

Математические развлечения

**Приложения арифметики,
геометрии и алгебры к
различного рода запутанным
вопросам, забавам и играм**

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 82-3
ББК 84-4
М34

М34 Математические развлечения: Приложения арифметики, геометрии и алгебры к различного рода запутанным вопросам, забавам и играм / – М.: Книга по Требованию, 2024. – 208 с.

ISBN 978-5-519-94471-7

Математические развлечения. Приложения арифметики, геометрии и алгебры к различного рода запутанным вопросам, забавам и играм

ISBN 978-5-519-94471-7

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2024

© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2024

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.



Серия Книжный Ренессанс

www.samizday.ru/reprint

ПРЕДИСЛОВІЕ.

„Человѣкъ такъ жалокъ, что способенъ скучать даже безъ всякой причины, единственно въ силу своей организаціи, и такъ легкомысленъ, что, имѣя тысячи причинъ къ скукѣ, находитъ развлеченіе даже въ катаваніи шаровъ по бильярдѣ“.

— „Съ какой же это цѣлью? спросите вы.— Да просто съ той, чтобы завтра похвастаться передъ своими друзьями, что онъ играетъ лучше другихъ. Точно такъ же есть люди, ломающіе себѣ головы въ тиши кабинетовъ, изъ желанія показать ученому міру, что они нашли до сихъ поръ еще неотысканное рѣшеніе какой нибудь алгебраической задачи“.

(Паскаль. — Pensées).

Въ обществѣ не принято говорить о себѣ или о своихъ близкихъ. Въ предисловіи же къ книгѣ это, напротивъ, считается обязательнымъ. И сколько бы ни возставали, изъ приличія, противъ такого правила,— оно слишкомъ заманчиво для тщеславія авторовъ, чтобы когда нибудь выйти изъ употребленія. Поэтому и я позволю себѣ сказать нѣсколько словъ о своей книгѣ.

Она была задумана двадцать лѣтъ тому назадъ, когда я мечталъ также издать разбросанныя въ различныхъ журналахъ статьи Фермата, одного изъ величайшихъ гениевъ человѣчества. Его глубокомысленныя изслѣдованія должны были представлять въ то время немало трудностей, особенно у насъ, во Франціи, гдѣ высшая ариметика находилась въ пренебреженіи у геометровъ и не пользуется правомъ гражданства въ официальныхъ школахъ. На этихъ изслѣдованіяхъ я основывалъ большую часть своихъ собственныхъ работъ и личныхъ выводовъ.

Кромѣ того, такъ какъ сочиненія Фермата возбуждали множество библиографическихъ вопросовъ, разрѣшенныхъ лишь въ недавнее время,

то мнѣ пришлось разыскивать манускрипты, возстановлять способы изслѣдованія, — вообще, заниматься такими изысканіями, которыя, надѣюсь, вскорѣ увѣнчаются полнымъ успѣхомъ. Словомъ, работы по изданію мѣшали составленію книги; книга, въ свою очередь, мѣшала изданію, а имъ обѣимъ — мои профессиональныя занятія. Можетъ быть, нѣкоторую роль игралъ въ этомъ случаѣ и тотъ законъ природы, въ силу котораго произведенія человѣческаго ума, точно такъ же какъ появляющіяся на свѣтъ дѣти, должны быть зачаты въ наслажденіи, выношены въ страданіяхъ и рождены въ болѣзняхъ.

Читатель, пожалуй, удивится, что меня занимали такія, въ сущности, «пустяки» и спроситъ: для какой цѣли служить эта книга? На этотъ вопросъ мнѣ хотѣлось бы отвѣтить нѣсколько сантиментальными объясненіями *Баше*, а именно: «Книги, это — дѣти нашего ума, и не говоря уже о томъ, что отцы вообще склонны любить своихъ дѣтей, — они съ особенной нѣжностью относятся къ своимъ первенцамъ; поэтому, выпуская свою первую книгу, я, конечно, очень дорожу этимъ первенцемъ своего ума и, не довольствуясь однимъ только произведеніемъ его на свѣтъ, хочу еще обезпечить ему долговѣчность».

Баше приводитъ еще одинъ болѣе солидный аргументъ, и я воспользуюсь имъ также въ свое оправданіе. «Кромѣ того, я не думаю, говорить онъ, чтобы читатель, ознакомившійся хоть немного съ содержаніемъ моей книги, нашелъ ее такой же ничтожной, какъ и взглянувшій на одно только ея заглавіе. Правда, въ ней нѣтъ ничего, кромѣ игръ, имѣющихъ главною цѣлью дать обществу благородное развлеченіе и пріятное занятіе, но, чтобы придать этимъ играмъ занимательность, потребовалось немало остроумія и нужно было обладать недюжинными познаніями въ наукѣ о числахъ, для придумыванія доказательствъ и нѣсколькихъ новыхъ интересныхъ задачъ, приведенныхъ мною въ своей книгѣ».

Впрочемъ, чего только не отрицали подъ предлогомъ бесполезности? Когда въ присутствіи Малербъ хвалили комментарий Баше къ Діофанту, — тотъ спросилъ: «а развѣ отъ этого уменьшатся цѣны на хлѣбъ?» Въ золотой вѣкъ трагедіи, Роберваль, выходя изъ театра, высказалъ фразу, сдѣлавшуюся, впоследствии, классической: «кѣ чему все это?» Всегда были и будутъ ученые, относящіеся съ пренебреженіемъ къ фантазіи, поэты, отрицающіе пользу науки и практическіе люди, склонные смотрѣть съ безграничнымъ презрѣніемъ на поэтовъ и ученыхъ, считая ихъ идеалистами и отвлеченными мыслителями. И во всемъ этомъ нѣтъ.

ничего прискорбнаго. Развѣ раздѣленіе труда, это произведеніе новѣйшей цивилизаціи, и развитіе преобладающихъ склонностей, это основное требованіе современной эстетики, не предполагають въ личности уничтоженія нѣкоторыхъ способностей и не производять въ мозгу человѣка какой-то пустоты, вродѣ незанятой кубикомъ влѣтки *такена* (игра въ пятнадцать)? Пустота эта необходима для теченія и группировки идей и безъ нея вся прелесть систематизированія, вся энергія отрицанія, всѣ тайны специальностей слились бы въ синкретизмъ глупца и въ апатіи животнаго.

Знаніе есть сила. Это изреченіе справедливо относительно каждой области вѣдѣнія. Воплотить въ музыкальной фразѣ или въ стихѣ никогда неслыханный и незабываемый ритмъ, воспроизвести на полотнѣ невиданныя и типическія краски, олицетворить въ мраморѣ прелесть и безобразіе формы—развѣ это не сила, если только подъ силой разумѣть способность создать цѣлый міръ идей и ощущеній! Собрать съ благоговѣніемъ неофита остатки прошлаго и придать имъ новое обаяніе посредствомъ изящнаго стиля,—развѣ это не сила, если подъ силой разумѣть способность воскрешать умершихъ дѣятелей! Парить мыслью въ пространствѣ, во времени и въ движеніи, безъ всякаго другаго ограниченія, кромѣ мощи собственнаго полета,—развѣ это не сила, если называть силою способность открывать новыя явленія природы, «повелѣвать громами», вызывать исчезнувшіе міры, соединять при помощи нѣсколькихъ цифръ, планеты, обреченныя на вѣчную неизвѣстность одна для другой! Насколько эти слова Бэкона справедливы для артиста, ученаго, химика, физика, астронома,—настолько же они справедливы и для геометра. Расчленяя результаты вычисленія, создавая абстракціи, комбинируя, преобразовывая, варьируя ихъ, геометръ укрѣпляетъ способность мышленія и пріобрѣтаетъ безконечную власть надъ этимъ универсальнымъ орудіемъ всякаго творчества.

Кто-то уподоблялъ составленіе книги бесѣдѣ съ неизвѣстными друзьями. Та часть моего труда, которая была помѣщена въ *«Revue scientifique»*, доставила мнѣ не только симпатизирующихъ читателей, но и сотрудниковъ. Мнѣ часто придется упоминать вполѣдствіи о прелестныхъ сообщеніяхъ, остроумныхъ замѣткахъ, изящныхъ рѣшеніяхъ задачъ многихъ лицъ, имена которыхъ я назову въ своемъ мѣстѣ. Здѣсь же я желаю только выразить мою искреннюю благодарность Карлу Генри, молодому человѣку, помогавшему мнѣ довольно продолжительное

время и съ дружескимъ, усердіемъ принявшему на себя трудъ по библиографическимъ изысканіямъ и чтенію корректуръ.

Въ заключеніе скажу еще, что сочту себя вполне удовлетвореннымъ, если эти страницы понравятся нѣсколькимъ ученымъ, если онѣ заинтересуютъ вообще, хотя немногихъ, образованныхъ читателей и если возбудятъ въ нѣкоторыхъ молодыхъ умахъ склонность къ разсужденію и любовь къ умственнымъ наслажденіямъ.

Э. Люна.~~ак~~

ГЛАВА I.

ПЕРЕПРАВЫ ВЪ ЛОДКѢ.

Главный недостатокъ многихъ ученыхъ состоитъ въ томъ, что они находятъ удовольствіе лишь въ туманныхъ и напыщенныхъ разсужденіяхъ; между тѣмъ какъ для упражненія ихъ ума представляется столько важныхъ, по своему значенію, реальныхъ предметовъ, которые могли бы быть разработаны съ пользою для общества. Охота, рыбная ловля, торговля, морскія путешествія и даже игры, какъ требующія ловкости, такъ и основанныя на случайности, даютъ громадный матеріалъ для научныхъ занятій. Мало того, самыя обыкновенныя дѣтскія забавы могли бы составить на себѣ вниманіе величайшаго математика.

(Лейбницъ.—Орег. phil).

Историческія свѣдѣнія.—Біографія Баше.



Въ этой первой главѣ мы помѣщаемъ нѣсколько исправленныхъ и обобщенныхъ задачъ. извѣстныхъ еще въ древности и относящихся къ геометріи порядка (*de l'ordre*) и положенія (*de la situation*).

Происхожденіе этихъ задачъ намъ пока неизвѣстно, точно также какъ и происхожденіе «меледы», теорію которой мы даемъ въ седьмой серіи нашихъ развлеченій. Существуетъ ли какая нибудь связь между задачей о трехъ ревнивыхъ мужьяхъ и игрой въ меледу съ тремя кольцами,—это вопросъ, требующій разъ-

ясненія. Представить себѣ наглядно переправу черезъ рѣку можно при помощи колоды картъ, но это лишь въ томъ случаѣ, когда въ задачѣ говорится только о трехъ или четырехъ семьяхъ; если же ихъ больше, то берутъ нѣсколько колодъ. Игральныя карты можно также замѣнить нумерованными жетонами бѣлаго и краснаго или двухъ какихъ нибудь другихъ цвѣтовъ. Внимательно прочитавши объясненіе задачи, приводимой нами ниже, по тексту самаго Баше, легко освоиться съ приемами ея рѣшенія. Баше, одинъ изъ первыхъ французскихъ математиковъ, вознуженъ въ своихъ сочиненіяхъ арифметики и геометріи положенія. Краткія біографическія свѣдѣнія о немъ мы заимствуемъ изъ предисловія къ нашимъ «*Recherches sur l'Analyse indéterminée et sur l'Arithmétique de Diophante*» (Moulin, 1873).

Гаспаръ Баше Сіеръ де Мезирьякъ, родившійся въ Бургъ-ан-Брессѣ, въ 1581 г. и умершій въ 1638 г., былъ извѣстный геометръ и литераторъ. Послѣ одного путешествія въ Италію вмѣстѣ съ грамматикомъ Вожеа, ему было предложено преподавать математику Людовику XIII. Однако Баше не отличался тщеславіемъ и потому не только не принялъ этого предложенія, но поспѣшилъ даже уѣхать изъ столицы, въ страшномъ испугѣ, увѣряя, что онъ никогда еще не испытывалъ такого безпокойства, и что, при одной только мысли занять это мѣсто, ему уже казалось, будто на его плечахъ лежитъ тяжелое бремя королевства. Вернувшись на родину, онъ женился и, повидимому, сдѣлалъ хорошій выборъ, потому что самъ считалъ свое супружество чрезвычайно счастливымъ. Здѣсь, окруженный спокойствіемъ домашней жизни, онъ открылъ рѣшеніе неопредѣленнаго уравненія первой степени въ цѣлыхъ числахъ, напечаталъ два послѣдовательныхъ изданія своего «*Recueil de Problèmes plaisants et délectables qui se font par les nombres*» (Lyon, 1613 et 1624), и свой комментарий къ Арифметикѣ Діофанта (Paris, 1621 г.).

Переправа роты солдатъ въ челнокъ. Б.

Рота пѣхотинцевъ подходитъ къ берегу рѣки, но оказывается, что мостъ сломанъ и перейти ее въ бродъ невозможно. Командиръ замѣчаетъ у берега двоихъ дѣтей, играющихъ въ челнокъ, до того маленькомъ, что въ немъ можетъ помѣститься лишь одинъ солдатъ. Какъ поступитъ командиръ, чтобъ перевезти черезъ рѣку всѣхъ солдатъ своей роты?

Дѣти переѣзжаютъ вмѣстѣ на противоположный берегъ; одинъ изъ нихъ тамъ и остается, а другой возвращается съ лодкой. Потомъ переѣзжаетъ черезъ рѣку солдатъ, а мальчикъ, оставшійся на противоположномъ берегу, приводитъ лодку обратно.

Такимъ образомъ, при двухъ переправахъ взадъ и впередъ переѣзжаетъ одинъ солдатъ; и это продолжается до тѣхъ поръ, пока не будетъ перевезена вся рота, а также командиръ ея и остальные офицеры.

Затруднительный случай переправы.

Требуется доставить на противоположный берегъ рѣки волка, козу и кочанъ капусты / въ такой маленькой лодочкѣ, которая можетъ поднять только лодочника и одного изъ этихъ своеобразныхъ пассажировъ, причѣмъ необходимо устроить переправу такъ, чтобы въ отсутствіе лодочника, волкъ не съѣлъ козы, а коза — капусты.

Лодочникъ перевезетъ прежде всего козу, потомъ вернется за волкомъ и, переправивъ его на противоположную сторону, возьметъ козу съ собой обратно, оставитъ ее на берегу, отвезетъ капусту и, наконецъ, переправитъ и козу. Благодаря такимъ предосторожностямъ, волкъ не останется въ компаніи съ козой, а коза — въ сосѣдствѣ съ капустой.

Переправа трехъ семей.

Три ревнивыхъ мужа желаютъ переехать съ своими женами черезъ рѣку и думаютъ воспользоваться для этого лодкой, которая такъ мала, что въ ней могутъ помѣститься только двое. Спрашивается, какъ имъ переправиться при томъ условіи, чтобы ни одна женщина не оставалась въ обществѣ мужчинъ въ отсутствіи своего мужа?

Рѣшеніе этой древней задачи выражено въ слѣдующихъ латинскихъ стихахъ.

It duplex mulier, redit una, vehitque manentem;
 Itque una, utuntur tunc duo puppe viri,
 Par vadit et redeunt bini, mulierque sororem
 Advehit: ad propriam sine maritis abit.

Другими словами, вотъ какъ объясняется эта задача: назовемъ ревнивыхъ мужей большими буквами A, B, C , а ихъ женъ — соотвѣтствующими малыми a, b, c . Тогда, до переправы, будемъ имѣть:

<i>Правый берегъ.</i>			<i>Лѣвый берегъ.</i>		
C	B	A		.	.
c	b	a		.	.

И рѣшеніе задачи представится въ такомъ видѣ:

I. Прежде всего переѣзжаютъ двѣ женщины.

C	B	A		.	.
c	.	.		.	$b \quad a$

II. Одна женщина возвращается и увозитъ третью.

C	B	A		.	.
.	.	.		c	$b \quad a$

III. Одна женщина возвращается и остается съ своимъ мужемъ, а двое другихъ мужчинъ переѣзжаютъ.

C	.	.		.	$B \quad A$
c	.	.		.	$b \quad a$

IV. Одинъ мужъ возвращается со своей женой, которую

онъ оставляетъ на правомъ берегу, а самъ переправляетъ мужа
другой женщины.

.	.		C	B	A
<i>c</i>	<i>b</i>	.	.	.	<i>a</i>

У. Женщина возвращается и перевозить одну изъ своихъ подругъ, оставшихся на правомъ берегу.

	C	B	A
c		b	a

VI. Одна изъ переѣхавшихъ женщинъ возвращается за
послѣдней изъ своихъ подружекъ.

C	B	A
c	b	a

При помощи нагляднаго представленія этой задачи, посредствомъ картъ или жетоновъ, легко понять приводимое нами здѣсь разсужденіе Баше: «съ перваго взгляда, говоритъ онъ, можетъ показаться, что эта задача не имѣетъ данныхъ для своего рѣшенія, но условіе, требующее, чтобы ни одна женщина не оставалась съ другими мужчинами въ отсутствіи своего мужа, должно помочь намъ въ отысканіи, посредствомъ логическихъ умозаключеній, отвѣта на предложенный вопросъ. И дѣйствительно, если переѣзжать могутъ не болѣе, какъ попарно, то необходимо, чтобы это сдѣлали или двое мужчинъ вмѣстѣ, или двѣ женщины, или мужчина и женщина. Но въ *первую переправу* нельзя отпустить двонхъ мужчинъ (потому что тогда, вопреки условію, одинъ мужчина остался бы съ тремя женщинами), слѣдовательно, необходимо, чтобы переѣхали или двѣ женщины, или мужъ съ женой, что, въ сущности безразлично, такъ какъ, если переѣдутъ двѣ женщины, то одна изъ нихъ должна вернуться съ лодкой, а другая останется на берегу, а если переѣдетъ мужъ съ женой, то опять-таки останется жена, а мужъ поведетъ лодку обратно (женщинѣ нельзя ее вести, такъ какъ она очутится тогда въ обществѣ двухъ мужчинъ безъ своего мужа).

«При *второй переправѣ* двое мужчинъ не могутъ перѣхать вмѣстѣ, потому что въ такомъ случаѣ одинъ изъ нихъ оставилъ бы свою жену въ обществѣ другаго мужчины. Мужу съ женой точно также нельзя переправиться, потому что на противоположномъ берегу онъ оказался бы съ двумя женщинами; слѣдовательно, необходимо, чтобы перѣехали двѣ женщины, послѣ чего одна изъ нихъ возвратится съ лодкой. Затѣмъ, при *третьей переправѣ*, когда на правомъ берегу находятся трое мужчинъ и одна женщина, очевидно, что двѣ женщины не могутъ перѣхать, такъ какъ ихъ и оставалось-то тамъ лишь одна. Для мужа съ женой это оказывается тоже невозможнымъ, потому что тогда мужчина былъ бы съ тремя женщинами. Слѣдовательно, необходимо перѣхать двоимъ мужчинамъ и присоединиться, такимъ образомъ, къ своимъ женамъ, оставивъ третью семью на правомъ берегу. Но кто поведетъ лодку обратно?

«Мужчина этого не можетъ сдѣлать, потому что онъ оставилъ бы свою жену въ обществѣ другаго мужчины, для женщины это также невозможно, потому что она очутилась бы въ обществѣ двухъ мужчинъ безъ своего мужа. Отводить лодку двоимъ мужчинамъ нѣтъ расчета, — они вернулись бы только на прежнее мѣсто; слѣдовательно остается одно средство, а именно, — чтобы лодку отвели мужъ съ женой».

«При *четвертой переправѣ*, когда приходится перѣѣзжать двумъ семьямъ, мужъ съ женой, очевидно, не могутъ ѣхать, потому что это значило бы вернуться къ прежнему распредѣленію; двѣ женщины тоже не должны перѣѣзжать, такъ какъ три женщины были бы тогда въ обществѣ одного мужчины». Слѣдовательно, необходимо переправиться двоимъ мужчинамъ. Послѣ этого, для возвращенія лодки нельзя употребить двоихъ мужчинъ, потому что это значило бы вернуть ихъ на прежнее мѣсто; одному мужчине также нельзя этого сдѣлать, такъ какъ онъ очутился бы въ обществѣ двухъ жен-