предположении о сколь угодно малых величинах отклонений системы от исходной формы равновесия (геометрическая линеаризация задачи).

В обычных случаях распределенной деформативности конструкции указанные выше уравнения равновесия оказываются дифференциальными и задача сводится к определению собственных значений и соответствующих собственных форм, отвечающих тем или иным заданным граничным условиям. После этого критические значения нагрузки легко определяют через найденные собственные значения. Эти операции удается выполнить в замкнутом виде только в сравнительно простых случаях (стержни постоянного поперечного сечения при несложных типах нагружения продольными силами, пластинки постоянной толщины при совпадении их границ с координатными линиями и в условиях сравнительно простого нагружения силами, лежащими в срединной поверхности). В других случаях приходится пользоваться приближенными способами решения дифференциальных уравнений.

Энергетический метод оказывается особенно удобным в тех относительно сложных случаях, когда способ Эйлера не позволяет получить решение в замкнутой форме. Суть энергетического метода состоит в исследовании изменения полной энергии системы (вариации полной энергии) при переходе из исходной формы равновесия в возмущенную форму равновесия. Критическому значению нагрузки соответствует нулевое значение этого изменения.

При практическом использовании энергетического метода заранее задаются видом отклоненной формы равновесия и тем самым неизбежно вносят некоторую приближенность в решение. При этом важно, чтобы предположенная возмущенная конфигурация системы удовлетворяла граничным условиям данной задачи. Среди рассматриваемых возможных отклоненных конфигураций ближе остальных к истинной та конфигурация, которой соответствует наименьшее значение вычисленной

энергетическим методом критической нагрузки. Согласно этому методу отклоненная форма равновесия задается с точностью до нескольких неопределенных параметров, и затем соотношения между ними определяются из условий минимума полной энергии системы.

Способ Эйлера и энергетический метод (в частности, метод Ритца) позволяют найти критическую нагрузку, но не дают возможность построить всю кривую равновесных состояний в закритической области; впрочем, в большинстве случаев этого достаточно, поскольку само достижение критического состояния обычно является недопустимым.

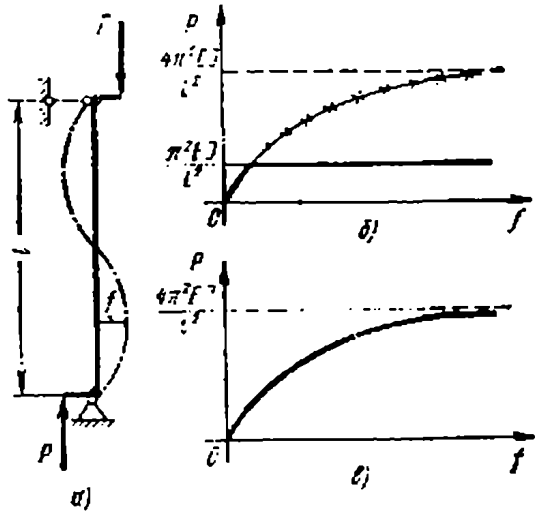

Рис. 6

В случаях 2 и 4 требуется построение кривой равновесных состояний или, по крайней мере, определение характерных точек этой кривой (т. е. точек максимума или минимума, определяющих верхнюю и нижнюю критические нагрузки). Как правило, при этом учитывают геометрическую нелинейность задачи, так как перемещения уже не всегда можно считать достаточно малыми. Во многих случаях приходится учитывать также и физическую нелинейность, связанную с отклонениями от закона Гука.

При построении подобных диаграмм важно не пропустить ни одной из ветвей. Так, для стойки, показанной на рис. 6, *а*, полная диаграмма выглядит подобно рис. 6, *б*, хотя при недостаточно тщательном анализе можно прийти к диаграмме, изображенной на рис. 6, *в*, из которой следует ошибочное заключение относительно критического значения нагрузки (с четырехкратной ошибкой).

В случае 5 требуется построение кривых $f = f(t)$ при различных уровнях нагружения. Существенную роль играет принятый закон ползучести, т. е. зависимость скорости деформации ползучести от напряжения.

Глава I

УСТОЙЧИВОСТЬ СТЕРЖНЕЙ

УПРУГИЕ СТЕРЖНИ НА ЖЕСТКИХ ОПОРАХ *

Общие сведения

При эйлеровой форме потери устойчивости критическую силу определяют из дифференциального уравнения изогнутой оси, справедливого для любого участка стержня, в пределах которого продольная сила неизменна:

$$\frac{d^2}{dz^2}\left(EJ\frac{d^2v}{dz^2}\right)+N\frac{d^2v}{dz^2}=0; \tag{1}$$

здесь $v=v(z)$ — прогиб сечения с абсциссой z; EJ — жесткость при изгибе; N — продольная сила. Для стержней с постоянной жесткостью ($EJ=\text{const}$) дифференциальное уравнение (1) принимает вид

$$\frac{d^4v}{dz^4}+\alpha^2\frac{d^2v}{dz^2}=0, \tag{2}$$

где

$$\alpha=\sqrt{\frac{N}{EJ}}. \tag{3}$$

Общее решение дифференциального уравнения (2)

$$v=C_1\sin\alpha z+C_2\cos\alpha z+C_3z+C_4 \tag{4}$$

должно удовлетворять четырем граничным условиям (по два условия на каждом конце стержня). Поочередное использование этих условий приводит к однородной относительно C_i системе линейных алгебраических уравнений. Критическую силу находят из равенства нулю определителя, составленного из коэффициентов этой системы.

Пример 1. Определение критической силы для стержня с заделанными концами (см. табл. 1, схему 5).

На каждом из концов прогиб и угол поворота сечения равны нулю, т. е.

$$v(0)=0;\quad v'(0)=0;\quad v(l)=0;\quad v'(l)=0.$$

Согласно выражению (4) приходят к однородной относительно C_i системе уравнений

$$C_2+C_4=0;$$

$$\alpha C_1+C_3=0;$$

$$C_1\sin\alpha l+C_2\cos\alpha l+C_3l+C_4=0;$$

$$\alpha C_1\cos\alpha l-\alpha C_2\sin\alpha l+C_3=0$$

* Написано совместно с Н. И. Губановой.

и критическую силу определяют из условия

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ \alpha & 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha l & \cos \alpha l & l & 1 \\ \alpha \cos \alpha & -\alpha \sin \alpha & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

После развертывания определителя получается трансцендентное уравнение

$$\sin \frac{\alpha l}{2} \left(\sin \frac{\alpha l}{2} - \frac{\alpha l}{2} \cos \frac{\alpha l}{2} \right) = 0,$$

наименьший корень которого

$$\alpha l = 2\pi.$$

Следовательно, согласно формуле (3) критическая сила будет

$$P_{кр} = \frac{4\pi^2 EJ}{l^2}.$$

Многопролетные стержни (неразрезные балки), стержни со ступенчатым изменением жесткости, а также стержни, нагруженные несколькими продольными силами в промежуточных сечениях, подразделяют на отдельные участки с таким расчетом, чтобы в пределах каждого из них можно было пользоваться дифференциальным уравнением (2). При этом на границах участков должны выполняться условия сопряжения, относящиеся к самой функции и ее производным

$$v_+ = v_-; \quad v'_+ = v'_-; \quad (EJv'')_+ = (EJv'')_-;$$
$$(EJv'')_+ = (EJv'')_- \pm Pv',$$

здесь индексы минус и плюс относятся соответственно к сечениям, расположенным непосредственно слева и справа от границы между участками. В этих случаях удобно пользоваться представлением решения дифференциального уравнения через начальные параметры

$$\left.\begin{aligned} v &= v_0 + \varphi_0 z - M_0 \frac{1 - \cos \alpha z}{N} - Q_0 \frac{\alpha z - \sin \alpha z}{\alpha N}; \\ \varphi &= \varphi_0 + M_0 \frac{\alpha \sin \alpha z}{N} - Q_0 \frac{1 - \cos \alpha z}{N}; \\ M &= M_0 \cos \alpha z + \frac{Q_0}{\alpha} \sin \alpha z; \\ Q &= -\alpha M_0 \sin \alpha z + Q_0 \cos \alpha z; \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

здесь v_0, φ_0, M_0 и Q_0 — начальные параметры — прогиб, угол поворота, изгибающий момент и поперечная сила в начале участка (при $z = 0$).

Пример 2. Составим уравнение для определения критической силы консольного стержня, нагруженного двумя сжимающими силами P_1 и P_2 (см. схему в табл. 3); при этом $v_0=0$, $\varphi_0=0$, $Q_0=0$. Пользуясь выражениями (5), получаем для конца первого участка ($z = a$)

$$\left.\begin{aligned} v_a &= -\frac{M_0}{P_1+P_2}(1-\cos\alpha_1 a);\\ \varphi_a &= \frac{\alpha_1 M_0}{P_1+P_2}\sin\alpha_1 a;\\ M_a &= M_0\cos\alpha_1 a;\\ Q_a &= -\alpha_1 M_0\sin\alpha_1 a. \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

где $\alpha_1 = \sqrt{\frac{P_1+P_2}{EJ}}$. Принимая величины v_a, φ_a, M_a и Q_a в качестве начальных параметров и вновь пользуясь выражениями (5), находим для конца второго участка

$$M_{2a} = M_a\cos\alpha_2(l-a) + \frac{Q_a}{\alpha_2}\sin\alpha_2(l-a),$$

где $\alpha_2 = \sqrt{\frac{P_1}{EJ}}$. Так как на конце второго участка должно быть $M_{2a}=0$, то

$$M_a\cos\alpha_2(l-a) + \frac{Q_a}{\alpha_2}\sin\alpha_2(l-a) = 0. \qquad (7)$$

Система пяти уравнений (6) и (7) однородна относительно пяти параметров M_0, v_a, φ_a, M_a и Q_a. Критическую силу определяют из уравнения

$$\begin{vmatrix} -\frac{1-\cos\alpha_1 a}{P_1+P_2}; & -1; & 0; & 0; & 0\\ \frac{\alpha_1\sin\alpha_1 a}{P_1+P_2}; & 0; & -1; & 0; & 0\\ \cos\alpha_1 a; & 0; & 0; & -1; & 0\\ -\alpha_1\sin\alpha_1 a; & 0; & 0; & 0; & -1\\ 0; & 0; & 0; & \cos\alpha_2(l-a); & \frac{\sin\alpha_2(l-a)}{\alpha_2}; \end{vmatrix} = 0,$$

в котором содержатся значения обеих сжимающих сил P_1 и P_2.

С помощью этих способов решен ряд задач о критических силах для стержней, состоящих из участков постоянного сечения, с постоянной в пределах каждого участка сжимающей силой. Результаты решений

приведены в готовом виде на стр. 17—18. Критическая сила представлена в виде

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 E J_{\min}}{(\mu l)^2}, \tag{8}$$

где μ — коэффициент, зависящий от устройства опор и способа нагружения стержня и называемый *коэффициентом длины*. Произведение μl называют *приведенной длиной*.

Формулой (8) можно пользоваться при условии, что *гибкость* стержня, определяемая выражением

$$\lambda = \frac{\mu l}{\sqrt{J_{\min} : F}}, \tag{9}$$

удовлетворяет неравенству

$$\lambda \leqslant \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{пц}}}. \tag{10}$$

В формулах (9) и (10) F — площадь сечения стержня; $\sigma_{пц}$ — предел пропорциональности. Если условие (10) не выполняется, то потеря устойчивости наступает при напряжениях, превосходящих предел пропорциональности, и критическую силу определяют по указаниям, приведенным на стр. 80—88.

Формулу (9) представляют также в виде

$$P_{кр} = \eta \frac{EJ}{l^2}, \tag{11}$$

причем коэффициент η связан с коэффициентом длины μ соотношением

$$\eta = \frac{\pi^2}{\mu^2}. \tag{12}$$

Однопролетные стержни постоянного сечения

Действие сосредоточенных нагрузок. Значения коэффициентов μ и η для различных случаев нагружения стержней приведены в табл. 1—4.

Критическое соотношение между сжимающими силами, приложенными в промежуточных сечениях консольного стержня, можно найти по приближенной формуле (рис. 1)

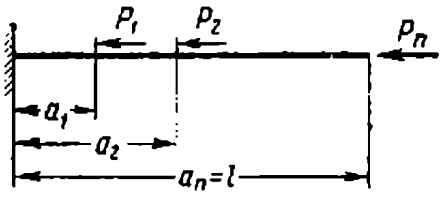

Рис. 1

$$P_1 \left(\frac{a_1}{l}\right)^2 + P_2 \left(\frac{a_2}{l}\right)^2 + \\ + \cdots + P_n = \frac{\pi^2 E J_{\min}}{4 l^2}. \tag{13}$$

Для устойчивости стержня необходимо, чтобы левая часть соотношения (13) была меньше правой части.

Действие распределенных нагрузок. Если внешняя продольная нагрузка приложена непрерывно, то дифференциальное уравнение задачи записывают так:

$$EJ \frac{d^4 v}{dz^4} + \frac{d}{dz}\left(N \frac{dv}{dz}\right) = 0, \tag{14}$$